

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**Д.Ф. Белоножко
С.О. Ширяева
А.И. Григорьев**

**Нелинейные волны
на заряженной
поверхности жидкости**

Ярославль 2006

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322
Б 43

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2006 года*

Рецензенты

д-р физ.-мат. наук Коромыслов В.А.;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Белоножко, Д.Ф. Нелинейные волны на заряженной
поверхности жидкости: моногр. / Д.Ф. Белоножко,
С.О. Ширяева, А.И. Григорьев; Яросл. гос. ун-т
им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288 с.

ISBN 5-8397-0507-1 (978-5-8397-0507-4)

В монографии в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности идеальной и вязкой несжимаемой жидкости в плоской и цилиндрической геометриях.

Книга издана при поддержке грантов Президента РФ № МК-929.2003.01 и МД-1990.2005.1, а также грантов РФФИ № 03-01-00760, № 05-08-01147-а, №06-01-00066-а.

УДК 532.59:534.1
ББК В 253.322

**ISBN 5-8397-0507-1
(978-5-8397-0507-4)**

© Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова, 2006
© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев,
С.О. Ширяева, 2006

1. Введение. Периодические волны на однородно заряженной плоской поверхности несжимаемой жидкости

1. Линейные волны. Началом теоретического исследования периодических волн на заряженной поверхности жидкости является работа Я.И. Френкеля [1], в которой исследован вопрос об условиях реализации неустойчивости поверхности жидкости по отношению к избытку поверхностно распределенного электрического заряда. Л.А. Тонкс за год до появления работы Френкеля провел качественную оценку условий реализации этой неустойчивости [2]. Он получил критерий неустойчивости заряженной поверхности жидкости с точностью до коэффициента ≈ 2 , сравнивая лапласовское давление под искажением, в виде сферического сегмента, рельефа плоской поверхности с давлением на него однородного электростатического поля, направленного перпендикулярно невозмущенной поверхности.

На практике неустойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда проявляется в том, что при превышении поверхностной плотности заряда некоторого критического значения с поверхности жидкости начинается сброс электрического заряда в виде большого числа маленьких сильно заряженных капелек [3]. Сначала на поверхности образуются конусообразные выступы – конусы Тейлора. Затем с вершин этих выступов электрическое поле начинает отрывать заряженные капельки [4, 5].

Френкель строго вывел уточненный критерий неустойчивости в рамках метода нормальных мод [6]. Он рассмотрел в линейном по амплитуде волны приближении задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности идеальной несжимаемой, идеально проводящей бесконечно глубокой жидкости. В системе координат $OXYZ$ с осью OZ , направленной вертикально вверх, и плоскостью OXY , совпадающей с равновесной в поле сил тяжести плоской поверхностью жидкости, полная математическая формулировка этой задачи имеет вид [1,7]:

$$z > 0: \quad \Delta\Phi = 0; \quad z < 0: \quad \Delta\varphi = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad -\rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \kappa_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Phi - 4\pi\kappa_0\xi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad |\nabla \varphi| \rightarrow 0.$$

Здесь t – время; $\xi = \xi(t, x)$ – отклонение свободной поверхности жидкости от плоской равновесной формы; κ_0 – поверхностная плотность электрического заряда в равновесном состоянии; ρ и γ – плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости соответственно; g – ускорение поля силы тяжести; $\varphi = \varphi(t, x, z)$ – потенциал поля скоростей в жидкости, обусловленный возмущением ее свободной поверхности; $\Phi = \Phi(t, x, z)$ – добавка к величине электрического потенциала над поверхностью жидкости, вызванная отклонением формы этой поверхности от равновесной плоской. Для простоты движение жидкости считается не зависящим от координаты y .

Решение задачи Френкеля в комплексной форме имеет вид [1, 7]:

$$\xi = \zeta \exp(i(kx - \omega t)); \quad \omega = \sqrt{kg \left(1 + k^2 \frac{\rho g}{\gamma} - kW \right)}.$$

Безразмерный параметр $W > 0$ в дальнейшем будет называться параметром Тонкса-Френкеля. Он равен отношению электрических и лапласовских сил под искривлением свободной поверхности жидкости с характерным линейным масштабом, равным капиллярной постоянной жидкости, и определяется выражением:

$$W = \frac{4\pi\kappa_0^2}{\sqrt{\rho g \gamma}}.$$

Общим решением задачи Френкеля является суперпозиция синусоидальных прогрессивных волн различных длин $\lambda = 2\pi/k$, где k – волновое число. Принимается, что свободная поверхность жидкости подвержена тепловым возмущениям, которые в фиксиро-

рованный момент времени образуют рельефную структуру с характерной высотой складок $\sim \sqrt{kT/\gamma}$, где $k = 8.31 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{моль} \cdot \text{град})$ – постоянная Больцмана. Согласно принципам гармонического анализа, такой рельеф можно представить суперпозицией «простейших гармонических складок». Решение Френкеля показывает, как такие простейшие возмущения, называемые в дальнейшем модами, будут эволюционировать во времени.

При $0 \leq W \leq 2$ амплитуда всех возможных тепловых возмущений остается малой $\sim \sqrt{kT/\gamma}$. При $W > 2$ существует интервал волновых чисел:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} (W - \sqrt{W^2 - 4}) < k < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} (W + \sqrt{W^2 - 4}),$$

для которых амплитуды возмущений экспоненциально растут во времени. В рамках линейного подхода это нарастание не ограничено (т.е. обеспечено до тех пор, пока амплитуда волны уже не сможет считаться весьма малой по сравнению с ее длиной).

Складывается следующая картина явления. Если $0 \leq W < 2$, то на свободной поверхности лапласовские силы преобладают над электрическими на вершинах возмущений равновесной поверхности, связанных со всеми возможными модами. Поэтому плоская равновесная форма свободной поверхности оказывается устойчивой по отношению к любым виртуальным возмущениям.

Для каждой моды с волновым числом k имеется свое пороговое значение параметра Тонкса-Френкеля

$$W_k = k \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} + \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}},$$

при котором на гребнях искажения свободной поверхности жидкости лапласовские и электрические силы в точности уравновешиваются. Любое, даже малое, превышение параметром W порогового значения приводит к нарушению равновесия в сторону доминирования электрических сил, стремящихся увеличить амплитуду возмущения. Мода с волновым числом

$$k_* = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

имеет самый низкий порог $W = W_*$ по условиям реализации неустойчивости и называется основной. Напомним, что рассуждения Тонкса приводят к условию реализации неустойчивости $W > 1$, вдвое более слабому, чем у Френкеля.

Модель Френкеля не дает полного представления о неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. Она описывает только начальную стадию неустойчивости и предсказывает нестабильность возмущений малой амплитуды. Из решения Френкеля следует, что отклонение формы закритически заряженной поверхности жидкости от равновесной за малое время от момента появления заряда на свободной поверхности превысит амплитуду термокапиллярных колебаний. Вопрос о дальнейшей эволюции возмущения модель Френкеля не решает. Тем не менее предложенный Френкелем критерий неустойчивости малых возмущений $W > 2$ принят за условие реализации практически наблюдаемой неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда [3 – 5]. Четкое теоретическое обоснование этого факта, так же как и его корректная экспериментальная проверка, в научной литературе не представлены. Для детального исследования вопроса необходим анализ задачи Френкеля в нелинейной по амплитуде волнового движения постановке. Проведение такого анализа является актуальным вопросом современной электрогидродинамики.

До настоящего времени в научном мире сохраняется устойчивый интерес к задаче Френкеля [1]. Эта задача решалась в самых разнообразных постановках. Было исследовано влияние вязкости жидкости и ее глубины на закономерности реализации неустойчивости [8 – 14]. В связи с тем, что на закономерности распространения волн на поверхности жидкости существенное влияние оказывают поверхностно активные вещества [15 – 22], в работах [23 – 29] было изучено влияние этих веществ на закономерности реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избытку электрического заряда. В [30 – 38] анализировалось влияние эффектов, обусловленных ре-

лаксации заряда. В моделях [39 – 41] проведен анализ совместного влияния эффектов, связанных с релаксацией заряда и поверхностно-активных веществ. В [42 – 48] было исследовано влияние внешней среды на закономерности реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля.

Главный вывод, следующий из процитированных работ, состоит в том, что диссипация энергии и релаксационные эффекты на начальной стадии развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости сказываются на величине инкремента развития неустойчивости, но не изменяют условий ее реализации. Поле флуктуационных (дисперсионных) сил увеличивает устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля поверхностного заряда, а влияние внешней среды, движущейся параллельно границе раздела сред или в импульсном влиянии на свободную поверхность, снижает устойчивость по линейному приближению.

Однако все работы [8 – 48] выполнены в линейном приближении по амплитуде волны и не дают ответа на вопрос, как происходит формирование эмиссионных выступов и как различные физические факторы влияют на этот процесс. Моделирование нелинейной стадии развития неустойчивости Тонкса-Френкеля является одной из актуальных проблем современной электрогидродинамики.

Временная эволюция периодических капиллярно-гравитационных волн, возникающих в задаче Френкеля, позволяет исследовать начальную стадию развития неустойчивости Тонкса-Френкеля. За начальной стадией неустойчивости следует этап усиления влияния нелинейных членов, присутствующих в полных уравнениях электрогидродинамики и граничных условиях задачи. Поэтому следующим последовательным этапом улучшения модели Френкеля является теоретическое исследование нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости.

2. Нелинейные волны. Анализ наиболее часто цитируемых обзоров по распространению нелинейных волн на поверхности жидкости [49 – 51] показывает, что методы исследования нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн начали разрабатываться около ста лет назад. Первая теоретическая рабо-

та по этой теме выполнена в начале двадцатого столетия Дж.Р. Вилтоном [52 – 53] методом прямого разложения основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости и граничных условий к ним по малому параметру, равному отношению амплитуды волны к ее длине. Анализ Вилтона – первая существенная модификация нелинейной модели периодических гравитационных волн Г.Г. Стокса [54] на случай учета капиллярных сил. Кроме того, Вилтон провел процедуру решения в эйлеровых переменных, а не в лагранжевых, как это делал Стокс.

Во второй половине XX века, после того как Ф.Р. Брезертон [55] и В.Ф. Саймонс [56] сформулировали методы нелинейного анализа периодических волн, процедура решения Вилтона была улучшена с помощью метода разных масштабов. Наиболее известные теоретические и экспериментальные результаты в области исследования периодических нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости принадлежат Л.Ф. Мак-Голдрику [57 – 60] и А.Х. Найфэ [61 – 63]. Акцент в исследованиях Мак-Голдрика и Найфэ сделан на исследование резонансного взаимодействия волн. Приведенные в их работах выражения для профиля волны $\xi = \xi(x, t)$ во втором приближении по ее амплитуде волны в обозначениях, использованных при обсуждении задачи Френкеля, имеют следующую структуру:

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) + ka^2 \frac{1 + \alpha k^2}{0.5 - \alpha^2 k^2} \cos(2(kx - \omega t)) + \dots; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},$$

где a и k – волновое число и амплитуда волны, определяемые из начальных условий, а значение частоты ω постоянно по Вилтону, но является медленно меняющейся функцией времени по Мак-Голдрику и Найфэ: $\omega = \omega_0(1 + \delta a^2 t)$. Значение параметра δ определяется с помощью стандартной процедуры устранения секулярных членов в задаче третьего по амплитуде порядка малости.

Независимо от метода решения при $k = 1/\sqrt{2\alpha}$ отношение слагаемого второго по безразмерной амплитуде a порядка малости в выражении для профиля волны к предыдущему слагаемому стремится к бесконечности. Найфэ и Мак-Голдрик связали этот факт с вырожденным трехмодовым резонансным взаимодействием капиллярных и гравитационных волн, а для построения при-

годного в использовании профиля волны применили в этой ситуации плохо обоснованные приемы, основанные на представлении о перекачке энергии волны из основной гармонике с волновым числом $k = 1/\alpha$ в гармонику с волновым числом $2k$. Но они не учли, что при выполнении условий резонанса в уравнениях движения колебательных систем весьма существенную роль играют члены уравнений, отвечающие за диссипацию энергии. Модели Мак-Голдрика и Найфэ при резонансном значении $k = 1/\sqrt{2\alpha}$ дают неверную картину явления из-за несовершенства модели идеальной жидкости, а не по причине неправильности методики решения. При нерезонансных значениях волнового числа методика Мак-Голдрика и Найфэ может быть взята за основу построения модели нелинейных периодических волн на поверхности заряженной жидкости. В настоящей работе показано, как выполняется теоретическое исследование нелинейных периодических волн на поверхности заряженной жидкости с помощью приемов, предложенных в работах Мак-Голдрика [58 – 60] и Найфэ [61 – 63].

Важно подчеркнуть, что имеется довольно много исследовательских направлений, связанных с изучением волн на поверхности жидкости, которые далеки от рассматриваемой темы, несмотря на схожесть названия. Отметим некоторые из этих направлений, чтобы подчеркнуть их отличие от изучаемого вопроса и дать читателю некоторые ориентиры в значительно более широкой научной области исследования нелинейных волн на поверхности жидкости.

Гравитационные волны [54, 64 – 70] уже в линейном по амплитуде волны приближении не имеют на зависимости фазовой скорости от волнового числа точки минимума, а на зависимости частоты волны от волнового числа не имеют точки перегиба. Благодаря этому трехмодовое резонансное взаимодействие, характерное для капиллярно-гравитационных волн, невозможно для чисто гравитационных волн. Кроме того, наиболее неустойчивая по Френкелю мода является волной, на гребнях которой капиллярные силы и силы гравитации по порядку величины сравнимы, что не позволяет считать наиболее неустойчивую моду чисто гравитационной. По аналогичной причине вне области интересов

настоящей работы лежат исследования по чисто капиллярным волнам [71].

Мы исключили из рассмотрения модель мелкой воды [72 – 76], считающуюся пригодной, только если отношение длины волны к толщине жидкой пленки является малым параметром задачи, и связанные с ней солитонные модели распространения частицеподобных возмущений по поверхности жидкости [76 – 77].

Не будем также рассматривать частные ситуации, когда поверхностная плотность электрического заряда и поверхностное натяжение связаны между собой определенным соотношением, искусственно упрощающим задачу (так сделано в работах [78 – 79]).

Интересно отметить, что попытки теоретического исследования нелинейных капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности идеальной жидкости без использования модели мелкой воды уже предпринимались в работах [80 – 84]. В них сохранилась попытка обобщить методику Найфэ [63] на случай заряженной поверхности проводящей жидкости, являющейся нижним электродом конденсатора с плоской верхней обкладкой, расположенной горизонтально. Они содержат большое число математических выражений, составляющих формальное решение, но в них нет физически четких выводов о значении полученных результатов для исследования неустойчивости Тонкса-Френкеля. Авторы работ [80 – 84], по-видимому, не знакомы ни с теоретической работой Френкеля [1], ни с экспериментальными работами, в которых неустойчивость Тонкса-Френкеля наблюдалась, и плохо представляют, над моделью какого явления работают. Поэтому результаты, полученные в [80 – 84] на настоящий момент не имеют правильной физической трактовки. Более того, в [82] для исследования влияния нелинейности волны на критические условия реализации неустойчивости используется необоснованная методика построения разложения, приводящая к ошибочному результату.

Особо следует отметить актуальность вопроса корректного аналитического исследования влияния диссипации на нелинейные волны на поверхности жидкости не только в случае ее электрической заряженности, но даже в самом простом случае, когда учитываются только капиллярные силы и поле сил тяжести.

Как уже отмечалось, первые успешные исследования нелинейных капиллярно-гравитационных волн были выполнены для идеальной жидкости сто лет назад [52 – 53]. Работы того же времени по исследованию влияния вязкости на нелинейные волны [53, 85] выглядели менее значимо, содержали неточности и ошибки. Из-за принятой для того времени координатной формы записи громоздкую даже в современных обозначениях полную математическую формулировку задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости с внятным объяснением сути ключевых этапов решения практически невозможно было ясно изложить в объеме журнальной статьи. В результате исследования нелинейных волн в приближении идеальной жидкости были приняты научной общественностью как вполне достоверно передающие особенности нелинейного волнового движения и к тому же давали возможность с существенно меньшими затратами получить уникальные результаты, поскольку фактически это были первые шаги нелинейной физики. В итоге сложилась традиция в исследованиях свойств нелинейных волн на поверхности глубокой жидкости отдавать приоритет приближению идеальной жидкости.

Лавинообразно растущее число работ по аналитическому исследованию волн на поверхности идеальной жидкости (см., например [49 – 51] и указанную там литературу) существенно превышает количество попыток аналитически корректно описать влияние вязкости на временную эволюцию нелинейной поверхностной волны. Имеющиеся исследования по корректному аналитическому исследованию волн в вязкой жидкости до сих пор малочисленны и выполняются в приближении малой вязкости в рамках теории пограничного слоя [86 – 87], пригодном лишь при больших значениях числа Рейнольдса.

В настоящей монографии описывается строгий асимптотический метод решения задачи определения профиля нелинейной периодической волны, распространяющейся по заряженной поверхности глубокой жидкости произвольной вязкости, разработанный в последние годы [89-95].

2. Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости. Нелинейный анализ устойчивости заряженной поверхности жидкости

2.1. Нелинейные периодические капиллярно- гравитационные волны на однородно заряженной поверхности идеально проводящей бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости

1. Изучение критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена. Тем не менее большая часть проведенных теоретических исследований, основанных на изучении устойчивости капиллярных волн бесконечно малой амплитуды, выполнена в линейном приближении, хотя нелинейная суть феномена, основанная на нелинейности основных уравнений гидродинамики, очевидна и подтверждается известными экспериментами [3 – 4, 95 – 97]. Отметим, что методы асимптотического анализа нелинейных периодических волн достаточно хорошо разработаны в связи с исследованиями нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности жидкости (см. «Введение» и указанную там литературу) и могут быть успешно использованы для анализа обсуждаемой проблемы. Следует, однако, оговориться: нелинейные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости в недавнее время изучались [75 – 79], но ориентированы цитируемые работы на поиск солитонных решений и не представляют интереса в плане исследования нелинейных периодических волн.

2. Пусть идеальная, идеально проводящая несжимаемая жидкость плотностью ρ с коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле сил тяжести полупространство $z < 0$ декартовой системы координат, орт \vec{e}_z которой направлен против направления ускорения силы тяжести $\vec{e}_z \square \vec{g}$. Примем также, что

свободная поверхность жидкости заряжена и в ее окрестности существует однородное электростатическое поле E_0 , направленное параллельно орту \vec{e}_z .

Будем рассматривать плоскую волну, бегущую по свободной поверхности граничащей с вакуумом жидкости вдоль направления орта \vec{e}_x , тогда деформация свободной поверхности жидкости, связанная с бегущей волной, поле скоростей волнового движения, распределение давлений и электрического поля в окрестности искаженной волновым движением свободной поверхности жидкости будут зависеть, кроме времени t , только от координат x и z . Уравнение свободной поверхности жидкости, искаженной волновым движением малой амплитуды, представим в виде $z = \xi(x, t)$.

Поставим перед собой цель – найти в четвертом порядке малости по амплитуде волны, которую будем считать малой по сравнению с ее длиной, профиль бегущей волны, не изменяющийся во времени, и нелинейную по амплитуде поправку к частоте. Отметим, что чисто синусоидальный профиль сохраняется во времени только для волн бесконечно малой амплитуды и не является стационарным уже при расчетах второго порядка малости, поэтому в классических работах по теории волн конечной амплитуды в идеальной несжимаемой жидкости [52 – 63] задача расчета волны конечной амплитуды во втором порядке малости трактуется как задача определения профиля волны, не изменяющегося с течением времени. Как будет показано ниже, появление в расчетах более высокого порядка малости, чем второй, нелинейной квадратичной по малому параметру поправки к частоте приведет к тому, что фазовые скорости линейной по малому параметру волны и нелинейных поправок к ней будут различны. Это означает, что говорить о стационарном во времени профиле волны конечной амплитуды можно лишь на весьма ограниченных интервалах времени.

3. Учитывая вышесказанное, математическая модель феномена может быть сформулирована в виде краевой задачи следующим образом:

$$z > \xi : \quad \nabla^2 \Phi = 0 ; \quad (1)$$

$$z < \xi: \quad \nabla^2 \varphi = 0; \quad (2)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right); \quad (3)$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (4)$$

$$p + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad (5)$$

$$\Phi = 0; \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi \rightarrow -E_0 \vec{e}_z; \quad (7)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi \rightarrow 0. \quad (8)$$

Для однозначной разрешимости обсуждаемой задачи необходимо сформулировать еще и начальные условия. Однако в задачах подобного рода проблема выбора начальных условий оказывается довольно тонким вопросом, поскольку произвольное наперед заданное начальное условие может привести к неоправданному увеличению громоздкости решения. Поэтому в классических построениях периодических волновых профилей на поверхности идеальной жидкости начальное условие выбирается так, чтобы аналитическое описание решения было наименее громоздким. Фактически требование определения начального условия заменяется принципом – искать решение наименее громоздкое в смысле математического описания. Именно такой подход используется в настоящей работе.

Будем полагать, что в нулевом приближении свободная поверхность находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением $z = 0$, жидкость покоится, а электрическое поле однородно во всем пространстве:

$$\xi_0 \equiv 0; \quad \nabla \varphi_0 \equiv 0; \quad \nabla \Phi_0 \equiv -E_0 \vec{e}_z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi}.$$

Подставляя эти выражения в (1) – (8), получим

$$\Phi_0 \equiv -E_0 z.$$

4. Разобьем решаемую задачу по порядкам малости. Но предварительно исключим из рассмотрения функцию давления $p(\vec{r}, t)$, подставив выражение для давления (3) в динамическое условие (5), которое тогда примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g \xi - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{1}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) = \\ = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Неизвестными функциями в задаче являются возмущение свободной поверхности ξ , потенциал скорости φ и электрический потенциал Φ . Искать их будем в виде разложений по малому параметру:

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \varepsilon^4 \xi_4 + O(\varepsilon^5); \quad (9)$$

$$\Phi = -E_0 z + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \varepsilon^4 \Phi_4 + O(\varepsilon^5); \quad (10)$$

$$\varphi = \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \varepsilon^4 \varphi_4 + O(\varepsilon^5); \quad (11)$$

$$\xi_n \sim O(1); \quad \Phi_n \sim O(1); \quad \varphi_n \sim O(1),$$

где ε – малый безразмерный параметр, определяемый как произведение амплитуды волны a на волновое число k .

Решать задачу будем методом многих масштабов теории возмущений. Для этого примем, что неизвестные функции ξ_n , φ_n , Φ_n зависят, помимо координат x и z , от разных временных мас-

штабов: от основного $T_0 = t$ и более медленных $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, $T_3 = \varepsilon^3 t$, то есть

$$\begin{aligned}\xi_n &= \xi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x); & \Phi_n &= \Phi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x, z); \\ \varphi_n &= \varphi_n(T_0, T_1, T_2, T_3, x, z).\end{aligned}$$

С учетом этого оператор дифференцирования по времени примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4). \quad (12)$$

Граничные условия на свободной поверхности жидкости разложим по амплитуде отклонения поверхности от равновесной плоской (по ε) в окрестности $z = 0$. Точнее говоря, все величины, входящие в условия (4) – (6) и зависящие от z , разложим в ряд Тэйлора в окрестности $z = 0$. Также разложим по степеням малого параметра величины $(\partial \xi / \partial t)$ и $(\partial^2 \xi / \partial x^2) / (1 + (\partial \xi / \partial x)^2)^{3/2}$. При разложении частных производных по времени $(\partial \xi / \partial t)$ и $(\partial \varphi / \partial t)$ будем учитывать выражение (12). Подставляя разложения (9) – (11) в (1), (2), (7), (8), собирая слагаемые при одинаковых степенях ε и приравнивая их к нулю, разобьем задачу на порядки малости от первого до четвертого.

5. Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned}z > 0: & \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0; \\ z < 0: & \quad \nabla^2 \varphi_1 = 0; \\ z = 0: & \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0; \quad -\rho g \xi_1 - \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0; \\ & \quad \Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \\ z \rightarrow \infty: & \quad \nabla \Phi_1 \rightarrow 0; \\ z \rightarrow -\infty: & \quad \nabla \varphi_1 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Решение задачи первого порядка малости легко получается классическими методами:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \zeta \cdot \exp(i\theta) + \frac{1}{2} \bar{\zeta} \cdot \exp(-i\theta);$$

$$\varphi_1 = -\frac{i\omega}{2k} \zeta \cdot \exp(kz) \cdot \exp(i\theta) + \frac{i\omega}{2k} \bar{\zeta} \cdot \exp(kz) \cdot \exp(-i\theta);$$

$$\Phi_1 = \frac{E_0}{2} \zeta \cdot \exp(-kz) \cdot \exp(i\theta) + \frac{E_0}{2} \bar{\zeta} \cdot \exp(-kz) \cdot \exp(-i\theta);$$

$$\omega^2 \equiv gk + \frac{\gamma k^3}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{4\pi\rho}; \quad \theta \equiv kx - \omega \cdot T_0.$$

Теперь можно сформулировать начальное условие, с которым будет проводиться дальнейшее рассмотрение. Примем, что все нелинейные поправки к профилю волны, получающемуся в первом порядке приближений (к функции $\zeta_l = \zeta_l(T_0, x)$), будут функциями аргумента $(m \cdot \theta)$, где целое число $m > 1$. Иными словами, примем, что амплитудные множители при возможных нелинейных поправках к профилю волны с аргументом $\theta = \theta$ равны нулю. Начальное условие такого вида использовалось ранее в [61 – 63] и выяснилось, что оно обеспечивает достаточно простой вид получающихся решений.

6. Математическая формулировка задачи второго порядка малости получится в виде

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0;$$

$$z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
& -\rho g \xi_2 - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_0} + \\
& + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2; \\
& \Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z};
\end{aligned}$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_2 \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_2 \rightarrow 0.$$

Решение сформулированной задачи легко находится:

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{k(2\pi(k^2\gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} (\zeta^2 \cdot \exp(2i\theta) + \bar{\zeta}^2 \cdot \exp(-2i\theta)); \\
\varphi_2 &= -\frac{i\omega k(6\pi k\gamma - E_0^2)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} (\zeta^2 \cdot \exp(2i\theta) - \bar{\zeta}^2 \cdot \exp(-2i\theta)) \cdot \exp(2kz); \\
\Phi_2 &= \frac{E_0 k}{2} \zeta \bar{\zeta} + \\
& + \frac{E_0 k(2\pi(-k^2\gamma + 2g\rho) - E_0^2 k)}{8\pi(\rho g - 2\gamma k^2)} (\zeta^2 \exp(2i\theta) + \bar{\zeta}^2 \exp(-2i\theta)) \cdot \exp(-2kz).
\end{aligned}$$

7. Математическая формулировка задачи третьего порядка малости имеет вид

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_3 = 0;$$

$$z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_3 = 0;$$

$$z = 0 : \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = \Omega_{31}; \quad \Phi_3 - E_0 \xi_3 = \Omega_{33};$$

$$- \rho g \xi_3 - \rho \frac{\partial \varphi_3}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial x^2} = \Omega_{32};$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_3 \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty : \quad \nabla \varphi_3 \rightarrow 0.$$

Выражения для функций неоднородностей Ω_{31} , Ω_{32} , Ω_{33} в правых частях граничных условий на свободной поверхности, определяющихся решениями первого и второго порядков малости, приведены в «Приложении А».

Решение неоднородной задачи можно получить после математически несложной, но громоздкой процедуры:

$$\xi_3 = X \cdot (\zeta^3 \cdot \exp(3i \cdot \theta) + \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i \cdot \theta));$$

$$X = \frac{k^2 (32\alpha^2 k^2 W^2 + 32\alpha k W (1 - \alpha^2 k^2 W) + 6\alpha^4 k^4 + 21\alpha^2 k^2 + 6)}{32(1 - 2\alpha^2 k^2)(1 - 3\alpha^2 k^2)};$$

$$\varphi_3 = Y_{31} \cdot \zeta \bar{\zeta} \cdot (i \cdot \zeta \cdot \exp(i \cdot \theta) - i \cdot \bar{\zeta} \cdot \exp(-i \cdot \theta)) \cdot \exp(kz) +$$

$$+ Y_{33} \cdot (i \cdot \zeta^3 \cdot \exp(3i \cdot \theta) - i \cdot \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i \cdot \theta)) \cdot \exp(3kz);$$

$$Y_{33} = -\frac{\alpha k^2 \omega (32\alpha k W^2 - 104\alpha^2 k^2 W - 8W + 78\alpha^3 k^3 + 15\alpha k)}{32(1-2\alpha^2 k^2)(1-3\alpha^2 k^2)};$$

$$Y_{31} = \frac{gk^2 (2\alpha k W (8\alpha k W - 12\alpha^2 k^2 - 9) + 14\alpha^4 k^4 + 25\alpha^2 k^2 + 2)}{32\omega(1-2\alpha^2 k^2)};$$

$$\Phi_3 = \Theta_{31} \cdot \zeta \bar{\zeta} \cdot (\zeta \cdot \exp(i\theta) + \bar{\zeta} \cdot \exp(-i\theta)) \cdot \exp(-kz) +$$

$$+ \Theta_{33} (\zeta^3 \cdot \exp(3i\theta) + \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i\theta)) \cdot \exp(-3kz);$$

$$\Theta_{33} = \frac{E_0 k^2 (8\alpha k W (4\alpha k W + 5\alpha^2 k^2 - 7) + 6\alpha^4 k^4 - 33\alpha^2 k^2 + 24)}{32(1-2\alpha^2 k^2)(1-3\alpha^2 k^2)};$$

$$\Theta_{31} = \frac{E_0 k^2 (4\alpha^2 k^2 + 7 - 12\alpha k W)}{16(1-2\alpha^2 k^2)}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\rho g\gamma}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},$$

где α — капиллярная постоянная жидкости; W — параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий устойчивость плоской однородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости [1 – 2].

Также в решении задачи третьего порядка малости как результат получена следующая зависимость амплитуды волны ζ от временных масштабов T_2 и T_3 :

$$\zeta = \zeta_1 \cdot \exp(i\beta_0) \cdot \exp(i\delta \cdot \zeta_1^2 \cdot T_2);$$

$$\delta = -\frac{g k^3 (\alpha^2 k^2 (1+2\alpha^2 k^2) + 8 - 16\alpha k W (1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W))}{16\omega(1 - 2\alpha^2 k^2)}.$$

Здесь ζ_1 и β_0 – функции, зависящие только от T_3 и определяемые из решения задач высших порядков малости.

8. Математическая формулировка задачи четвертого порядка малости имеет вид

$$z > 0: \quad \nabla^2 \Phi_4 = 0;$$

$$z < 0: \quad \nabla^2 \varphi_4 = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial T_0} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial z} = \Xi_{41};$$

$$-\rho g \xi_4 - \rho \frac{\partial \varphi_4}{\partial T_0} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_4}{\partial x^2} = \Xi_{42}; \quad \Phi_4 - E_0 \xi_4 = \Xi_{43};$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_4 \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla \varphi_4 \rightarrow 0.$$

Выражения для функций неоднородностей Ξ_{41} , Ξ_{42} и Ξ_{43} в правых частях граничных условий, определяющихся решениями задач первого, второго и третьего порядка малости, приведены в «Приложении В».

Результат решения задачи четвертого порядка малости при принятом начальном условии имеет вид

$$\xi_4 = \varphi_4 = \Phi_4 \equiv 0; \quad \zeta_1 = \frac{1}{k}; \quad \beta_0 = 0.$$

Таким образом, в решении всей задачи будут отсутствовать величины четвертого порядка малости.

9. Окончательные выражения для профиля нелинейной волны на однородно заряженной свободной поверхности жидкости, для потенциала поля скоростей и для потенциала электрического поля имеют вид

$$\xi = a \cdot \cos(\theta_*) + a^2 \cdot \Lambda \cdot \cos(2\theta_*) + 2a^3 \cdot X \cdot \cos 3\theta; \quad (13)$$

$$\varphi = a \frac{\omega}{k} \exp(kz) \cdot \sin(\theta_*) + a^2 \frac{\omega \alpha k (3\alpha k - 2W)}{2(1 - 2\alpha^2 k^2)} \exp(2kz) \cdot \sin(2\theta_*) +$$

$$+ a^3 (-2Y_{31} \cdot \exp(kz) \cdot \sin \theta - 2Y_{33} \cdot \exp(3kz) \cdot \sin 3\theta);$$

$$\Phi = -E_0 \cdot z + a \cdot E_0 \cdot \exp(-kz) \cdot \cos(\theta_*) +$$

$$+ a^2 \frac{E_0 k}{2} \left(1 + \frac{2 - \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W}{1 - 2\alpha^2 k^2} \exp(-2kz) \cdot \cos(2\theta_*) \right) +$$

$$+ a^3 \cdot (2\Theta_{31} \cdot \exp(-kz) \cdot \cos \theta + 2\Theta_{33} \cdot \exp(-3kz) \cdot \cos 3\theta);$$

$$\Lambda \equiv \frac{k(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{2(1 - 2\alpha^2 k^2)}; \quad \theta_* \equiv \theta + \delta \cdot a^2 \cdot t \equiv kx - \omega \cdot t + \delta \cdot a^2 t.$$

10. Из проведенного решения и выражения (13) для профиля волны видно, что о существовании стационарного во времени профиля волны конечной амплитуды можно говорить лишь ус-

ловно. Стационарный во времени профиль волны получится, если ограничить расчеты вторым порядком малости. В этом случае нелинейной добавки к частоте не будет и профиль волны определится первыми двумя слагаемыми (13) при $\delta = 0$ (при $\theta_* \equiv \theta$). В расчетах третьего порядка малости нелинейная по амплитуде добавка к частоте появляется в (13) в линейном по a слагаемом, а в квадратичном ее еще не будет. Следует отметить, что в работах по нелинейным волнам [61 – 63] нелинейные поправки к частотам, найденные в расчетах третьего порядка малости, включаются во все компоненты выражения, описывающего профиль, от линейной до кубической, что представляется некорректным. В самом деле, если в (13) в квадратичном по малому параметру слагаемом разложить косинус в окрестности θ по степеням малого параметра, то слагаемое, пропорциональное δ , будет иметь минимум четвертый порядок малости, приводить которое в расчетах третьего порядка некорректно. В выше проведенных расчетах четвертого порядка малости нелинейная поправка к частоте вполне законно появляется в квадратичном слагаемом, но в кубическом по малому параметру слагаемом фигурирует невозмущенный аргумент θ .

Сказанное означает, что в расчетах и третьего, и четвертого порядка малости фазовые скорости различных компонент профиля волны будут различны, что приведет к его деформации со временем. Остается надежда получить стационарный во времени профиль волны в расчетах следующего пятого порядка малости, если в этом приближении, так же как в расчетах четвертого порядка малости, нелинейная добавка к профилю волны окажется равной нулю. Но в этом случае нелинейную добавку к частоте можно будет на законном основании привести в поправке к амплитуде третьего порядка малости (в третьем слагаемом в (13)).

11. Полученное выражение для профиля нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости в пределе $W \rightarrow 0$ совпадает с известным (см. [61 – 63]) выражением для профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на незаряженной поверхности идеальной жидкости (с учетом выше сказанного о некорректности включения поправок к частотам в нелинейные по амплитуде слагаемые профиля). Из приведенных

выражений видно, что амплитудный коэффициент поправки второго порядка малости Λ резонансно нарастает при $k = k_2 \equiv 1/\alpha \cdot \sqrt{2}$. Амплитудный коэффициент поправки третьего порядка малости X имеет уже два резонанса: при $k = k_2$ и при $k = k_3 \equiv 1/\alpha \cdot \sqrt{3}$. В квадратичном приближении (когда имеется лишь один резонанс при $k = k_2$) при резонансном взаимодействии энергия перекачивается от длинных волн с волновыми числами $k = k_2$ к более коротким с волновыми числами $k = 2k_2$. Из (13) видно, что аналогичным будет и направление перекачки энергии в окрестности резонанса $k = k_3$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами $k = k_3$ к волнам с $k = 3k_3$, но сам эффект будет иметь более высокий порядок малости.

Из (13) также видно, что нелинейная добавка к частоте пропорциональна квадрату амплитуды волны a и отрицательна (в представляющей интерес в смысле исследования устойчивости заряженной поверхности жидкости области значений волновых чисел $k > k_2$), а сам эффект имеет третий порядок малости. Интересно, что нелинейная добавка к частоте, так же как и амплитудные множители Λ и X , имеет резонансный вид. Это означает ограниченную применимость выражения (13) в окрестности волновых чисел $k = k_2$ и $k = k_3$, поскольку как амплитудные множители, так и добавка к частоте должны быть лишь малыми поправками к величинам первого порядка малости.

Учтем теперь, что критические условия реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля определяются условиями прохождения через ноль квадрата частоты виртуальной волны и равенством нулю первой производной от частоты по волновому числу (из последнего условия определяется волновое число капиллярной волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости) [1]. При расчетах в линейном приближении критическое значение параметра Тонкса-Френкеля $W = W_*$ и волнового числа $k = k_*$ получаются в виде [1]

$$k_* = \alpha^{-1}; \quad W = k_* \alpha + k_*^{-1} \alpha^{-1} = 2.$$

В рассматриваемой нелинейной ситуации система алгебраических уравнений относительно W и k получается весьма громоздкой, но, поскольку нас интересует лишь оценка по порядку величины, представим искомые значения параметра Тонкса-Френкеля и волнового числа в виде разложений по квадрату амплитуды волны в виде:

$$W \approx 2 - w \cdot \epsilon^2; \quad k\alpha \approx 1 - \kappa \cdot \epsilon^2.$$

Подставляя такие разложения в систему уравнений для определения критических условий неустойчивости, легко найти $w = 11/8$ и $\kappa = 23/16$.

Таким образом, нелинейный анализ показывает, что критическая для реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой моды снижаются по сравнению с предсказываемыми линейной теорией.

Напомним также, что расчеты в четвертом порядке малости по амплитуде волны показывают, что в нелинейной добавке к частоте отсутствует слагаемое, пропорциональное третьей степени амплитуды. Будет ли отлична от нуля добавка к частоте, пропорциональная четвертой степени амплитуды, можно будет узнать при расчетах пятого порядка малости. Такие расчеты желательно провести, чтобы выяснить дальнейшие тенденции изменения нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости.

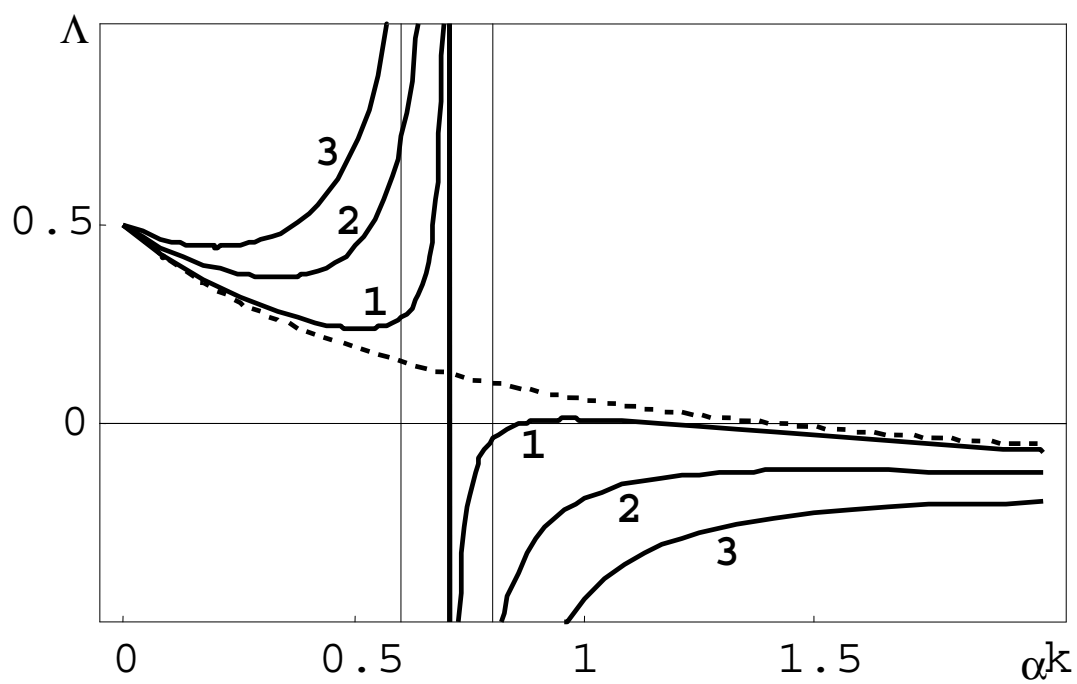
12. Дальнейший анализ выражения (13) ограничим первыми двумя слагаемыми, образующими в использованном приближении не изменяющийся во времени профиль волны конечной амплитуды.

Как отмечалось выше, амплитудный коэффициент Λ в слагаемом второго порядка малости имеет резонансный вид: при $k = k_2$ знаменатель выражения для Λ обращается в нуль, а сама добавка стремится к бесконечности. Этот феномен для нелинейных волн на незаряженной поверхности жидкости исследован [61]. В отличие от случая незаряженной поверхности жидкости выражение для Λ в (13) содержит в числителе параметр W , входящий в него с отрицательным знаком и характеризующий

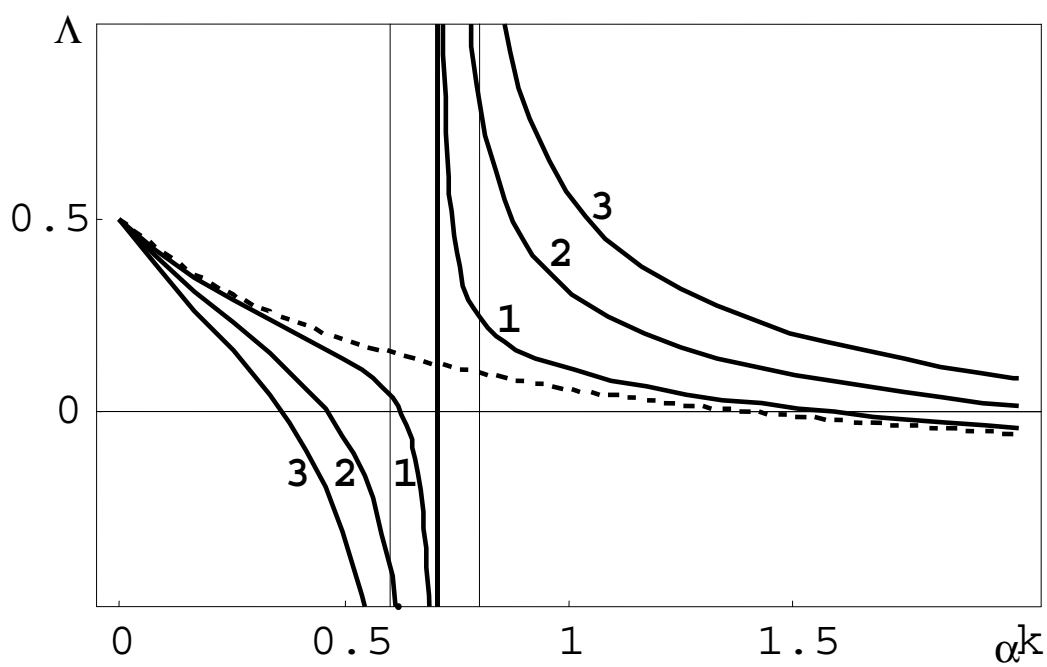
устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля собственного заряда. Сказанное означает, что при определенных соотношениях физических параметров Λ может остаться конечным даже при равном нулю знаменателе. Знаменатель Λ обращается в нуль при $k \rightarrow k_2$, но если одновременно устремить $W \rightarrow W_\times = (3/2\sqrt{2}) \approx 1.06$, то при таком предельном переходе числитель Λ также будет стремиться к нулю. В итоге при $W = W_\times$ в пределе $k \rightarrow k_2$ для величины Λ получается неопределенность типа $0/0$, которая при вычислении по правилу Лопиталя дает $\Lambda = 1/8$. Сама зависимость $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$ становится непрерывной. Она приведена пунктирной линией на рис. 1, где показаны зависимости безразмерного множителя Λ от безразмерного волнового числа αk при различных значениях W .

Отметим, что независимо от величины W при приближении k к значению k_2 разложение (13) становится непригодным для представления решения, т.к. величина квадратичной по безразмерной амплитуде a добавки становится значительно больше линейного по a члена разложения. В этой связи интересно оценить влияние вязкости, играющей важную роль в резонансных явлениях. Проделаем это на примере воды.

Как будет показано в следующей главе, на незаряженной поверхности вязкой жидкости для воды влияние вязкости на профиль волны существенно на интервале $\alpha k \in D \equiv (0.6; 0.7)$. На концах этого интервала амплитуда добавки второго порядка малости, оцененная без учета вязкости, оказывается завышенной на несколько процентов своей величины, но при $k \rightarrow k_2$ это завышение становится бесконечным. Вне указанного интервала модели вязкой и невязкой воды дают хорошо согласующиеся результаты. В этой связи ниже следующий анализ проводится для волн, у которых $\alpha k \notin D$. Части зависимостей, которые на рис. 1 попадают внутрь области D , лишены физического смысла, т.к. они построены в области несовершенства исходной модели, подразумевающей отсутствие вязкости.



a)



b)

Рис. 1. Зависимости безразмерного амплитудного множителя $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$ от безразмерного параметра W :

a – $W = W_x - 0,05$ (1); $W = W_x - 0,25$ (2); $W = W_x - 0,5$ (3);

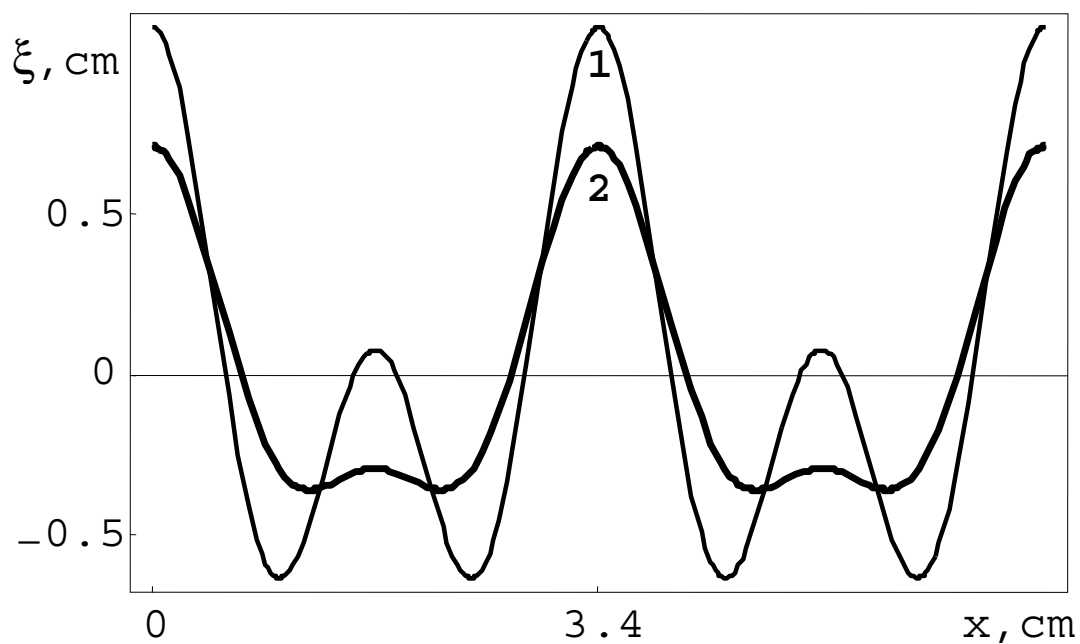
b – $W = W_x + 0,05$ (1); $W = W_x + 0,25$ (2); $W = W_x + 0,5$ (3);

Из рис. 1 видно, что физически достоверные части зависимостей $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$ в пределе $W \rightarrow W_\chi$ стремятся к зависимости $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$. Значение $W = W_\chi$ естественно принять за критерий разделения волновых движений. При таком W знак асимптотического значения Λ в пределе $k \rightarrow k_2$ на рассмотренных зависимостях меняется на противоположный. Видно также, что добавка второго порядка малости к линейной части решения стремится к нулю при $W \rightarrow W_\chi$.

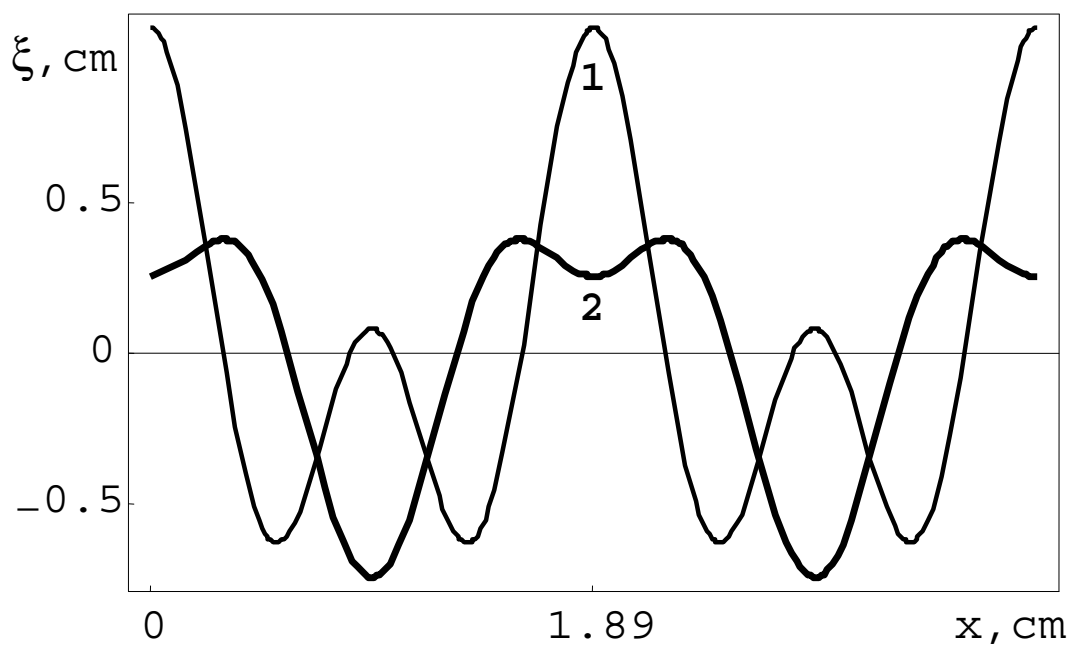
На рис. 1a показано семейство зависимостей $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$, построенных при различных значениях $W \leq W_\chi$. В этой области значений W амплитуда добавки второго порядка малости при изменении волнового числа ведет себя так же, как и для незаряженной поверхности: для волнового движения характерны профили с заостренной вершиной у длинных волн с $k < k_2$ и с притупленной вершиной у коротких волн с $k > k_2$. Это наглядно продемонстрировано на рис. 2 (см. подробнее в [61 – 63]).

На рис. 1b изображены зависимости $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$, рассчитанные при различных значениях параметра W из диапазона $W_\chi \leq W \leq 2$. Несложно видеть, что приведенные зависимости в некотором смысле обратны изображенным на рис. 1a: правые физически достоверные части этих зависимостей, отвечающие коротким волнам, положительны в достаточно протяженной правой окрестности точки $k = k_2$, а не отрицательны, как на рис. 1a (ветвь 1 уходит в область отрицательных значений на достаточно большом расстоянии от $k = k_2$). Поэтому нелинейные волны, соответствующие этим зависимостям естественно интерпретировать в качестве нового, ранее неизвестного, типа периодического волнового движения на поверхности идеальной жидкости, появление которого связано с наличием поверхностного заряда. Профили таких волн приведены на рис. 3 в сравнении с профилями волн на незаряженной поверхности жидкости. Несложно видеть, что профили капиллярно-гравитационных волн на заряженной и незаряженной поверхности жидкости различаются существенным образом. Обнаруженные волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости уместно назвать электро-капиллярно-гравитационными, или просто электрокапил-

лярными, пренебрегая слабым в рассматриваемом диапазоне волновых чисел влиянием поля сил тяжести.

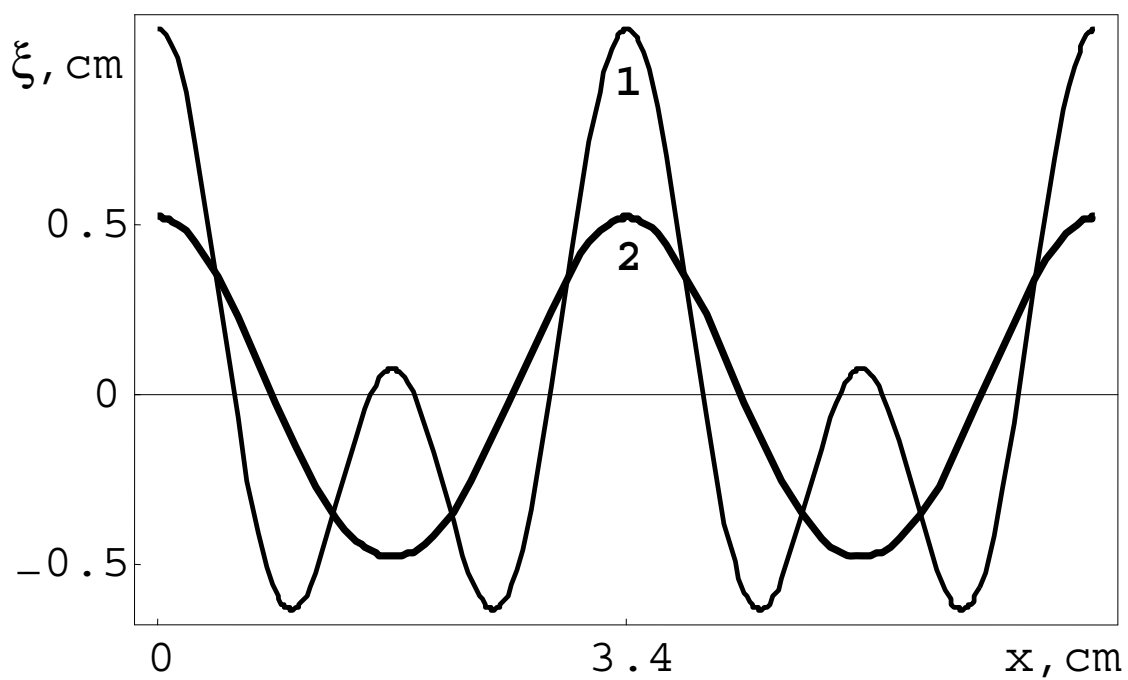


a)

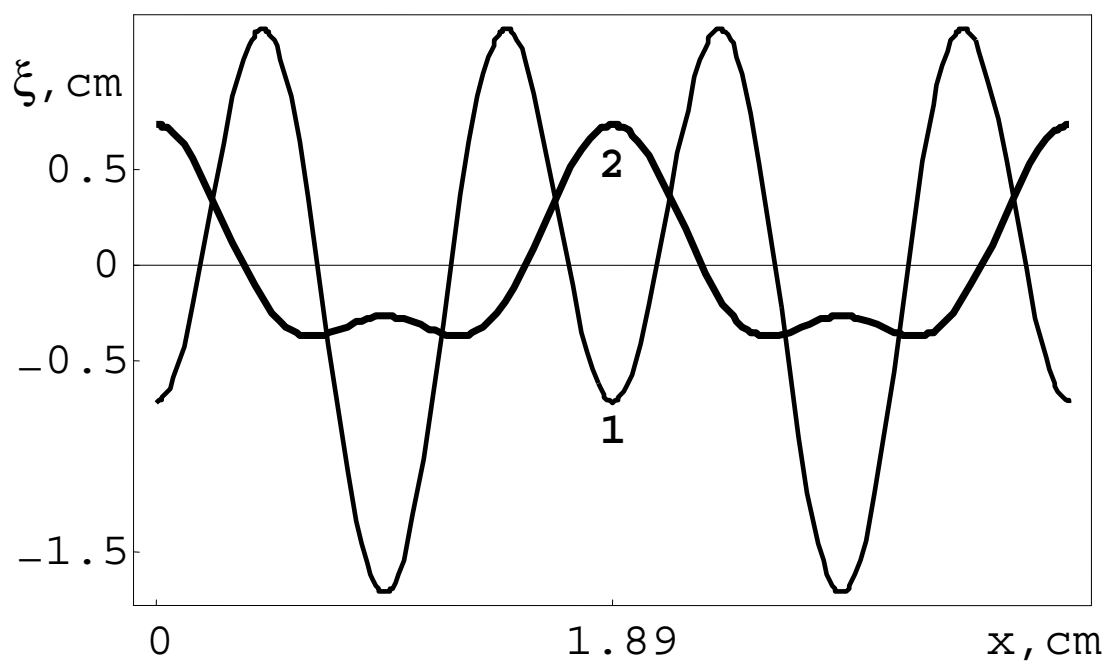


b)

Рис. 2. Профили волн на воде, рассчитанные по формуле (13) при $W = 0; 0,8$ (линии 1,2) для $\alpha k = 0,5$ (2a) и $\alpha k = 0,9$ (2b)



a)



b)

Рис. 3. Профили волн на воде, рассчитанные по формуле (13) при $W = 0$; 1,2(линии 1,2) для $\alpha k = 0,5$ (3a) и $\alpha k = 0,9$ (3b)

13. Заключение. При решении задачи о расчете профиля бегущей периодической капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной идеальной несжимаемой электропроводной жидкости выяснилось, что в асимптотических расчетах более высокого порядка малости, чем второй, получающиеся профили волн не являются стационарными, а расплываются из-за того, что фазовые скорости поправок различных порядков малости к профилю волны различны.

Нелинейная, зависящая от квадрата амплитуды поправка к частоте волны появляется в расчетах третьего порядка малости, имеет резонансный вид и приводит к возникновению нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Критическая для реализации неустойчивости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны снижаются в использованном в расчетах четвертом порядке малости пропорционально квадрату амплитуды волны.

Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости качественно отличаются от нелинейного волнового движения на незаряженной поверхности. Кривизна вершин электрокапиллярных волн увеличивается с ростом поверхностной плотности заряда (с ростом параметра W) при $W_{\times} < W \rightarrow 2$. При $W \rightarrow W_{\times}$ электрический заряд оказывается фактором, уменьшающим эффективность нелинейного взаимодействия, поскольку при этом добавка второго порядка малости стремится к нулю.

14. Приложение А.

$$\Omega_{31} \equiv \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x} -$$

$$- \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{32} \equiv & \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_2} + \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_1} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_0} + \\
& + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_0} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^2 \partial T_0} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \\
& + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \\
& + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z}; \\
\Omega_{33} \equiv & -\xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения решения задач первого и второго порядков малости, получим

$$\begin{aligned}
\Omega_{31} \equiv & - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial T_2} + \Psi_{31} \zeta^2 \cdot \bar{\zeta} \right) \exp(i\theta) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial T_2} - \Psi_{31} \zeta \cdot \bar{\zeta}^2 \right) \exp(-i\theta) - \\
& - \Psi_{33} \cdot \zeta^3 \cdot \exp(3i\theta) + \Psi_{33} \cdot \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i\theta);
\end{aligned}$$

$$\Psi_{31} = \frac{ik^2 \omega (\pi(8k^2 \gamma + 5g\rho) - 3E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)}; \quad \Psi_{32} = \frac{k(2\pi(k^2 \gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{4\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\Psi_{33} = \frac{9ik^2 \omega (\pi(4k^2 \gamma + g\rho) - E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\Omega_{32} \equiv -K_{33} (\zeta^3 \cdot \exp(3i\theta) + \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i\theta)) -$$

$$-\left(\frac{i\rho\omega}{2k} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial T_2} + K_{31} \zeta^2 \bar{\zeta} \right) \exp(i\theta) + \left(\frac{i\rho\omega}{2k} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial T_2} - K_{31} \bar{\zeta} \zeta^2 \right) \exp(-i\theta);$$

$$K_{31} = \frac{k^2}{32\pi^2 (\rho g - 2\gamma k^2)} (E_0^4 k^2 - 4\pi E_0^2 \gamma k^3 + 12\pi^2 \gamma^2 k^4 -$$

$$- 4\pi E_0^2 k g \rho + 24\pi^2 \gamma k^2 g \rho - 6\pi^2 g^2 \rho^2);$$

$$K_{33} = \frac{k^2}{32\pi^2 (\rho g - 2\gamma k^2)} (5E_0^4 k^2 - 20\pi E_0^2 \gamma k^3 + 60\pi^2 \gamma^2 k^4 -$$

$$- 20\pi E_0^2 k g \rho + 48\pi^2 \gamma k^2 g \rho + 6\pi^2 g^2 \rho^2);$$

$$\begin{aligned}\Omega_{33} \equiv & M_{31} \cdot \zeta^2 \cdot \bar{\zeta} \exp(i\theta) + M_{31} \cdot \zeta \cdot \bar{\zeta}^2 \cdot \exp(-i\theta) + \\ & + M_{33} \cdot \zeta^3 \cdot \exp(3i\theta) + M_{33} \cdot \bar{\zeta}^3 \cdot \exp(-3i\theta); \end{aligned}$$

$$M_{31} = \frac{E_0 k^2 (\pi(4k^2 \gamma + 7g\rho) - 3E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)}; \quad M_{33} = \frac{3E_0 k^2 (3\pi g\rho - E_0^2 k)}{16\pi(\rho g - 2\gamma k^2)}.$$

15. Приложение В.

Функции неоднородностей в правых частях граничных условий на свободной поверхности жидкости при $z = 0$ задачи четвертого порядка малости имеют вид:

$$\begin{aligned}\Xi_{41} = & \xi_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^3} + \\ & + \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z^4} - \frac{\partial \xi_1}{\partial T_3} - \frac{\partial \xi_2}{\partial T_2} - \frac{\partial \xi_3}{\partial T_1} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \\ & - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2}; \\ \Xi_{42} = & 3\gamma \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{3\gamma}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial T_3} + \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial T_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \frac{\partial \varphi_3}{\partial T_1} + \rho \xi_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_2} + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_1} + \rho \xi_1 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_1} + \rho \xi_3 \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z \partial T_0} \\
& + \rho \xi_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial T_0} + \rho \xi_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z \partial T_0} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_1 \partial z^2} \right)^2 + \rho \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^2} + \\
& + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \cdot \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial T_0 \partial z^2} + \frac{\rho}{6} \xi_1^3 \cdot \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial T_0 \partial z^3} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \rho \xi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \\
& + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right)^2 + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial z^3} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \\
& + \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \rho \xi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 + \rho \xi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \\
& + \frac{\rho}{2} \xi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x \partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_3 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \\
& - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)^2 + \\
& + \frac{E_0}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} - \\
& - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} + \frac{E_0}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial z^3} + \frac{E_0}{24\pi} \xi_1^3 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial z^4} - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \xi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} - \\
& -\frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} - \frac{1}{8\pi} \xi_1^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial z^2}; \\
\Xi_{43} = & -\xi_3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \xi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \xi_1 \cdot \xi_2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \xi_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{6} \xi_1^3 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3}.
\end{aligned}$$

Подставляя сюда решения первого и второго порядков, получим

$$\begin{aligned}
\Xi_{41} = & A_{410} - \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial T_3} \exp(i\theta) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial T_3} \exp(-i\theta) + A_{412} \exp(2i\theta) + \\
& + A_{412} \exp(-2i\theta) + A_{413} \exp(3i\theta) + A_{413} \exp(-3i\theta) + A_{414} \exp(4i\theta) + \\
& + A_{414} \exp(-4i\theta); \\
\Xi_{42} = & A_{420} - \frac{i\rho\omega}{2k} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial T_3} \cdot \exp(i\theta) + \frac{i\rho\omega}{2k} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial T_3} \cdot \exp(-i\theta) + A_{422} \exp(2i\theta) + \\
& + A_{422} \exp(-2i\theta) + A_{423} \exp(3i\theta) + A_{423} \exp(-3i\theta) + A_{424} \exp(4i\theta) + \\
& + A_{424} \exp(-4i\theta);
\end{aligned}$$

$$\Xi_{43} = A_{430} + A_{432} \exp(2i\theta) + A_{432} \exp(-2i\theta) + A_{433} \exp(3i\theta) +$$

$$+ A_{433} \exp(-3i\theta) + A_{434} \exp(2i\theta) + A_{4344} \exp(-4i\theta);$$

где $A_{410}, A_{412}, A_{413}, A_{414}, A_{420}, A_{422}, A_{423}, A_{424}, A_{420}, A_{422}, A_{423}, A_{424}$ – некоторые функции временных масштабов T_1, T_2, T_3 .

2.2. Нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности электропроводной жидкости

1. В предыдущем параграфе была построена математическая модель распространения нелинейных волн по поверхности идеальной электропроводной жидкости и решена задача определения профиля капиллярно-гравитационной волны методом разных масштабов в четвертом приближении по малому параметру, равному отношению амплитуды волны к ее длине. Наиболее интересный результат этой главы – выражение для нелинейной поправки к частоте волнового движения. Оно содержит лишь слагаемое, пропорциональное квадрату безразмерной амплитуды волны. Другие слагаемые, пропорциональные первой степени и кубу амплитуды, как оказалось, равны нулю. Квадратичная по амплитуде поправка к частоте такова, что минимальное значение поверхностной плотности заряда, необходимое для реализации неустойчивости, и волновое число наиболее неустойчивой волны в расчетах четвертого порядка малости снижаются с ростом амплитуды волны. В данной главе проверяется характер влияния на критические условия реализации неустойчивости поправки к частоте, имеющей четвертый порядок малости по амплитуде волны.

2. В результате решения задачи (1)–(8) предыдущего параграфа методом многих масштабов в пятом порядке малости по амплитуде волны можно найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде

$$\xi = a \cdot \cos[kx - (\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4) \cdot t] + a^2 \cdot \Lambda \cdot \cos[2kx - 2(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] +$$

$$\begin{aligned}
& + 2a^3 \cdot X \cdot \cos[3kx - 3(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] + \\
& + a^4 \cdot (Z_1 \cdot \cos[2(kx - \omega t)] + Z_2 \cdot \cos[4(kx - \omega t)]); \\
\delta_4 = & \frac{gk^5}{512 \omega (1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W) (1 - 2\alpha^2 k^2)^3 (1 - 3\alpha^2 k^2)} \times \\
& \times (256 - 2368\alpha k W + 788\alpha^2 k^2 + 8704\alpha^2 k^2 W^2 - 5188\alpha^3 k^3 W - 15616\alpha^3 k^3 W^3 + \\
& + 229\alpha^4 k^4 + 11040\alpha^4 k^4 W^2 + 13056\alpha^4 k^4 W^4 + 942\alpha^5 k^5 W - 2432\alpha^5 k^5 W^3 - \\
& - 4096\alpha^5 k^5 W^5 - 377\alpha^6 k^6 - 18528\alpha^6 k^6 W^2 - 9984\alpha^6 k^6 W^4 + 11948\alpha^7 k^7 W + \\
& + 31232\alpha^7 k^7 W^3 + 6144\alpha^7 k^7 W^5 - 2218\alpha^8 k^8 - 22400\alpha^8 k^8 W^2 - 13824\alpha^8 k^8 W^4 + \\
& + 6056\alpha^9 k^9 W + 7680\alpha^9 k^9 W^3 - 1148\alpha^{10} k^{10} + 1920\alpha^{10} k^{10} W^2 - 1968\alpha^{11} k^{11} W + 24\alpha^{12} k^{12}); \\
Z_1 = & \frac{k^3}{48 (1 - 2\alpha^2 k^2)^3 (1 - 3\alpha^2 k^2)} (34 - 164\alpha k W - 33\alpha^2 k^2 + \\
& + 336\alpha^2 k^2 W^2 - 52\alpha^3 k^3 W - 192\alpha^3 k^3 W^3 + 171\alpha^4 k^4 - 240\alpha^4 k^4 W^2 + \\
& + 124\alpha^5 k^5 W + 192\alpha^5 k^5 W^3 - 134\alpha^6 k^6 - 24\alpha^7 k^7 W - 48\alpha^8 k^8); \\
Z_2 = & \frac{k^3 (1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{48 (1 - 2\alpha^2 k^2)^2 (1 - 3\alpha^2 k^2) (1 - 4\alpha^2 k^2)} (16 - 128\alpha k W + 77\alpha^2 k^2 + \\
& + 128\alpha^2 k^2 W^2 + 160\alpha^3 k^3 W - 248\alpha^4 k^4 - 288\alpha^4 k^4 W^2 + 288\alpha^5 k^5 W - 12\alpha^6 k^6),
\end{aligned}$$

где α – капиллярная постоянная жидкости, а W – параметр Тонкса–Френкеля.

Приведенное выражение функции $\xi = \xi(x, t)$, которая описывает форму нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости с точностью до величин третьего по-

рядка малости совпадает в пределе $W \rightarrow 0$ (то есть $\sigma \rightarrow 0$) с известным [61 – 63] выражением для формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности идеальной жидкости.

Амплитудный множитель поправки второго порядка малости Λ нарастает резонансно при $k \approx k_2 = 1/(\alpha \cdot 2^{1/2})$, а множитель поправки третьего порядка малости X – при $k \approx k_2$ и $k \approx k_3 = 1/(\alpha \cdot 3^{1/2})$. Амплитудный множитель поправки четвертого порядка малости Z_2 имеет три резонанса – при $k \approx k_2$, при $k \approx k_3$ и при $k \approx k_4 = 1/(\alpha \cdot 4^{1/2})$. В квадратичном приближении по амплитуде волны (когда есть только одно резонансное волновое число $k = k_2$) при резонансном взаимодействии происходит перекачка энергии от длинных волн с волновыми числами $k \approx k_2$ к более коротким с $k \approx 2k_2$. Из выражения для $\xi = \xi(x, t)$ легко видеть, что аналогичные эффекты будут иметь место при $k \approx k_3$ и при $k \approx k_4$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами $k \approx k_3$ к волнам с $k \approx 3k_3$, но данный эффект будет иметь более высокий порядок малости. Также будет происходить перекачка энергии от волн с $k \approx k_4$ к волнам с $k \approx 4k_4$, а сам эффект будет иметь еще более высокий порядок малости.

Несложно заметить, что добавка к частоте $\sim \delta_2$ содержит квадрат амплитуды, а добавка $\sim \delta_4$ содержит амплитуду в четвертой степени. На рис. 1 – 2 приведены расчетные зависимости поправок δ_2 и δ_4 от величины параметра Тонкса–Френкеля W и безразмерного волнового числа $x \equiv \alpha k$. Эффект влияния этих поправок к частотам имеет соответственно третий и пятый порядок малости (это можно показать разложением $a \cdot \cos[(\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4) \cdot t]$ по степеням $a^2 \delta_2$ или $a^4 \delta_4$).

Нелинейные поправки к частоте, а также амплитудные множители Λ , X , Z_1 , Z_2 имеют резонансный вид (имеют в знаменателях множители, обращающиеся при определенных значениях волнового числа в нуль). Сказанное означает, что выписанное выражение имеет ограниченную применимость для $\xi = \xi(x, t)$ в окрестности волновых чисел $k = k_2$, $k = k_3$, $k = k_4$, так как амплитудные множители добавок к частоте δ_2 и δ_4 и амплитудные коэффициенты Λ , X , Z_1 , Z_2 должны быть порядка $O(1)$.

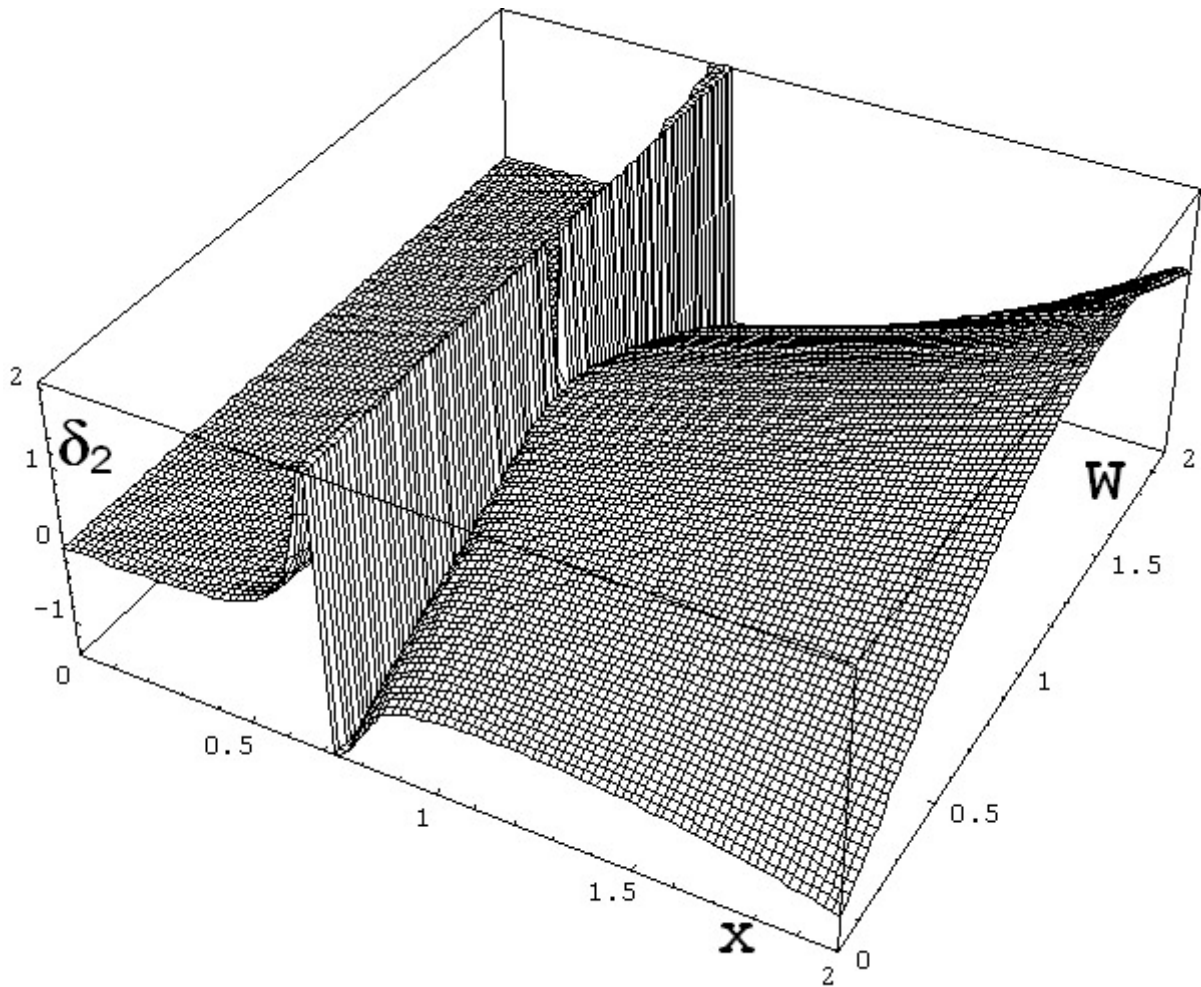


Рис. 1. Зависимость безразмерного множителя при поправке к частоте второго порядка малости δ_2 от параметров $x \equiv \alpha k$ ($0 \leq x \leq 2$) и W ($0 \leq W \leq 2$)

Частота основной волны задается выражением $(\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4)$. Критические условия реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду определяются двумя соотношениями: равенством нулю квадрата частоты $\Omega^2 \equiv (\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4)^2 \alpha / g$ виртуальной волны и равенством нулю производной от частоты Ω по волновому числу. Из первого соотношения определяется критическое значение параметра Тонкса–Френкеля W_* , а из второго – волновое число наиболее неустойчивой волны k_* . Как было показано ранее [1], в рамках линейной модели критические значения W_* и k_* определяются равенствами:

$$W_* = \alpha k_* + \frac{1}{\alpha k_*}; \quad k_* = \frac{1}{\alpha}.$$

В решаемой нелинейной задаче искомые критические для реализации неустойчивости значения параметра Тонкса-Френкеля и волнового числа представим в виде разложений

$$W_* \approx 2 - w_2 k^2 a^2 - w_4 k^4 a^4; \quad (\alpha k)_* \approx 1 - h_2 k^2 a^2 - h_4 k^4 a^4.$$

Подставив данные разложения в уравнения для критических условий реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля, нетрудно получить, что $w_2 = 11/8$, $w_4 = 135/32$, $h_2 = 23/16$, $h_4 = 7489/512$.

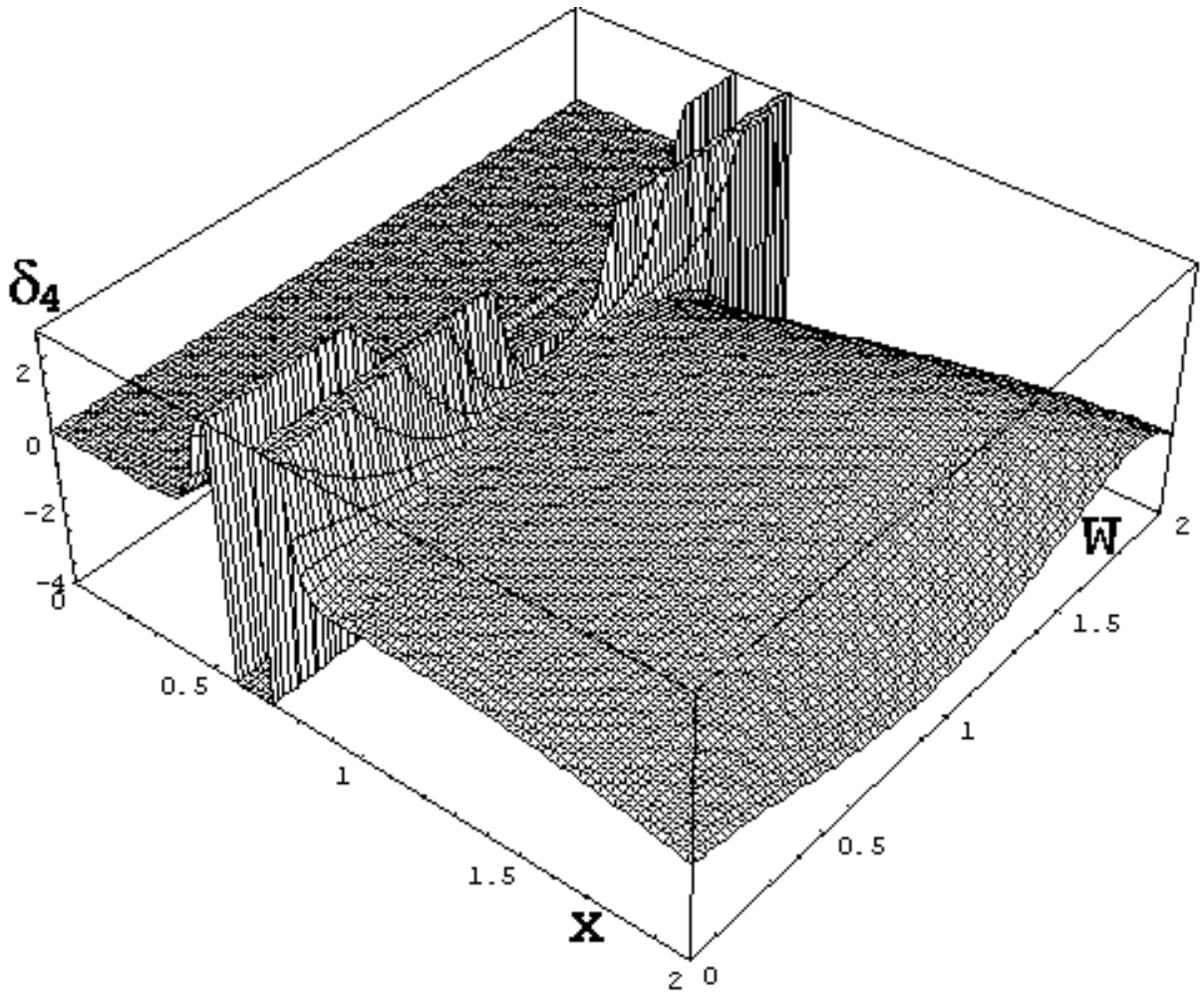


Рис. 2. Зависимость безразмерного множителя при поправке к частоте четвертого порядка малости δ_4 от параметров $x \equiv \alpha k$ ($0 \leq x \leq 2$) и W ($0 \leq W \leq 2$)

Как видно из этой и предыдущей глав, критическая для реализации неустойчивости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой по Тонксу-Френкелю капиллярной волны снижаются по сравнению с предсказываемыми линейной теорией. Поправки как второго, так и четвертого порядков малости по амплитуде волны к критическому значению параметра Тонкса-Френкеля W_* и к волновому числу с наибольшим инкрементом неустойчивости k_* отрицательны.

3. Заключение. В рамках нелинейной модели поправки к частоте плоской капиллярно-гравитационной волны, бегущей по однородно заряженной свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, зависят от квадрата амплитуды и ее четвертой степени и имеют резонансный вид. Критические для реализации неустойчивости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны в нелинейном приближении снижаются. Более того, выявляется тенденция более быстрого уменьшения этих критических значений с ростом амплитуды волны.

2.3. Нелинейный анализ временной эволюции неустойчивой заряженной плоской свободной поверхности жидкости

1. Исследование физических закономерностей реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзоры [98 – 106] и цитируемую там литературу). Большая часть проведенных к настоящему времени теоретических исследований выполнена в линейном приближении по амплитуде деформации плоской поверхности жидкости, и лишь недавно появились работы, отражающие его нелинейную суть [107 – 109]. Но, несмотря на значительный интерес к этому феномену и длительную историю его изучения, многое в нем остается непонятным. В частности, практически не исследованным остается вопрос о закономерностях формирования «конусов Тейлора» – выступов на заряженной поверхности жидкости, образующихся на

нелинейной стадии реализации ее неустойчивости, с вершин которых идет сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных капелек. Качественная модель формирования таких выступов предложена еще в [2]. В [109 – 111] обсуждаются попытки их численного расчета. Но никто не пытался оценить характерное время формирования «конусов Тейлора» от момента начала реализации неустойчивости заряженной жидкой поверхности. Инкремент неустойчивости в качестве характеристики времени роста выступа не подходит, поскольку описывает его рост лишь на линейной (начальной) его стадии, пока высота (амплитуда) выступа много меньше его поперечного линейного размера, тогда как «конус Тейлора» является существенно нелинейным образованием. Вопросу расчета характерного времени формирования «конусов Тейлора» и посвящено настоящее рассмотрение, которое будет проведено по схеме, использованной ранее при анализе нелинейных стадий развития сильно заряженной капли [112 – 113] и незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле большой величины [114].

2. Пусть идеальная, идеально проводящая несжимаемая жидкость, имеющая плотность ρ , заполняет в поле сил тяжести ($\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$) полупространство $z \leq 0$ в декартовой системе координат (за \vec{n}_z обозначен орт оси z), а ее невозмущенная волновым движением равновесная плоская поверхность (совпадающая с плоскостью XOY) граничит с вакуумом, подвержена действию сил поверхностного натяжения с коэффициентом γ и несет однородно распределенный электрический заряд плотностью σ . Вследствие теплового движения молекул жидкости на ее свободной поверхности возбуждаются капиллярные волны весьма малой амплитуды так, что форма свободной поверхности определится соотношением $z = \xi(x, t)$. Математическая постановка задачи о расчете нелинейных капиллярно-гравитационных волн на свободной однородно заряженной поверхности жидкости имеет вид

$$z > \xi: \quad \Delta\Phi = 0; \quad z \leq \xi: \quad \Delta\varphi = 0;$$

$$z = \xi: \quad p = p_0 - \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$p + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi \rightarrow -E_0 \vec{e}_z;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \nabla\varphi \rightarrow 0,$$

где $\varphi(\vec{r}, t)$ – потенциал поля скоростей течения жидкости; $\Phi(\vec{r}, t)$ – потенциал электростатического поля над жидкостью; $p(\vec{r}, t)$ – поле давлений в жидкости.

В задаче должны быть сформулированы также и начальные условия. Решение нелинейных задач с произвольными, наперед заданными начальными условиями вызывает большие математические трудности. Поэтому целесообразно определить начальное условие таким образом, чтобы результат решения задачи имел как можно более простой вид. В качестве такого условия предполагается, что капиллярно-гравитационная волна на поверхности жидкости является бегущей синусоидальной волной в первом приближении по малой амплитуде волны, то есть профиль ее выглядит следующим образом:

$$\xi = a \cdot \cos(kx - \omega t) + O(a^2),$$

где a и ω – амплитуда и частота волны, k – волновое число. Амплитуду волны будем считать малой по сравнению с капиллярной постоянной жидкости $\alpha = \sqrt{\gamma/\rho g}$ так, что отношение (a/α) для нижеследующего асимптотического анализа естественно выбрать в качестве малого параметра. Кроме того, предполагается, что все добавки к профилю волны второго и более высоких порядков малости, пропорциональные $\cos(kx - \omega t)$, которые могут появиться в силу нелинейности задачи, равны нулю.

В нулевом приближении по малому параметру (a/α) свободная поверхность жидкости находится в невозмущенном состоянии и описывается уравнением $z = 0$, жидкость покоится, а электрическое поле однородно во всем пространстве:

$$\xi_0 \equiv 0; \quad \nabla \varphi_0 \equiv 0; \quad \nabla \Phi_0 \equiv -E_0 \vec{e}_z; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi}.$$

Подставляя эти выражения в исходные уравнения, получим

$$\Phi_0 \equiv -E_0 z.$$

Неизвестными функциями в сформулированной задаче являются возмущение свободной поверхности ξ , потенциал поля скоростей φ и электрический потенциал Φ . Искать их будем в виде разложений по малому параметру:

$$\xi = \left(\frac{a}{\alpha}\right) \xi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \xi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \xi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \xi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\Phi = -E_0 z + \left(\frac{a}{\alpha}\right) \Phi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \Phi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \Phi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \Phi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\varphi = \left(\frac{a}{\alpha}\right) \varphi_1 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2 \varphi_2 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \varphi_3 + \left(\frac{a}{\alpha}\right)^4 \varphi_4 + O\left(\frac{a}{\alpha}\right)^5;$$

$$\xi_n \sim O(1); \quad \Phi_n \sim O(1); \quad \varphi_n \sim O(1).$$

3. Решая сформулированную задачу методом многих масштабов в безразмерных переменных, в которых $g = \gamma = \rho = 1$ (следовательно, и капиллярная постоянная жидкости также равна единице: $\alpha=1$), в пятом порядке малости по амплитуде волны можно найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде (за всеми переменными оставлены прежние обозначения, а малый параметр обозначается просто a)

$$\begin{aligned} \xi = & a \cdot \cos[kx - (\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4) \cdot t] + a^2 \cdot X_{22} \cdot \cos[2kx - 2(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] + \\ & + a^3 \cdot X_{33} \cdot \cos[3kx - 3(\omega + a^2 \delta_2) \cdot t] + \end{aligned}$$

$$+ a^4 \cdot (X_{42} \cdot \cos[2(kx - \omega t)] + X_{44} \cdot \cos[4(kx - \omega t)]) + a^5 X_5 \cos[5(kx - \omega t)]; \quad (1)$$

$$\omega^2 = k (1 + k^2 - k W); \quad W = 4\pi \sigma^2;$$

$$\delta_2 = \frac{k^3 (16k^2 W^2 - 16k^3 W + 2k^4 - 16kW + k^2 + 8)}{16 \omega (1 - 2k^2)};$$

$$\delta_4 = \frac{k^5}{512 \omega (1 + k^2 - k W) (1 - 2k^2)^3 (1 - 3k^2)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (256 - 2368 k W + 788 k^2 + 8704 k^2 W^2 - 5188 k^3 W - 15616 k^3 W^3 + \\ & + 229 k^4 + 11040 k^4 W^2 + 13056 k^4 W^4 + 942 k^5 W - 2432 k^5 W^3 - \\ & - 4096 k^5 W^5 - 377 k^6 - 18528 k^6 W^2 - 9984 k^6 W^4 + 11948 k^7 W + \\ & + 31232 k^7 W^3 + 6144 k^7 W^5 - 2218 k^8 - 22400 k^8 W^2 - 13824 k^8 W^4 + \\ & + 6056 k^9 W + 7680 k^9 W^3 - 1148 k^{10} + 1920 k^{10} W^2 - 1968 k^{11} W + 24 k^{12}); \end{aligned}$$

$$X_{22} = \frac{k (1 + k^2 - 2 k W)}{2 (1 - 2k^2)};$$

$$X_{33} = \frac{k^2 (6 - 32 k W + 21k^2 + 32k^2 W^2 - 32k^3 W + 6k^4)}{16 (1 - 2k^2) (1 - 3k^2)};$$

$$X_{42} = \frac{k^3}{48 (1 - 2k^2)^3 (1 - 3k^2)} (34 - 164 k W - 33k^2 +$$

$$+ 336k^2W^2 - 52k^3W - 192k^3W^3 + 171k^4 - 240k^4W^2 +$$

$$+ 124k^5W + 192k^5W^3 - 134k^6 - 24k^7W - 48k^8);$$

$$X_{44} = \frac{k^3 (1 + k^2 - 2kW)}{48(1 - 2k^2)^2(1 - 3k^2)(1 - 4k^2)} (16 - 128kW + 77k^2 +$$

$$+ 128k^2W^2 + 160k^3W - 248k^4 - 288k^4W^2 + 288k^5W - 12k^6);$$

где W – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Выражение для X_5 не приводится ввиду его громоздкости и незначительного влияния на профиль результирующей волны.

Выражение для формы нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости (1) с точностью до величин третьего порядка малости совпадает в пределе $W \rightarrow 0$ (то есть при $\sigma \rightarrow 0$) с известным [61 – 62] выражением для формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности идеальной жидкости.

Из (1) видно, что амплитудный множитель поправки второго порядка малости X_{22} нарастает резонансно при $k = k_2 = 1/(\cdot 2^{1/2})$, а множитель поправки третьего порядка малости X_{33} – при $k = k_2$ и $k = k_3 = 1/(\cdot 3^{1/2})$. Амплитудный множитель поправки четвертого порядка малости X_{44} имеет три резонанса – при $k = k_2$, при $k = k_3$ и при $k = k_4 = 1/(\cdot 4^{1/2})$. В квадратичном приближении по амплитуде волны (когда есть только одно резонансное волновое число $k = k_2$) при резонансном взаимодействии происходит перекачка энергии от длинных волн с волновыми числами $k = k_2$ к более коротким с $k = 2k_2$. Из выражения (1) легко видеть, что кроме указанного резонанса в третьем порядке малости аналогичный эффект будет иметь место при $k = k_3$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами $k = k_3$ к более коротким волнам с $k = 3k_3$. В четвертом порядке малости кроме указанных будет иметь место и резонанс при $k = k_4$: перекачка энергии будет происходить от волн с $k = k_4$ к волнам с $k = 4k_4$.

Видно также, что поправка к частоте $\sim \delta_2$ содержит квадрат амплитуды, а поправка $\sim \delta_4$ содержит амплитуду в четвертой степени. Эффект влияния этих поправок к частотам имеет соответственно третий и пятый порядок малости (это можно показать разложением $a \cdot \cos[(\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4) \cdot t]$ по степеням $a^2 \delta_2$ и $a^4 \delta_4$).

Нелинейные поправки к частоте так же, как и амплитудные множители X_{22} , X_{33} , X_{42} , X_{44} , имеют резонансный вид (имеют в знаменателях множители, обращающиеся при определенных значениях волнового числа в нуль). Сказанное означает ограниченную применимость выражения (1) в окрестности волновых чисел $k = k_2$, $k = k_3$, $k = k_4$, так как амплитудные множители добавок к частоте δ_2 и δ_4 и амплитудные коэффициенты X_{22} , X_{33} , X_{42} , X_{44} должны быть порядка $O(1)$.

Частота основной волны задается выражением $(\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4)$. Критические условия реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду определяются двумя соотношениями: равенством нулю квадрата частоты $Z^2 = (\omega + a^2 \delta_2 + a^4 \delta_4)^2$ виртуальной волны и равенством нулю производной от частоты Z по волновому числу. Из первого соотношения определяется критическое значение параметра Тонкса–Френкеля W_* , а из второго – волновое число наиболее неустойчивой волны k_* [1]. В рамках линейной модели критические значения W_* и k_* определяются равенствами

$$W_* = k_* + k_*^{-1}; \quad k_* = 1. \quad (2)$$

В решаемой нелинейной задаче будем искать нелинейные поправки к критическому для реализации неустойчивости значению параметра Тонкса–Френкеля W , полагая, что условия (2) выполнены и неустойчивость претерпевает волна с $k=1$, для этого представим W в виде разложения

$$W_* \approx 2 - w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4. \quad (3)$$

Подставив данное разложение в уравнение $Z^2 = 0$, путем последовательных приближений нетрудно получить, что $w_2 = 11/10$, $w_4 = 51/160$. Таким образом, оказывается, что критическое для реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности

идеальной жидкости значение параметра W зависит от амплитуды виртуальной волны, с потери устойчивости которой начинается неустойчивость Тонкса-Френкеля. В условиях натурального эксперимента на свободной поверхности жидкости существует бесконечный спектр капиллярных волн с размерной амплитудой порядка $\sqrt{\kappa T/\gamma}$, (κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура жидкости), порождаемых тепловым движением молекул жидкости. Эти волны и исполняют функцию виртуальных волн [1]. Несложно видеть, что амплитуда таких волн для подавляющего большинства реальных жидкостей при разумных (в смысле возможности существования жидкости) температурах будет иметь величину около половины ангстрема, а в принятых безразмерных переменных $\sim 10^{-8}$. Для целей определения условий реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости столь малая амплитуда волны означает, что критические условия неустойчивости полностью определяются линейной теорией: $k_* = 1$; $W_* = 2$. Влияние же нелинейных поправок (см. (3)) проявится в увеличении скорости нарастания амплитуды, которая будет зависеть от самой амплитуды. Подробное обсуждение этого феномена проведено в нижеследующем рассмотрении.

4. Примем, что в начальный момент времени (при $t=0$) у свободной однородно заряженной поверхности жидкости величина параметра W равна критическому значению, предсказываемому линейной теорией, $W=2$, тогда согласно линейной же теории квадрат частоты волны с $k=1$ и амплитудой, как угодно мало отличающейся от нуля, обратится в нуль [1]:

$$\omega^2 = k \cdot (1 + k^2 - k W) . \quad (4)$$

Это обстоятельство само по себе еще не обеспечивает начала реализации неустойчивости волны, поскольку инкремент неустойчивости такой волны, определяемый линейной теорией, будет равен нулю, т.к. в линейной теории дисперсионное уравнение не содержит амплитуды волны и все его компоненты имеют нулевой порядок малости. Проведенный же выше нелинейный анализ показывает, что критическое значение параметра W зависит от амплитуды волны и уменьшается с ее ростом согласно (3). Сказанное означает, что имеющееся у поверхности жидкости электриче-

ское поле (характеризуемое параметром W) будет закритическим и для волны любой, как угодно малой амплитуды, величина инкремента неустойчивости будет отлична от нуля. Степень закритичности параметра W определится разностью между $W_* \approx 2 - w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4$ и $W=2$. Другими словами, квадрат частоты волны определится соотношением

$$\omega^2 \approx -w_2 \cdot a^2 + w_4 \cdot a^4, \quad (5)$$

т.е. волна станет неустойчивой с инкрементом χ , определяющимся согласно (5) выражением $\chi = a\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a^2)}$. Если учесть теперь, что амплитуда неустойчивой волны увеличивается со временем, то из этого соотношения получим инкремент неустойчивости как функцию увеличивающейся со временем амплитуды $a(t)$:

$$\chi = a(t)\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}. \quad (6)$$

Подчеркнем, что в проведенных рассуждениях результат нелинейного анализа (соотношение (3)) используется для получения аналитического выражения линейной характеристики временной эволюции неустойчивой волны – инкремента.

Из (6) видно, что поскольку амплитуда волны является функцией времени, то и инкремент неустойчивости также будет функцией времени: $\chi = \chi(t)$. Сказанное означает, что амплитуда волны будет увеличиваться со временем по закону

$$a(t) = a_0 \cdot \exp(\chi \cdot t) = a_0 \cdot \exp[a(t)\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot t], \quad (7)$$

т. е. существенно быстрее, чем по экспоненциальному закону, и, следовательно, быстро выйдет за рамки применимости использованных при получении (7) разложений по малому параметру.

Чтобы получить закон роста со временем амплитуды волны, пригодный при любых ее величинах, рассмотрим последовательность значений амплитуды a через интервалы времени Δt_i , ($i=1, 2, 3, 4...$), в течение каждого из которых выражение (7) можно считать хорошо работающим. Отметим, что (7) справедливо лишь для линейной связи между скоростью роста амплитуды волны da/dt с амплитудой $a(t)$. Величину интервала Δt_i будем оп-

ределять из условия, чтобы приращение инкремента на этом интервале $\chi_i - \chi_{i-1}$ было много меньше величины инкремента в конце предыдущего интервала времени $\Delta\chi \equiv \chi_i - \chi_{i-1} \ll \chi_{i-1}$. Тогда в пределах интервала времени Δt_i величину χ_i можно считать неизменной и пользоваться для подсчета прироста амплитуды Δa_i соотношением (7).

Пусть волна с $k=1$ при $W=2$ претерпела неустойчивость и ее амплитуда начала увеличиваться с инкрементом $\chi_1 = a_0 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}$. За время Δt_1 амплитуда начальной виртуальной волны $a_0 = \sqrt{\kappa T}$ вырастет до $a_1 = a_0 \cdot \exp(\chi_1 \cdot \Delta t_1)$. Это приведет согласно (6) к росту величины инкремента до $\chi_2 = a_1 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_1^2)}$, и в следующий интервал времени Δt_2 амплитуда будет расти с таким инкрементом и вырастет до $a_2 = a_1 \cdot \exp(\chi_2 \cdot \Delta t_2)$. В конце интервала времени Δt_2 инкремент вырастет до $\chi_3 = a_2 \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_2^2)}$. На следующем интервале времени Δt_3 амплитуда будет расти по закону $a_3 = a_2 \cdot \exp(\chi_3 \cdot \Delta t_3)$.

Таким образом, для i -го интервала времени Δt_i получим

$$a_i = a_{i-1} \cdot \exp(\chi_i \cdot \Delta t_i). \quad (8)$$

Подставим в (8) выражение для a_{i-1} , которое в свою очередь выразится через a_{i-2} , через a_{i-3} , и т.д. до a_0 . В итоге вместо (8) будем иметь

$$a_i = a_0 \cdot \exp \left[\sum_{m=1}^i (\chi_m \cdot \Delta t_m) \right].$$

Переходя в этом выражении к пределу $\Delta t_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, получим

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left[\int_0^t \chi(t) \cdot dt \right].$$

В это выражение подставим соотношение (6), определяющее зависимость величины инкремента от амплитуды:

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left[\int_0^t a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt \right]. \quad (9)$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение относительно изменяющейся со временем амплитуды волны $a(t)$. Для отыскания решения уравнения (9) прологарифмируем его

$$\ln(a(t)/a_0) = \int_0^t a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt$$

и продифференцируем получившееся выражение по t

$$\frac{da(t)}{a(t) \cdot dt} = a(t) \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{da}{a^2 \cdot \sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a^2)}} = dt.$$

После интегрирования найдем

$$\frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0} - \frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}}{w_2 \cdot a(t)} = t$$

или

$$a(t) = \left(\sqrt{w_2 \left(\frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0} - t \right)^2 + \frac{w_4}{w_2}} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Из выражения (10) видно, что характерное время развития неустойчивости τ (характерное время нелинейного нарастания амплитуды), которое определим условием достижения выражением (10) максимального значения, имеет вид

$$\tau = \frac{\sqrt{(w_2 - w_4 \cdot a_0^2)}}{w_2 \cdot a_0}. \quad (11)$$

Если рассматривать развитие во времени неустойчивости виртуальной волны, начиная от тепловой амплитуды при $W=2$, то, согласно сказанному выше, характерное время нарастания амплитуды оказывается очень большим: в использованных безразмерных переменных $\sim 10^8$, а в размерных переменных, например для воды, граничащей с вакуумом, это время будет $\approx 2.5 \cdot 10^4$ с, т.е. около семи часов (характерный масштаб обезразмеривания времени есть $\sqrt{\rho \cdot g^3 / \gamma}$, т.е. $\tau \equiv t \cdot \sqrt{\rho \cdot g^3 / \gamma}$). Для других жидкостей или комбинаций жидких сред в зависимости от коэффициента межфазного натяжения, плотностей сред и температуры это время может несколько изменяться, сохраняя порядок величины, поскольку именно перечисленные физические величины влияют на величину тепловой амплитуды виртуальных волн и на величину параметров обезразмеривания. Сказанное качественно согласуется с экспериментальными наблюдениями Тейлора [3], который отмечал, что длительность линейной стадии подготовки неустойчивости во много раз превышает длительность нелинейной стадии, в течение которой амплитуда эмиссионного выступа на заряженной поверхности жидкости (известного под названием «конуса Тейлора») быстро нарастает. Тем не менее в экспериментах [5, 115] о факте длительной задержки реализации неустойчивости не сообщается, хотя на него сложно не обратить внимание. Это наталкивает на мысль о том, что в указанных экспериментах развитие неустойчивости имело место с виртуальной волны, амплитуда которой существенно больше, чем амплитуда волны, генерированной тепловым движением молекул жидкости.

На рис. 1 приведены временные зависимости амплитуд нелинейно нарастающих волн, рассчитанные при различных начальных амплитудах, много бóльших тепловой. Кроме уже упомянутой длительной задержки реализации неустойчивости, бросается в глаза, что амплитуда нелинейно растущей волны с течением времени проходит через максимум и начинает уменьшаться. Величина амплитуды нелинейной волны в максимуме не зависит от начальной амплитуды, но определяется отношением коэффициентов при нелинейных поправках второго и четвертого порядков малости. Этот эффект связан с наличием поправки четвертого порядка малости по амплитуде к критическому значению параметра Тонкса-Френкеля, имеющей противоположный знак по

сравнению с поправкой второго порядка (см. (3)). Если провести все изложенные рассуждения, ограничившись лишь поправкой второго порядка малости по амплитуде, то отмеченное на рис. 1 ограничение амплитуды не имеет места, а амплитуда растет до бесконечности. По всей видимости, данное обстоятельство связано просто с ограниченной применимостью полученных соотношений, т. е. с выходом за пределы равномерной пригодности разложения (3). Максимум на кривых наблюдается, когда с ростом амплитуды поправка четвертого порядка малости сравнивается с поправкой второго порядка, и при больших значениях времени именно поправка четвертого порядка малости определяет затухание амплитуды.

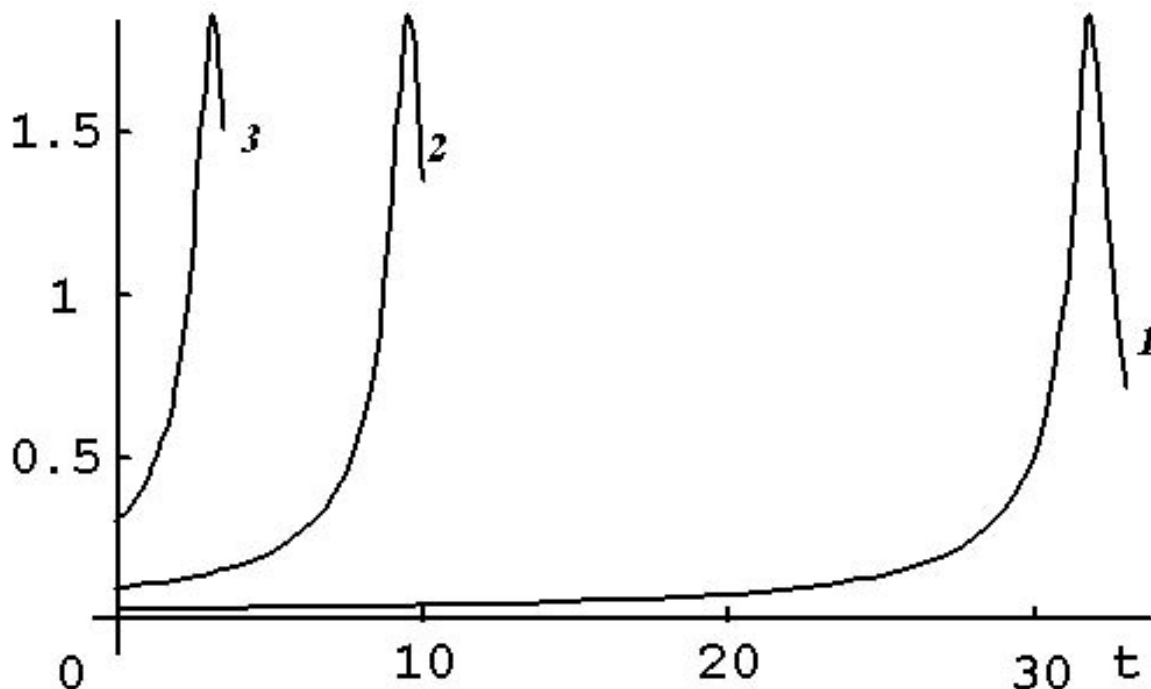


Рис. 1. Зависимости безразмерных амплитуд нелинейно растущих волн с безразмерным волновым числом $k=1$ при $W=2$ от безразмерного времени, рассчитанные по (64) для различных начальных амплитуд:

1) $a_0 = 0.03$; 2) $a_0 = 0.1$; 3) $a_0 = 0.3$

5. Еще одним фактором, обеспечивающим быстрое нарастание амплитуды неустойчивой волны, является степень закритичности напряженности электростатического поля (величины плотности поверхностного заряда σ), прикладываемого к невозмущенной поверхности жидкости. Отметим, что в экспериментах

обычно определяются критические условия реализации неустойчивости, которые для хорошо проводящих жидкостей определяются соотношениями (2). Термин «хорошо проводящие жидкости» в реальности означает, что время максвелловской релаксации электрического заряда должно быть много меньше характерного времени реализации неустойчивости, так чтобы электрический потенциал поверхности жидкости выравнивался быстрее, чем происходит ее деформация. В подавляющем большинстве реализованных в экспериментах ситуаций [3, 115] последнее требование выполнялось, но вот полученные критические условия неустойчивости отличаются от (2) и зависят от условий проведения экспериментов (например, в [115] критические условия реализации неустойчивости зависят от характерного времени нарастания у поверхности жидкости напряжения электрического поля). Это позволяет предположить, что в экспериментах [3, 115] напряженности электрического поля несколько превышали критическое значение $W_* = 2$, и, следовательно, величина инкремента неустойчивости виртуальной волны определялась двумя факторами: степенью закритичности параметра W и нелинейными поправками (3). В этой связи повторим рассуждения, аналогичные проведенным в п. 4 настоящего рассмотрения, учитывая вклад в инкремент, обусловленный тем, что параметр Тонкса-Френкеля W превышает W_* на величину ΔW . В результате величина инкремента неустойчивости плоской заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости вместо (6) будет определяться соотношением

$$\chi = \sqrt{\Delta W + a(t)^2 (w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)}.$$

Для отыскания зависимости амплитуды неустойчивой волны от времени получим вместо (9) нелинейное интегральное уравнение

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left[\int_0^t \sqrt{\Delta W + a(t)^2 (w_2 - w_4 \cdot a(t)^2)} \cdot dt \right],$$

имеющее решение

$$a(t) = \sqrt{\frac{4 \cdot \Delta W \cdot F(t)}{1 + (w_2^2 + 4 \cdot \Delta W \cdot w_4) \cdot F(t)^2 - 2 \cdot w_2 \cdot F(t)}}; \quad (12)$$

$$F(t) = \frac{a_0^2 \cdot \exp(\sqrt{\Delta W} \cdot t)}{2 \cdot \Delta W + w_2 \cdot a_0^2 + 2\sqrt{\Delta W} \cdot (\Delta W + w_2 \cdot a_0^2 - w_4 \cdot a_0^4)}.$$

На рис. 2 приведены зависимости амплитуды нелинейно нарастающей волны от времени, рассчитанные по (12) при различных значениях степени закритичности $\Delta W = W - W_*$ параметра Тонкса-Френкеля и при тепловой начальной амплитуде виртуальных волн $a_0 = 10^{-8}$. Несложно видеть, что в качественном отношении кривые, приведенные на рис. 2, аналогичны кривым, приведенным на рис. 1. Разница лишь количественная: согласно сказанному выше характерное время реализации неустойчивости при $\Delta W = 0$ и $a_0 = 10^{-8}$ было очень велико $t \sim 10^8$, а при достаточно больших закритичностях $\Delta W \neq 0$ и $a_0 = 10^{-8}$ характерное безразмерное время реализации неустойчивости может быть весьма кратковременным $t \sim 10 \div 100$, т.е. хорошо согласуется с описаниями экспериментов [3, 115]. Однако остается актуальным вопрос о точности измерений напряженности электрического поля в [3, 115], поскольку есть основание полагать, что эксперименты [3, 115] были проведены при превышении параметром W критического значения на некоторую величину ΔW . Из рис. 2 видно, что величина закритичности ΔW при ее изменении в диапазоне от единиц до ста процентов от W_* достаточно слабо сказывается на наблюдаемой феноменологии явления (на величине времени реализации неустойчивости). Иначе говоря, экспериментальное измерение критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности электропроводной жидкости только тогда может считаться выполненным корректно, когда характерное время реализации неустойчивости составляет величину $\approx 2.5 \cdot 10^4 s$, т.е. когда причиной неустойчивости при $W = W_* = 2$ являются виртуальные волны тепловой природы. Только в таком случае имеет смысл говорить об измерении истинно критической напряженности поля и можно надеяться, что неустойчивость претерпела волна с $k = \alpha^{-1}$, как и следует из теории [1].

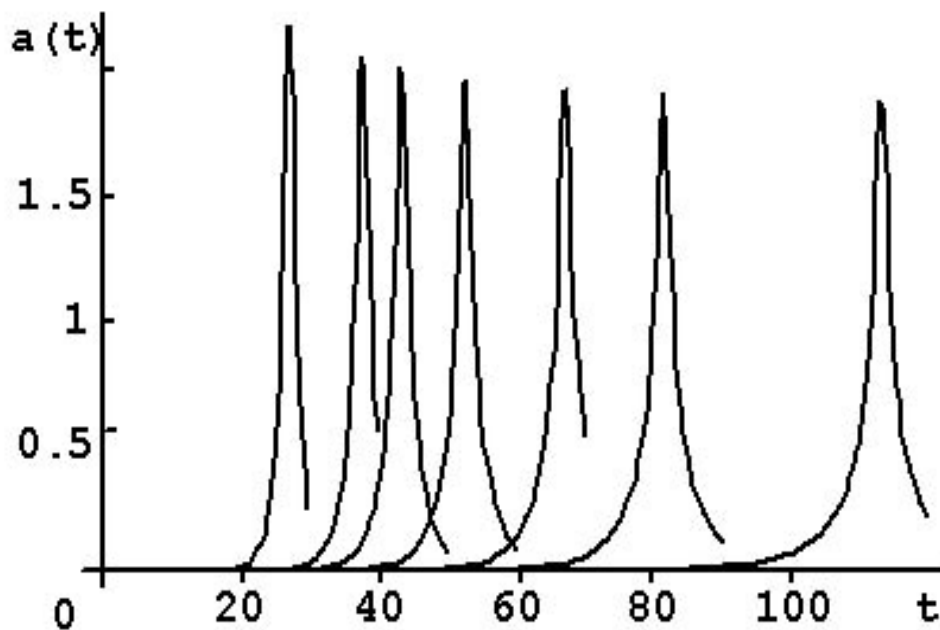


Рис. 2. Зависимости безразмерных амплитуд нелинейно растущих волн при $W=2+\Delta W$ с безразмерным волновым числом $k=1$ и безразмерной начальной амплитудой $a_0=10^{-8}$ от безразмерного времени, рассчитанные по (68) при различных значениях начальной закритичности параметра Тонкса-Френкеля ΔW : 1) $\Delta W=0.1$; 2) $\Delta W=0.2$; 3) $\Delta W=0.3$; 4) $\Delta W=0.5$; 5) $\Delta W=0.75$; 6) $\Delta W=1$; 7) $\Delta W=2$

Подчеркнем, что так же, как и на рис. 1, кривые, приведенные на рис. 2, имеют смысл лишь в диапазоне амплитуд $a(t) < 1$, поскольку при больших значениях $a(t)$ теряет равномерность разложение (3), положенное в основу проведенных рассуждений. Тем не менее наличие максимумов на кривых $a = a(t)$ позволяет качественно исследовать зависимость характерного времени реализации неустойчивости τ от величины закритичности ΔW и величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 . Для этого примем во внимание, что кривые $a(t)$ растут весьма круто и положение максимумов кривых можно принять в качестве адекватной оценки характерного времени развития неустойчивости. Учтем теперь, что в положении максимума кривых $a = a(t)$ произ-

водная $da(t)/dt$ обращается в нуль и из этого условия найдем зависимость $\tau = \tau(a_0, \Delta W)$ характерного времени реализации неустойчивости τ от интересующих нас физических характеристик процесса: величины закритичности ΔW параметра Тонкса-Френкеля и величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 :

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{1}{2\sqrt{\Delta W}} \ln \{ -[(w_2 \cdot a_0^2 + 2\Delta W) \cdot (16 \cdot \Delta W \cdot w_2 \cdot a_0^2 + 16 \cdot (\Delta W)^2 + \\ & + a_0^4 \cdot (w_2^2 - 12 \cdot w_4 \cdot \Delta W)) + 2\sqrt{\Delta W} \cdot \sqrt{w_2 \cdot a_0^2 + \Delta W - w_4 \cdot a_0^4} \times \\ & \times (16 \cdot \Delta W \cdot w_2 \cdot a_0^2 + 16 \cdot (\Delta W)^2 + a_0^4 \cdot (3 \cdot w_2^2 - 4 \cdot w_4 \cdot \Delta W))] / [2 \cdot a_0^4 \cdot \sqrt{\Delta W} \times \\ & \times \sqrt{w_2 \cdot a_0^2 + \Delta W - w_4 \cdot a_0^4} \cdot (-w_2^2 - 4 \cdot w_4 \cdot \Delta W) - \\ & - a_0^4 \cdot (w_2 \cdot a_0^2 + 2 \cdot \Delta W) \cdot (w_2^2 + 4 \cdot w_4 \cdot \Delta W)] \} . \end{aligned}$$

Графики зависимости $\tau = \tau(\Delta W)$ при $a_0 = const$, рассчитанные по полученному выражению, приведены для различных диапазонов изменения степени закритичности ΔW на рис. 3а – с. Зависимость $\tau = \tau(a_0)$ будет более содержательна, если рассчитать ее при $\Delta W = 0$, однако полученная зависимость $\tau = \tau(a_0, \Delta W)$ при $\Delta W \rightarrow 0$ расходится. Поэтому искомую функциональную связь найдем, приравняв к нулю производную по времени от амплитуды $a(t)$, определенной выражением (10), полученным именно для ситуации $\Delta W = 0$:

$$\tau(a_0) = \frac{\sqrt{w_2 - w_4 \cdot a_0^2}}{w_2 \cdot a_0} ,$$

что совпадает с (11). Эта зависимость проиллюстрирована на рис. 4. Несложно видеть, что при $W = 2$, ($\Delta W = 0$) зависимость характерного времени реализации неустойчивости заряженной пло-

ской поверхности жидкости $\tau = \tau(a_0)$ в широком диапазоне изменения начальной амплитуды $10^{-8} \leq a_0 \ll 1$ мало отличается от чисто гиперболической: $\tau \approx 1/(a_0 \cdot \sqrt{w_2})$.

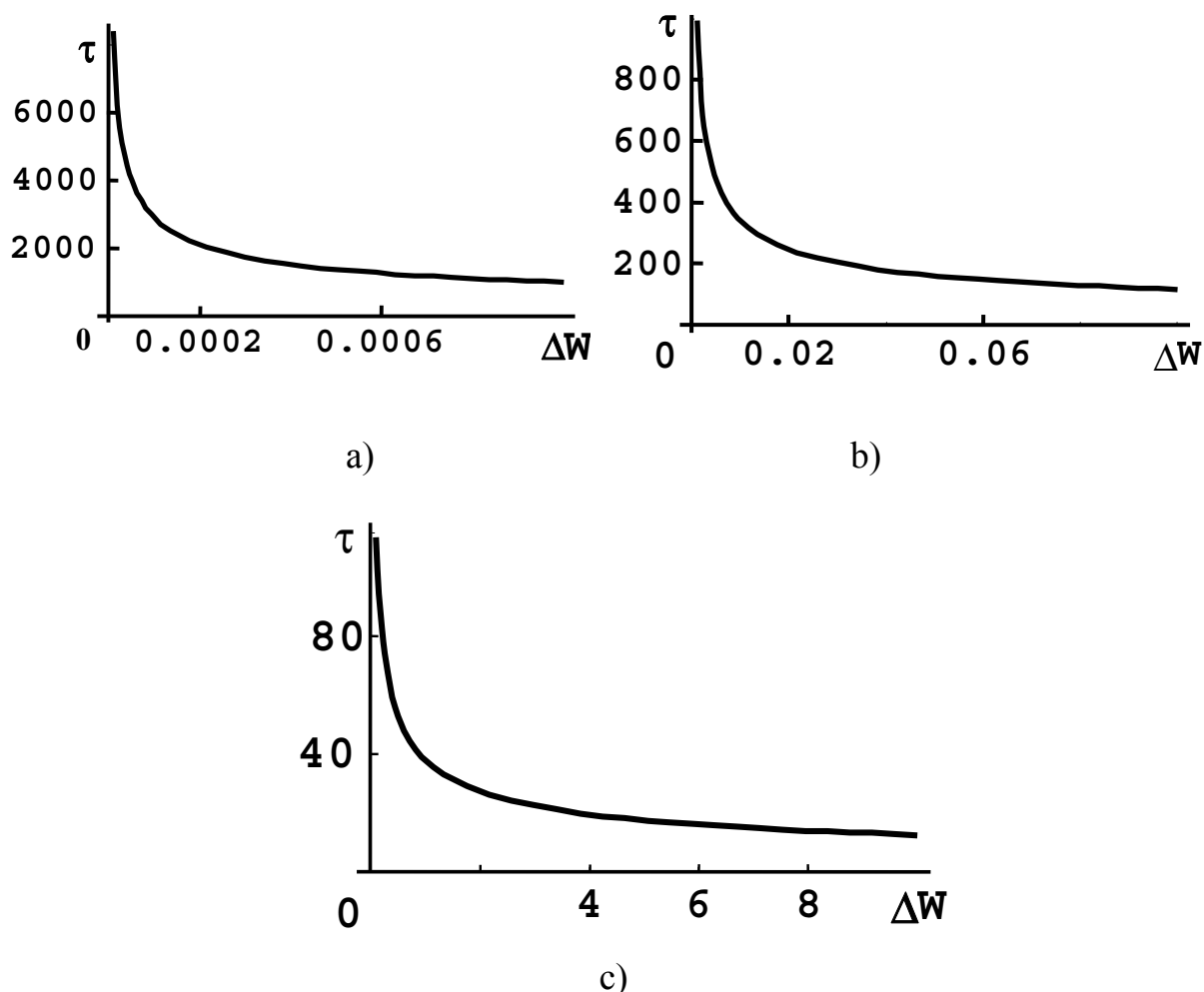


Рис. 3. Зависимости безразмерного времени развития неустойчивости τ от величины начальной закритичности ΔW параметра Тонкса-Френкеля, рассчитанные для волны с $k=1$, $a_0 = 10^{-8}$ при изменении ΔW в различных диапазонах величины:
а) $10^{-5} \leq \Delta W \leq 10^{-3}$; б) $10^{-3} \leq \Delta W \leq 10^{-1}$; в) $10^{-1} \leq \Delta W \leq 10$

Зависимости $\tau = \tau(\Delta W)$ и $\tau = \tau(a_0)$ наглядно подтверждают сделанные выше на основании косвенных оценок выводы, что характерное время реализации неустойчивости может быть достаточно малым (меньше секунды) только при начальных амплитудах, существенно (на четыре порядка) превышающих тепловую амплитуду, или при закритичностях $\Delta W \geq 10^{-4}$. На это обстоятель-

ство необходимо обращать внимание в будущих экспериментальных проверках критических условий неустойчивости Тонкса-Френкеля и аккуратно измерять в экспериментах физическую величину, на которую раньше никто не обращал внимания, – время реализации неустойчивости.

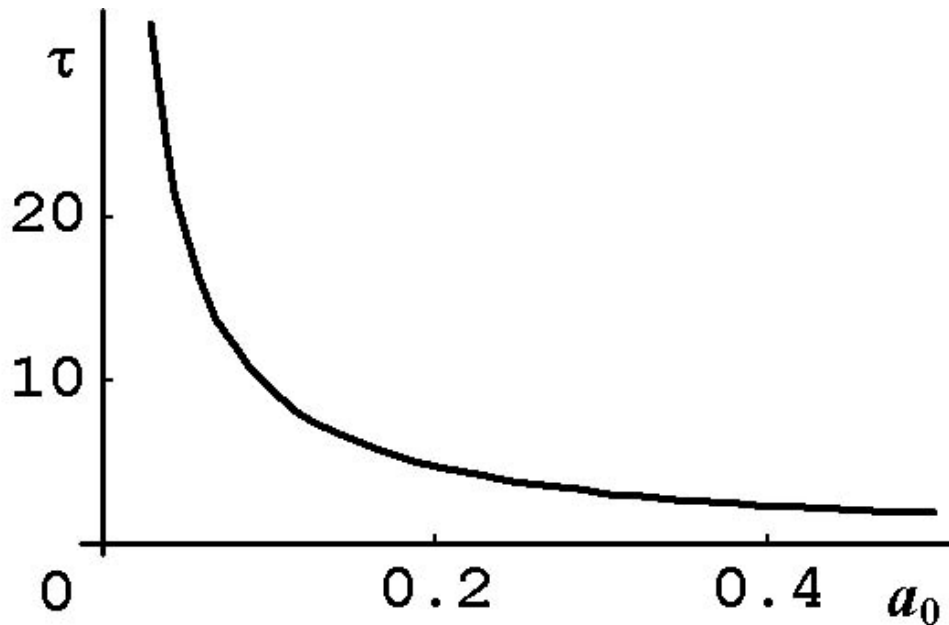


Рис. 4. Зависимость безразмерного времени реализации неустойчивости τ от начальной амплитуды волны, рассчитанная при $k=1$, $\Delta W = 0$, $W = W_* = 2$

6. В проведенном анализе был выведен закон изменения со временем при $W \approx 2$ амплитуды неустойчивой волны с $k=1$. То обстоятельство, что согласно (1) одновременно с волной с волновым числом $k=1$ за счет нелинейного взаимодействия в использованном при расчетах пятом порядке малости становятся неустойчивыми и волны с $k=2$, $k=3$, $k=4$ и $k=5$, никак не упоминалось и не комментировалось. Однако естественно задаться вопросом о том, как в (1) будут изменяться во времени амплитуды волн с указанными волновыми числами.

Без детального рассмотрения в качестве первого приближения к решению сформулированной проблемы можно принять утверждение, что зависимость амплитуды от времени $a=a(t)$, полученная выше для волны с $k=1$, сохраняет свой вид и в амплитудных коэффициентах при поправках второго и более высоких

порядков малости к основному решению, равно как и в квадратичных по a поправках к частотам волн с волновыми числами $k=2$ и $k=3$ в соотношении (1). Основанием для подобного заключения является сама классическая процедура отыскания нелинейных поправок к основной волне, задаваемой в начальный момент времени в виде асимптотического разложения по амплитуде основной волны a , а также то обстоятельство, что при принятом значении параметра Тонкса-Френкеля $W \approx 2$ волны с $k \geq 2$ устойчивы по отношению к имеющемуся поверхностному заряду и рост их амплитуд обусловлен только нелинейным взаимодействием с основной волной с $k=1$.

В следующем приближении следует учесть, что с ростом амплитуды волны напряженность поля у вершин волн будет увеличиваться и при достаточно большой амплитуде основной волны с $k=1$ на ее вершине может претерпеть неустойчивость в смысле линейного анализа (в смысле выполнения критерия (2)) более короткая волна с $k=2$ (когда среднее по полупериоду волны с $k=2$ значение параметра Тонкса-Френкеля в окрестности вершины растущей волны с $k=1$ превысит $W_* = 2.5$). При дальнейшем росте амплитуды то же может произойти с еще более короткой волной с $k=3$. Но детальный анализ такой возможности нетривиален и составляет предмет отдельного исследования.

7. Представляется интересным отметить, что при рассмотрении закономерностей реализации неустойчивости капель по отношению к собственному и индуцированному зарядам [112-114] зависимость характерного времени реализации неустойчивости t_* (в размерной форме) от амплитуды ζ_0 начального возмущения равновесной формы капли вида $\zeta_0 \cdot P_2(\cos\theta)$ (здесь $P_2(\cos\theta)$ – полином Лежандра) маскируется его сильной зависимостью от радиуса капли R , имеющей вид $t_* \sim (R^4/\zeta_0)$. При $R \approx 10^{-2} \text{ cm}$ (а именно для капель таких размеров проводились экспериментальные исследования их устойчивости по отношению к поверхностному заряду [104]) и $\zeta_0 \approx 10^{-8} \text{ cm}$ получим $(R^4/\zeta_0) \approx 1$. Поэтому обнаруженная в проведенном рассмотрении сильная зависимость характерного времени развития неустойчивости от величины начальной амплитуды на пороге критичности параметра Тонкса-

Френкеля (при $W = W_* = 2$) свойственна именно плоской заряженной поверхности жидкости.

8. То обстоятельство, что характерное время развития неустойчивости Тонкса-Френкеля при бесконечно малых амплитудах виртуальных волн оказывается весьма большим (а следовательно, скорость движения поверхности жидкости оказывается весьма малой), определяет и влияние вязкости жидкости на закономерности реализации неустойчивости. В самом деле, в течение большей части характерного времени реализации неустойчивости неустойчивая поверхность жидкости движется весьма медленно, потери энергии на диссипацию при этом малы, и ими можно пренебречь. Поверхность жидкости при реализации неустойчивости движется быстро лишь на финальной стадии, длительность которой существенно меньше полного характерного времени реализации неустойчивости. Разложим выражение (10) для зависимости амплитуды волны от времени по степеням $a_0 \cdot t$, ограничившись квадратичным по $a_0 \cdot t$ слагаемым, и получим

$$a(t) \approx \{a_0 + a_0^2 \sqrt{w_2} \cdot t + 0.5a_0^3 [3t^2 - \frac{w_4}{w_2} - w_2(t^2 - \frac{w_4}{w_2^2})]\}.$$

Несложно видеть, что это выражение асимптотически корректно на интервале времени $\Delta t \leq (1/a_0 \cdot \sqrt{w_2})$. Сравнивая его с полным временем реализации неустойчивости, определяемым (11), получим, что длительность линейной стадии является хорошей аппроксимацией для полного времени реализации неустойчивости. Причем в течение всей линейной стадии характерная скорость движения поверхности жидкости весьма мала: $V = a_0^2 \sqrt{w_2}$. На начале нелинейной стадии, пока она хорошо аппроксимируется квадратичным по $a_0 \cdot t$ слагаемым, ускорение движения поверхности жидкости, равное $2a^2 \cdot w_2$, также весьма мало. Следовательно, влияние вязкости на характерное время реализации неустойчивости мало.

Отметим также, что большая длительность линейной и квадратичной по $a_0 \cdot t$ стадий реализации неустойчивости означает асимптотическую пригодность полученных результатов (в част-

ности, интегральных уравнений, выведенных для описания развития во времени амплитуды неустойчивой волны).

9. Заключение. Характерное время реализации неустойчивости плоской однородно заряженной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости делится на две разномасштабных части: стадия подготовки неустойчивости, или линейная стадия, занимающая в зависимости от начальных условий (от начальной амплитуды виртуальной волны и от степени закритичности параметра Тонкса-Френкеля в начальный момент) значительную часть полного времени развития неустойчивости, и весьма кратковременная нелинейная стадия, в течение которой амплитуда неустойчивой волны неограниченно возрастает.

2.4. Нелинейный анализ формы конуса Тейлора

1. Несмотря на значительный интерес к феномену реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности проводящей жидкости, до сих пор не изучен физический механизм формирования «конусов Тейлора» – выступов на заряженной поверхности жидкости, образующихся на нелинейной стадии реализации ее неустойчивости, с вершин которых идет сброс избыточного заряда путем эмиссии высокодисперсных сильно заряженных капелек [2, 103 – 104]. Качественная модель формирования таких выступов предложена еще в [2]. В [110 – 111] предпринята попытка их численного расчета, мало что давшая для понимания феномена. Но до сих пор никто не пытался построить конус Тейлора в рамках представлений о нелинейной эволюции мод капиллярных волн на неустойчивой по отношению к поверхностному заряду плоской поверхности жидкости и оценить характерное время его формирования.

2. Пусть идеальная несжимаемая электропроводная жидкость с плотностью ρ заполняет в поле тяжести $\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$ полупространство $z \leq 0$ в декартовой системе координат (за \vec{n}_z обозначен орт оси z), а ее невозмущенная волновым движением равновесная плоская поверхность (совпадающая с плоскостью XOY) подвержена действию сил поверхностного натяжения с коэффициентом γ и несет однородно распределенный электрический заряд плот-

ностью σ . Капиллярное волновое движение в жидкости, генерируемое уже тепловым движением ее молекул будет приводить к деформации равновесной плоской свободной поверхности. При достаточно большой поверхностной плотности электрического заряда некоторые из тепловых капиллярных волн могут стать неустойчивыми и их амплитуды будут увеличиваться со временем.

В рамках линейной модели критические условия реализации неустойчивости такой поверхности определяются условием прохождения через нуль квадрата частоты виртуальной волны и условием обращения в нуль производной от частоты по волновому числу (условие экстремальности инкремента неустойчивости для данного волнового числа) имеют вид

$$W_* = \alpha k_* + (\alpha k_*)^{-1} = 2; \quad k_* = \alpha^{-1}, \quad (1)$$

где W – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду $W = 4\pi \sigma^2 / \sqrt{\rho g \gamma}$; k – волновое число; α – капиллярная постоянная жидкости: $\alpha = \sqrt{\gamma / \rho g}$.

Если при имеющемся на поверхности жидкости электрическом заряде величина параметра Тонкса-Френкеля будет больше, чем необходимо для реализации неустойчивости волны с $k_* = \alpha^{-1}$, т.е. выполнится условие $W > 2$, то максимальным инкрементом неустойчивости будет обладать волна с волновым числом, определяющимся соотношением [10, 11]:

$$k_* = (W + \sqrt{W^2 - 3}) / (3 \cdot \alpha). \quad (1a)$$

Если задаться вопросом о расчете профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны бегущей по плоской заряженной поверхности жидкости, то, решая такую задачу в третьем порядке малости по амплитуде волны (считающейся малой по сравнению с капиллярной постоянной жидкости), можно найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде (см. параграф 2.1)

$$\begin{aligned} \xi = a \cdot \cos[k \cdot x - (\omega + a^2 \cdot \delta_2) \cdot t] + a^2 \cdot X_{22} \cdot \cos[2k \cdot x - 2\omega \cdot t] + \\ + a^3 \cdot X_{33} \cdot \cos[3kx - 3\omega \cdot t]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\omega^2 = k g (1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W);$$

$$\delta_2 = \frac{gk^3(16\alpha^2 k^2 W^2 - 16\alpha^3 k^3 W + 2\alpha^4 k^4 - 16\alpha k W + \alpha^2 k^2 + 8)}{16 \omega (1 - 2\alpha^2 k^2)};$$

$$X_{22} = \frac{k (1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{2 (1 - 2\alpha^2 k^2)};$$

$$X_{33} = \frac{k^2 (6 - 32\alpha k W + 21\alpha^2 k^2 + 32\alpha^2 k^2 W^2 - 32\alpha^3 k^3 W + 6\alpha^4 k^4)}{16 (1 - 2\alpha^2 k^2) (1 - 3\alpha^2 k^2)}.$$

Наличие нелинейной поправки к частоте в третьем порядке по амплитуде волны (по малому параметру $\varepsilon \equiv (a/\alpha)$ – отношению амплитуды волны a к капиллярной постоянной α), приводит к появлению зависимости критической величины параметра W от амплитуды волны a (от малого параметра ε) (см. параграф 2.2)

$$W_* \approx 2 - \beta \cdot \varepsilon^2 \equiv 2 - \beta \cdot (a_0/\alpha)^2; \quad \beta = 11/8. \quad (3)$$

3. Проследим за эволюцией во времени капиллярно-гравитационной волны с $k_* = \alpha^{-1}$, потерявшей устойчивость при выполнении условия (1), т.е. при $W = W_* = 2$, принимая во внимание то обстоятельство, что с ростом амплитуды волны критическое значение параметра W_* согласно (3) снижается, и пренебрегая на этом этапе зависимостью длины наиболее неустойчивой моды k_* от величины напряженности электрического поля у его поверхности.

Невозмущенная капиллярным волновым движением равновесная в поле силы тяжести и электростатических сил плоская заряженная поверхность жидкости при $W = 2$ устойчива. Ее неустойчивость проявится, если на плоской поверхности жидкости появится виртуальная волна как угодно малой амплитуды a_0 . В таком случае существующее значение параметра Тонкса-Френкеля $W = 2$ согласно (3) для волны станет закритическим и амплитуда этой волны начнет нарастать во времени по экспоненциальному закону $a(t) = a_0 \cdot \exp(\chi \cdot t)$ с инкрементом χ , пропорциональ-

ным корню квадратному из разности между существующим значением $W = 2$ и критическим для виртуальной волны, определяемым по соотношению (3), т.е.

$$\chi = (a_0/\alpha)\sqrt{(\beta \cdot g/\alpha)}. \quad (4)$$

Такой экспоненциальный рост с инкрементом, пропорциональным начальной амплитуде, будет обеспечен волне лишь на коротком интервале времени: пока прирост начальной амплитуды Δa не выйдет за пределы условия $\Delta a \ll a_0$. Затем в выражении для инкремента (4) следует заменить a_0 на $a_0 + \Delta a$ и рассмотреть экспоненциальный рост амплитуды на следующем коротком интервале времени и т.д. В итоге для отыскания амплитуды неустойчивой волны получим нелинейное интегральное уравнение

$$a(t) = a_0 \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{a(t)}{\alpha} \sqrt{\beta \frac{g}{\alpha}} \cdot dt\right),$$

решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (a_0/\alpha)\sqrt{\beta \cdot g/\alpha} \cdot t} \equiv \frac{a_0}{1 - \chi \cdot t}. \quad (5)$$

Из (5) несложно видеть, что характерное время реализации неустойчивости t_* , определяемое как характерное время неограниченного приближения к нулю знаменателя (5) полностью характеризуется инкрементом неустойчивости в начальный момент реализации неустойчивости $t_* = \chi^{-1}$, хотя весь процесс является существенно нелинейным. Отметим только, что смысл χ в рассмотренном нелинейном росте амплитуды неустойчивой волны со временем и в экспоненциальном росте, характерном для линейной теории, различен: в линейной теории за время χ^{-1} амплитуда волны увеличивается ≈ 2.73 раза, а в рассмотренном нелинейном процессе за то же время амплитуда достигает бесконечно больших значений. То, что закон нарастания амплитуды волны со временем (5) обеспечивает большую скорость роста по сравнению с экспоненциальным легко увидеть, раскладывая (5) и $\exp(\chi t)$ при $\chi t \ll 1$ по степеням χt и сравнивая их между собой.

Минимально возможное значение a_0 определяется амплитудой капиллярных волн, порождаемых тепловым движением молекул жидкости $a_0 \approx \sqrt{kT/\gamma}$, (k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура жидкости). Амплитуда таких волн для подавляющего большинства реальных жидкостей при разумных (в смысле возможности существования жидкости) температурах будет иметь величину около половины ангстрема, и, следовательно, характерное время развития неустойчивости будет весьма большим. Так, при $a_0 = 10^{-8} \text{ см}$ характерное время реализации неустойчивости t_* , например для заряженной поверхности воды, граничащей с вакуумом, будет около семи часов (см. предыдущий параграф). С ростом начальной амплитуды a_0 характерное время t_* уменьшается $\sim a_0^{-1}$ и уже при $a_0 \approx 10^{-3} \text{ см}$ измеряется единицами секунд. В итоге имеем, что для получения в экспериментах при $W = W_* = 2$ характерных времен реализации неустойчивости, измеряемых секундами, необходимо виртуальные волны $k \cdot \alpha = 1$, с которых начинается неустойчивость, создавать искусственно.

Сказанное означает, что в экспериментах по проверке справедливости критерия неустойчивости заряженной поверхности жидкости [13 – 14] характерное время ожидания реализации неустойчивости должно зависеть от способа задания виртуальной волны. Поскольку в работах [13 – 14] это обстоятельство не упоминалось, остается предположить, что в экспериментах виртуальные волны возникали либо из-за теплового движения молекул, но тогда время ожидания реализации неустойчивости должно быть весьма большим, либо генерировались в результате случайных сотрясений установки, а их амплитуда не контролировалась. Впрочем, в [3] имеется прямое указание на длительность линейной стадии подготовки разряда: так, там упоминается, что из примерно пятнадцати метров киноплёнки, на которую фиксировался эксперимент с момента подачи напряжения, сам акт выброса струйки жидкости при реализации неустойчивости зафиксирован лишь на одном кадре. В [115] о времени задержки разряда вообще не упоминается. Сказанное имеет еще одно возможное объяснение: в экспериментах [3, 115] использовалось напряжение, превышавшее критическое и эксперимент происходил при наличии закритичности параметра Тонкса-Френкеля ΔW по срав-

нению с критическим значением $W = W_* = 2$, определяемым (1), что и сказалось на величине характерного времени реализации неустойчивости.

4. Пусть в начальный момент времени величина параметра Тонкса-Френкеля превышает критическое для плоской поверхности жидкости значение на ΔW и равна $W_* + \Delta W$. В такой ситуации величина инкремента неустойчивости в начальный момент ее реализации будет зависеть как от величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 , так и от степени закритичности ΔW и в соответствии с традиционными представлениями [1] задается соотношением

$$\chi = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[\Delta W + \beta \left(\frac{a_0}{\alpha} \right)^2 \right]}.$$

Зависимость же амплитуды неустойчивой волны от времени определится как решение нелинейного интегрального уравнения

$$a(t) = a_0 \cdot \exp \left(\int_0^t \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[\Delta W + \beta \left(\frac{a(t)}{\alpha} \right)^2 \right]} \cdot dt \right),$$

решение которого имеет вид

$$a(t) = \frac{2 \cdot \exp(\sqrt{g \cdot \Delta W / \alpha} \cdot t) \cdot (1 + \delta)}{(1 + \delta)^2 - (a_0 / \alpha)^2 \cdot \exp(2 \cdot \sqrt{g \cdot (\Delta W / \alpha)} \cdot t)}; \quad \delta \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\Delta W} \right) \cdot \left(\frac{a_0}{\alpha} \right)^2}. \quad (6)$$

Характерное время реализации неустойчивости, определяемое данной зависимостью, получается из условия обращения в ноль знаменателя $a(t)$ в виде

$$t_* = \sqrt{(\alpha / g \cdot \Delta W)} \cdot \ln[\delta \cdot (\alpha / a_0)]. \quad (7)$$

Из (7) видно, что основной вклад в величину характерного времени реализации неустойчивости дает закритичность параметра

Тонкса-Френкеля ΔW , а влияние величины начальной амплитуды виртуальной волны a_0 более слабо. Принимая во внимание, что величина капиллярной постоянной α для большинства жидкостей измеряется единицами миллиметров, из (7) несложно найти, что уже при $\Delta W \approx 10^{-3}$ независимо от величины a_0 характерное время реализации неустойчивости будет измеряться секундами. Применительно к экспериментам [3, 115] сказанное позволяет предположить, что в обоих случаях измерения проводились при определяющем влиянии на характерное время реализации неустойчивости закритичности параметра Тонкса-Френкеля.

Представляется интересным отметить, что при рассмотрении закономерностей реализации неустойчивости капле по отношению к собственному и индуцированному зарядам [112-114] зависимость характерного времени реализации неустойчивости от амплитуды начального возмущения равновесной формы капли $\zeta_0 \cdot P_2(\cos\theta)$ (здесь $P_2(\cos\theta)$ – полином Лежандра) маскируется его сильной зависимостью от радиуса капли R , имеющей вид $t_* \sim (R^4/\zeta_0)$. При $R \approx 10^{-2} \text{ cm}$ (а именно для капель таких размеров проводились экспериментальные исследования их устойчивости по отношению к поверхностному заряду [104]) и $\zeta_0 \approx 10^{-8} \text{ cm}$ получим $(R^4/\zeta_0) \approx 1$. Поэтому обнаруженная в проведенном рассмотрении сильная зависимость характерного времени развития неустойчивости от величины начальной амплитуды на пороге критичности параметра Тонкса-Френкеля свойственна именно плоской заряженной поверхности жидкости.

5. Обратим внимание на то, что с увеличением амплитуды неустойчивой волны, нарастающей со временем по закону (6) (или по закону (5)), локальная плотность электрического заряда, а с ней и локальная величина параметра Тонкса-Френкеля на свободной поверхности жидкости в местах с возросшей кривизной также будут расти. Следовательно, согласно (1а) с увеличением амплитуды волны будет расти и величина волнового числа наиболее неустойчивой волны: т.е. на вершине растущей волны с $k = \alpha^{-1}$ будут по мере увеличения поверхностной плотности электрического заряда претерпевать неустойчивость все более короткие волны. В итоге форма эмиссионного выступа (форма конуса

Тейлора) определится суперпозицией всех волн, претерпевших неустойчивость.

Следует, однако, отметить, что сказанное выше относится к локальным значениям поверхностной плотности заряда, параметра Тонкса-Френкеля и волнового числа, а «локальность» для волны подразумевает характерный линейный размер пространства, в котором можно говорить о локальности, порядка половины длины волны. Теория реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости при непрерывно изменяющейся от точки к точке поверхностной плотности заряда пока не разработана. В этой связи в нижеследующих рассуждениях будем оперировать усредненными по полупериоду волны с $k = \alpha^{-1}$ значениями параметра Тонкса-Френкеля и именно по ним находить согласно (1а) величины волновых чисел наиболее неустойчивых волн.

Итак, зададимся целью проследить закономерности пространственного формирования конуса Тейлора, принимая, что в начальный момент времени при $W=2$ претерпела неустойчивость волна с волновым числом $k = \alpha^{-1}$ и ее амплитуда нарастает по закону (6).

Выражение для величины параметра Тонкса-Френкеля как функции времени и координаты свободной поверхности волны с $k = \alpha^{-1}$, если ограничиться только главным слагаемым в (2), т.е.

$$\xi \approx a \cdot \cos \left[k \cdot x - (\omega + a^2 \cdot \delta_2) \cdot t \right], \quad (8)$$

легко находится и имеет вид [116]

$$W = W_0 \left(1 + 2a \cdot k \cdot \cos \left(k \cdot x - (\omega - a^2 \cdot \delta_2) \cdot t \right) \right),$$

где W_0 – величина параметра W у невозмущенной капиллярным волновым движением плоской равновесной поверхности жидкости, когда квадрат частоты волны $z^2 = (\omega - a^2 \cdot \delta_2)^2$ проходит через нуль и волна претерпевает неустойчивость. При этом зависимость W от координаты определится соотношением

$$W = W_0 \left(1 + 2a \cdot k \cdot \cos(k \cdot x) \right) = W_0 \left(1 + 2\varepsilon \cdot (k \cdot \alpha) \cdot \cos(k \cdot x) \right), \quad (9)$$

а зависимость W от времени определится через $a=a(t)$. Усредняя (9) по половине длины волны с $k = \alpha^{-1}$, получим

$$\overline{W} = W_0 \cdot (1 + 1.27 \cdot \varepsilon).$$

Подставляя это соотношение в (1а), найдем зависимость волнового числа наиболее неустойчивой волны от ее амплитуды (от ε):

$$k_* = \alpha^{-1}(1 + 2.54 \cdot \varepsilon - 3.29 \cdot \varepsilon^2) \equiv k_0(1 + 2.54 \cdot \left(\frac{a}{\alpha}\right) - 3.29 \cdot \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2). \quad (10)$$

Подставим это выражение в (8) и, полагая, что с начала потери волной устойчивости и во все последующие моменты времени квадрат частоты равен нулю (т.е. $(\omega - a^2 \cdot \delta_2)^2 = 0$), а зависимость амплитуды волны от времени определяется соотношением (5), получим

$$\xi \approx a(t) \cdot \cos \left[\left(1 + 2.54 \cdot \frac{a(t)}{\alpha} - 3.29 \cdot \left(\frac{a(t)}{\alpha} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right] \equiv a(t) \cdot \cos[k(a(t)) \cdot x]; \quad (11)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1 - (a_0/\alpha)\sqrt{\beta \cdot g/\alpha \cdot t}}.$$

Из этого выражения видно, что от времени зависит и амплитуда эмиссионного выступа, и его характерный поперечный размер. Рассмотрим эволюцию во времени выступа на поверхности жидкости, описываемого соотношением (11).

В начальный момент времени, при $t=0$, будем иметь

$$\xi = a_0 \cdot \cos[x/\alpha] \equiv a_0 \cdot \cos[k_0 \cdot x].$$

По прошествии малого интервала времени Δt_1 форма выступа изменится:

$$\xi_1 = a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \frac{da}{dt} \cdot \Delta t_1 \cdot \cos \left[\left(k_0 + \frac{dk}{dt} \cdot \Delta t_1 \right) \cdot x \right].$$

По прошествии следующего малого интервала времени Δt_2 форма выступа еще более изменится:

$$\begin{aligned}\xi_2 = a_0 \cdot \cos\left[\frac{x}{\alpha}\right] + \frac{da}{dt} \Delta t_1 \cdot \cos\left[\left(k_0 + \frac{dk}{dt} \Delta t_1\right)x\right] + \\ + \frac{da}{dt} \Delta t_2 \cdot \cos\left[\left(k_0 + \frac{dk}{dt} \Delta t_1 + \frac{dk}{dt} \Delta t_2\right)x\right].\end{aligned}$$

Повторяя проведенную процедуру n раз, получим:

$$\xi_n = a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \sum_{j=1}^n \left(\frac{da}{dt} \cdot \Delta t_j \cdot \cos\left[\left(k_0 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{dk}{dt} \cdot \Delta t_j\right)\right) \cdot x\right] \right).$$

В пределе $n \rightarrow \infty$ суммирование в этом соотношении можно заменить интегрированием

$$\begin{aligned}\xi = a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \int_{a_0}^a \left(\frac{da}{dt} \cdot \cos\left[\left(k_0 + \int_{k_0}^k \left(\frac{dk}{dt} \cdot dt\right)\right) \cdot x\right] \cdot dt \right) \equiv \\ \equiv a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \int_{a_0}^a \left(\frac{da}{dt} \cdot \cos[k(a(t)) \cdot x] \cdot dt \right) \equiv a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \int_{a_0}^a (\cos[k(a) \cdot x] \cdot da) \cdot\end{aligned}$$

Подставляя в это соотношение выражение $k=k(a)$ из (10) и интегрируя по a , получим

$$\begin{aligned}\xi = a_0 \cdot \cos[x/\alpha] + \frac{0.69 \cdot \alpha}{\sqrt{x/\alpha}} \cdot \left\{ \cos\left(1.49 \cdot \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left| C[0.22 \cdot \sqrt{x/\alpha} (-2.54 + 6.58 \left(\frac{a}{\alpha}\right))] \right|_{a_0}^a + \right. \\ \left. + \sin\left(1.49 \cdot \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \left| S[0.22 \cdot \sqrt{x/\alpha} (-2.54 + 6.58 \left(\frac{a}{\alpha}\right))] \right|_{a_0}^a \right\}. \quad (12)\end{aligned}$$

В этом соотношении $C[z]$ и $S[z]$ – интегралы Френеля [117].

На рисунке 1 внутренней кривой приведен график зависимости $\xi=\xi(x)$, рассчитанный при $a=0.25\alpha$, на том же рисунке наружной кривой приведен график зависимости $\xi=a\cdot\cos(x/\alpha)$ при $a=0.25\alpha$. Несложно видеть, что при равенстве амплитудных значений обеих кривых зависимость (12) дает заметно большую кривизну вершины по сравнению с обычной косинусоидой.

Напомним, что проведенные расчеты основаны на учете лишь главного члена разложения (2). Если учесть и добавки различных порядков малости, то кривизна вершины эмиссионного выступа еще более увеличится и, кроме того, увеличится и его амплитуда. Однако такое исследование существенно более громоздко по сравнению с проведенным и нуждается в отдельном рассмотрении.

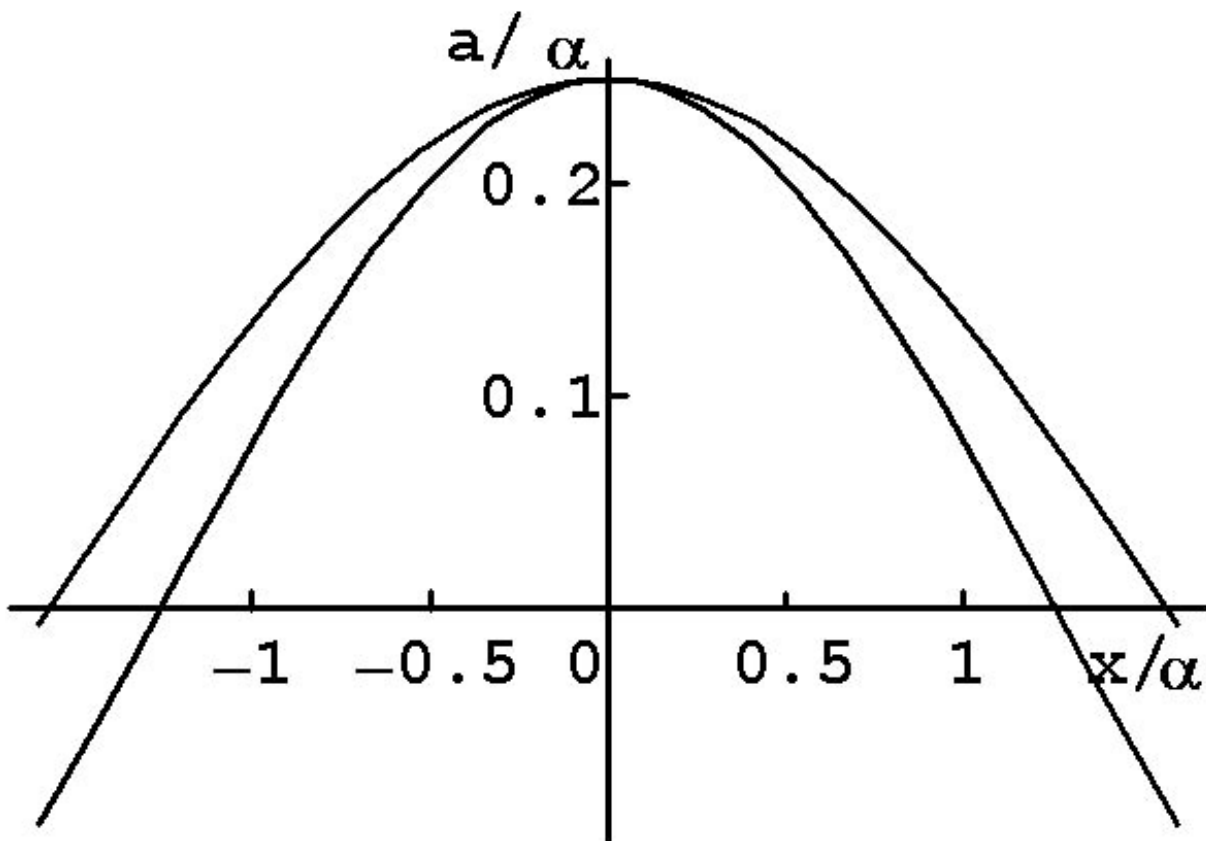


Рис. 1. Формы конуса Тейлора

3. Нелинейные волны на поверхности вязкой жидкости

3.1. Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной вязкой жидкости

3.1.1. Решение задачи об аналитическом асимптотическом расчете капиллярно-гравитационного нелинейного периодического волнового движения в бесконечно глубокой вязкой электропроводной несжимаемой жидкости

Ниже предлагается строгое аналитическое асимптотическое решение задачи расчета параметров нелинейной периодической волны, распространяющейся по заряженной поверхности глубокой жидкости произвольной вязкости, которое до настоящего времени не было известно в научной литературе и которое представляет значительный интерес для многообразных приложений электрогидродинамики.

1. Математическая формулировка задачи. Примем, что несжимаемая ньютоновская жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат с осью Oz , направленной вертикально вверх в поле сил тяжести $g \parallel -\vec{e}_z$, заполняет полупространство $z < 0$ и граничит с вакуумом. Жидкость считается идеальным проводником, несущим однородно распределенный поверхностный заряд такой, что электрическое поле над искаженной волновым движением поверхностью жидкости в пределе $z \rightarrow \infty$ стремится к однородному с напряженностью $E_0 \vec{e}_z$. Будем исследовать временную эволюцию начальной деформации свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей волнового движения в жидкости, которые для простоты считаются независимыми от координаты y , \vec{e}_x , и \vec{e}_z – орты осей Ox и Oz . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной в поле сил тяжести

формы $z=0$, поле скоростей $\vec{U} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_z$ и электрический потенциал Φ над жидкостью удовлетворяют соотношениям

$$z > \xi: \quad \Delta \Phi = 0; \quad (1)$$

$$z < \xi: \quad \partial_t \vec{U} + \text{rot}(\vec{U}) \times \vec{U} = -\text{grad} \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{U^2}{2} + gz \right) + \nu \Delta \vec{U}; \quad (2)$$

$$\text{div}(\vec{U}) = 0; \quad (3)$$

$$z = \xi: \quad \partial_t \xi + u \cdot \partial_x \xi = v; \quad (4)$$

$$p - 2 \cdot \rho \cdot \nu \cdot (\vec{n} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla) \cdot \vec{U})) + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2 = \gamma \cdot \text{div}(\vec{n}); \quad (5)$$

$$\vec{\tau} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla) \cdot \vec{U}) + \vec{n} \cdot ((\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{U}) = 0; \quad (6)$$

$$\Phi = 0; \quad (7)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi \rightarrow E_0 \cdot \vec{e}_z; \quad (8)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \vec{U} \rightarrow \vec{0}. \quad (9)$$

Здесь t – время; p – давление внутри жидкости; ∂_t и ∂_x – частные производные по времени и координате; \vec{n} и $\vec{\tau}$ – орты касательной и нормали к поверхности, явный вид которых вместе с выражением для дивергенции нормали $\text{div}(\vec{n})$ приведены в "Приложении А".

Для замыкания математической формулировки задачи выписанные соотношения должны быть дополнены начальными условиями, задающими начальное отклонение поверхности и начальное распределение поля скоростей. Как и в [61-63], вид начальных условий будем определять в процессе решения таким образом, чтобы прийти к наиболее простым в смысле аналитического описания формам колебаний свободной

поверхности и выявить свойства волны, связанные с ее нелинейностью.

2. Принцип решения задачи. Пусть начальное возмущение $\xi(x, t)$ периодически по x и образует волнообразный рельеф с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$ (k – волновое число) и амплитудой a . В качестве малого параметра примем $\varepsilon = k \cdot a$.

В квадратичном по ε приближении решение задачи (1)-(9) ищется в виде разложений:

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + O(\varepsilon^3); & \vec{U}_1 &\sim O(\varepsilon); & \vec{U}_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ p &= p_1 + p_2 + O(\varepsilon^3); & p_1 &\sim O(\varepsilon); & p_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + O(\varepsilon^3); & \Phi_0 &\sim O(1); & \Phi_1 &\sim O(\varepsilon); & \Phi_2 &\sim O(\varepsilon^2); \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 + O(\varepsilon^3); & \xi_1 &\sim O(\varepsilon); & \xi_2 &\sim O(\varepsilon^2).\end{aligned}\quad (10)$$

Подстановка (10) в (3) – (5) приводит к задачам нулевого, первого и второго порядков малости. В "Приложении В" выписаны соотношения, которые получаются после разделения граничных условий на свободной поверхности (6)-(9) на соотношения для величин различных порядков малости.

В нулевом по ε приближении задача сводится к определению распределения гидростатического давления в жидкости:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g z; \quad \Phi_0 = -E_0 \cdot z. \quad (11)$$

В нижеследующем изложении будут использоваться специальные обозначения для линейных дифференциальных операторов:

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & 0 & \frac{1}{\rho} \cdot \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_t - \nu(\partial_{xx} + \partial_{zz}) & \frac{1}{\rho} \cdot \partial_z & 0 \\ \partial_x & \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{xx} + \partial_{zz} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R} \equiv \begin{bmatrix} \partial_t \\ -\rho \cdot g + \gamma \cdot \partial_{xx} \\ 0 \\ -E_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \cdot \rho \cdot v \cdot \partial_z & 1 & -E_0/(4\pi) \\ \partial_z & \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{z=0};$$

и матриц-столбцов с обозначениями для составляющих элементов:

$$\mathbf{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_j \equiv \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ p_j \\ \Phi_j \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_j[1] &\equiv u_j; \\ \mathbf{Y}_j[2] &\equiv v_j; \\ \mathbf{Y}_j[3] &\equiv p_j; \\ \mathbf{Y}_j[4] &\equiv \Phi_j. \end{aligned} \quad (12)$$

Оператор \mathbf{B} действует на объекты типа \mathbf{Y}_j по следующему правилу: выполняются матричные операции, затем все операции дифференцирования и арифметические действия, после чего полагается $z = 0$. Результат действия оператора \mathbf{B} на столбец четырех функций, зависящих от переменных x , z и t , есть столбец четырех функций, не зависящих от z .

В первом приближении получается линейная однородная дифференциальная задача, а для второго приближения – та же линейная дифференциальная задача, но с неоднородностью, вид которой определяется через решения, найденные в нулевом и первом приближениях.

3. Задача первого порядка малости. Для величин первого по ε порядка малости полная математическая формулировка задачи в принятых обозначениях имеет вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{Y}_1) = \mathbf{0}; \quad (13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y}_1) + \mathbf{R}(\xi_1) = \mathbf{0}; \quad (14)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_1 \equiv \mathbf{Y}_1[4] \rightarrow 0; \quad (15)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_1 \equiv \mathbf{Y}_1[1] \rightarrow 0; \quad v_1 \equiv \mathbf{Y}_1[2] \rightarrow 0; \quad (16)$$

$$t = 0: \quad \xi_1 = a \cdot \cos(k \cdot x); \quad z \leq 0: \quad \mathbf{Y}_1[1]_{t=0} = u_1^0; \quad \mathbf{Y}_1[2]_{t=0} = v_1^0. \quad (17)$$

Для простоты в качестве начальной деформации в первом приближении выбрана косинусоида. Выбор функций $u_1^0 \equiv u_1^0(x, z, t)$ и $v_1^0 \equiv v_1^0(x, z, t)$ для описания начального распределения скоростей будет выполнен ниже. Отметим, что начальные условия необходимо формулировать только для первых двух элементов Y_1 , а не для всего этого символьного столбца неизвестных величин. Начальные условия на p_1 и Φ_1 не нужны. Для p_1 этот факт объясняется следующим образом. Линеаризованное уравнение Навье-Стокса (первое уравнение системы (13)) можно записать в виде

$$\partial_t \vec{U}_1 = -grad\left(\frac{1}{\rho} p_1\right) + \nu \Delta \vec{U}_1.$$

Если к обеим частям этого уравнения применить операцию div и учесть, что жидкость несжимаема (т.е. $\text{div}(\vec{U}_1) = 0$), а также то обстоятельство, что повторные частные производные перестановочны, то несложно для p_1 получить уравнение Лапласа

$$\Delta p_1 = 0.$$

Линеаризованное граничное условие на нормальные натяжения вместе с условием исчезновения на большой глубине градиента от добавки первого порядка малости к давлению имеют вид

$$z = 0: \quad p_1 = 2 \cdot \rho \cdot \nu \cdot \partial_z v_1 + \partial_{xx} \xi_1; \quad z \rightarrow -\infty: \quad |\nabla p_1| \rightarrow 0.$$

Видно, что если известно поле скоростей на поверхности и в объеме жидкости, а также дано выражение для ξ_1 , то p_1 удовлетворяет задаче Дирихле в неограниченной области, решение которой существует и единственно. На Φ_1 начальное условие не накладывается по аналогичной причине. Сказанное можно объяснить качественно следующим образом: в используемой модели несжимаемой идеально проводящей жидкости любое изменение в значениях поля скоростей и отклонения поверхности ξ_1 мгновенно отражается на виде скалярных полей p_1 и Φ_1 .

Решение задачи первого порядка малости имеет вид

$$\xi_1^* = a \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(T); \quad (18)$$

$$u_1^* = a \cdot \left[\left(S_2 \cdot \exp(kz) - 2\nu \cdot k \cdot (q_2 \cdot \cos(q_2 z) + q_1 \sin(q_2 z)) \cdot \exp(q_1 z) \right) \cdot \cos(\theta) + \right. \\ \left. (19) \right.$$

$$\left. + \left(D \cdot \exp(kz) - 2\nu \cdot k \cdot (q_1 \cdot \cos(q_2 z) + q_2 \sin(q_2 z)) \cdot \exp(q_1 z) \right) \cdot \sin(\theta) \right] \cdot \exp(T);$$

$$v_1^* = a \cdot \left[\left(D \cdot \exp(kz) - 2\nu \cdot k^2 \cdot \cos(q_2 z) \cdot \exp(q_1 z) \right) \cdot \cos(\theta) - \right. \\ \left. - \left(S_2 \cdot \exp(kz) - 2\nu \cdot k^2 \cdot \sin(q_2 z) \cdot \exp(q_1 z) \right) \cdot \sin(\theta) \right] \cdot \exp(T); \quad (20)$$

$$p_1^* = \frac{a \cdot \rho}{k} \left((-S_1 \cdot D + S_2^2) \cdot \cos(\theta) + 2S_2 \cdot (S_2 + \nu \cdot k^2) \cdot \sin(\theta) \right) \cdot \exp(kz) \cdot \exp(T); \quad (21)$$

$$\Phi_1^* = a \cdot E_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(T); \quad (22)$$

$$(k^2 + q^2)^2 - \frac{k \cdot g}{\nu^2} \left(1 + k^2 \cdot \frac{\gamma}{\rho g} - k \cdot \frac{E_0^2}{4\pi \rho g} \right) = 4 \cdot k^3 \cdot q; \quad (23)$$

$$q_1 \equiv \operatorname{Re}(q) \geq 0; \quad q_2 \equiv \operatorname{Im}(q) \geq 0; \quad (24)$$

$$S = \nu \cdot (q^2 - k^2); \quad S_1 \equiv \operatorname{Re}(S); \quad S_2 \equiv \operatorname{Im}(S); \quad (25)$$

$$\theta \equiv S_2 \cdot t - k \cdot x; \quad T \equiv S_1 \cdot t; \quad D \equiv S_1 + 2\nu \cdot k^2. \quad (26)$$

В этих соотношениях q вычисляется как корень дисперсионного уравнения (23), удовлетворяющий условиям (24). Условия (24) являются условиями отбора значения корня, который соответствует волновому движению со скоростью, стремящейся к нулю при $z \rightarrow -\infty$ (см. условие (16)), и которому сопоставляется прогрессивная волна, распространяющаяся

вправо. Условия (24) обеспечивают единственность процедуры вычисления комплексной частоты S .

С помощью решения (18) – (22) подстановка

$$\xi_1 = \xi_1^* + \xi_1^{**}; \quad Y_1 = Y_1^* + Y_1^{**}$$

сводит (13) – (17) к задаче с изначально невозмущенной поверхностью:

$$L(Y_1^{**}) = 0;$$

$$B(Y_1^{**}) + R(\xi_1^{**}) = 0;$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_1^{**} \equiv Y_1^{**}[4] \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_1^{**} \equiv Y_1^{**}[1] \rightarrow 0; \quad v_1^{**} \equiv Y_1^{**}[2] \rightarrow 0; \quad (17)$$

$$t = 0: \quad \xi_1^{**} = 0; \quad z \leq 0: \quad Y_1^{**}[1]_{t=0} = u_1^0 - Y_1^*[1]_{t=0}; \quad Y_1^{**}[2]_{t=0} = v_1^0 - Y_1^*[2]_{t=0}.$$

Форма свободной поверхности представляется в виде суперпозиции функции ξ_1^* , совпадающей при $t=0$ с начальным искажением поверхности и функции ξ_1^{**} , совпадающей в начальный момент времени с равновесной поверхностью ($\xi_1^{**} = 0$ при $t=0$). Чтобы получить наименее громоздкое решение, примем, что в задаче (27) в начальный момент времени скорость всех точек жидкости

$$z \leq 0: \quad u_1^0 - Y_1^*[1]_{t=0} = 0; \quad v_1^0 - Y_1^*[2]_{t=0} = 0; \quad (28)$$

Отсюда следует, что решение задачи (27) нулевое, а (18) – (26) представляют решение задачи первого порядка малости с начальным условием (28).

4. Задача второго порядка малости. В результате выделения из (1) – (9) соотношений на величины различных порядков (см. "Приложение И") с последующей подстановкой в полученные выражения, зависящие от величин первого порядка малости, решения, найденного в первом приближении, задача

второго порядка малости с неопределенными пока начальными условиями может быть сформулирована в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{Y}_2) = a^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2kz) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \right) \cdot \exp(2T) + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)) \right); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y}_2) + \mathbf{R}(\xi_2) = a^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_5 \\ \frac{k \cdot E_0}{2} \end{bmatrix} \cdot \exp(2T) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_6 \\ \frac{k \cdot E_0}{2} \end{bmatrix} \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)) \right); \quad (30)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_2 \equiv \mathbf{Y}_2[4] \rightarrow 0; \quad (31)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_2 \equiv \mathbf{Y}_2[1] \rightarrow 0; \quad v_2 \equiv \mathbf{Y}_2[2] \rightarrow 0, \quad (32)$$

где $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_6$ – трехэлементные столбцы с комплексными коэффициентами, не зависящими от координат и времени. Выражения для них приведены в "Приложении С".

Ввиду линейности сформулированной задачи, можно найти ее комплексное решение, а затем, взяв от него действительную часть, получить физически реализующееся решение. Для систем неоднородных уравнений

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_a) = a^2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2kz) + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \right) \cdot \exp(2T); \quad (33)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_b) = a^2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)), \quad (34)$$

относительно неизвестных, из которых составлены столбцы \mathbf{y}_a , \mathbf{y}_b , легко определяются частные решения в виде

$$\mathbf{y}_a = a^2 \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2q_1 z) + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2kz) + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \right) \cdot \exp(2T); \quad (35)$$

$$\mathbf{y}_b = a^2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp((k+q) \cdot z) \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)), \quad (36)$$

где $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_4$ – трехэлементные столбцы с коэффициентами, подлежащими определению. Непосредственная подстановка (35) и (36) в уравнения (33) и (34) приводит к системе линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов столбцов \mathbf{C}_j , для которых получаются формулы

$$\mathbf{C}_j = \mathbf{\Pi}_j^{-1} \cdot \mathbf{A}_j; \quad j=1,2,3,4. \quad (37)$$

Здесь $\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{\Pi}_4$ – квадратные матрицы с коэффициентами, не зависящими от координат и времени, приведенными в "Приложении С".

Далее ищем решение однородной задачи

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_c) = 0. \quad (38)$$

Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_c = a^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \\ \Im(t) \end{bmatrix} \cdot \exp(2T) + a^2 \cdot \left(2 \cdot \begin{bmatrix} -i \cdot k \\ k \\ -\rho \cdot S \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda \cdot \exp(2kz) + \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} -r \\ -2 \cdot i \cdot k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot H \cdot \exp\left(z \cdot \sqrt{2 \cdot (k^2 + q^2)}\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot R \cdot \exp(-2kz) \right) \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)). \end{aligned} \quad (39)$$

Столбец (39) является решением однородной задачи независимо от выбора в общем случае комплексных постоянных λ, H, R и функций $f(t), \Im(t)$.

Значения λ, H, R и ζ подбираются так, чтоб величины

$$\xi_* = \zeta \cdot \exp(2(T+i \cdot \theta)); \quad \mathbf{y}_{bc} = \mathbf{y}_b + \mathbf{y}_c \quad (40)$$

удовлетворяли соотношениям

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_{bc}) + \mathbf{R}(\xi_*) = a^2 \cdot \left[\frac{\mathbf{A}_6}{k \cdot E_0} \right] \cdot \exp(2(T + i\theta)). \quad (41)$$

После подстановки (41) в (40) оказывается, что такие значения λ, H, R и ζ находятся как решения линейной неоднородной системы алгебраических уравнений и имеют вид

$$\begin{bmatrix} H \\ \lambda \\ \zeta \\ R \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_4[2] \\ 2 \cdot \mathbf{C}_4[2] \cdot \rho \cdot \nu \cdot (k + q) - \mathbf{C}_4[3] \\ 2i \cdot \mathbf{C}_4[2] \cdot k - \mathbf{C}_4[1] \cdot (k + q) \\ 0 \end{bmatrix} + \left[\frac{\mathbf{A}_6}{k \cdot E_0} \right]. \quad (42)$$

Вид квадратной матрицы Λ приведен в "Приложении С".

Благодаря тому что столбцы \mathbf{y}_a , $\mathbf{y}_{bc} = \mathbf{y}_b + \mathbf{y}_c$ тождественно удовлетворяют соотношениям (33), (34), (41), подстановка

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_\alpha + \mathbf{y}_*; \quad \mathbf{y}_* = \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b + \mathbf{y}_c; \quad \xi = \xi_* \quad (43)$$

в (29) – (32) приводит к задаче

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}_\alpha) = 0; \quad (44)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}_\alpha) = a^2 \cdot \left[\frac{\mathbf{A}_5}{k \cdot E_0} \right] - \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) + \mathbf{C}_1[3] + \mathbf{C}_2[3] + \mathbf{C}_3[3] \\ 2 \cdot \mathbf{C}_1[1] \cdot q_1 + \mathbf{C}_3[1] \cdot (k + q) \\ \Im(t) \end{bmatrix} \cdot \exp(2T); \quad (45)$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_\alpha \equiv \mathbf{Y}_\alpha[4] \rightarrow 0; \quad (46)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{u}_\alpha \equiv \mathbf{Y}_\alpha[1] \rightarrow 0; \quad \mathbf{v}_\alpha \equiv \mathbf{Y}_\alpha[2] \rightarrow 0; \quad (47)$$

Видно, что если положить

$$f(t) = \mathbf{A}_5[2] - \mathbf{C}_1[3] - \mathbf{C}_2[3] - \mathbf{C}_3[3]; \quad \Im(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot E_0 \cdot \exp(-2T), \quad (48)$$

то соотношения (45) упростятся:

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}_\alpha) = a^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{A}_5[3] - \Lambda \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(2T); \quad \Lambda \equiv 2 \cdot \mathbf{C}_1[1] \cdot q_1 + \mathbf{C}_3[1] \cdot (k + q) \quad (45a)$$

Получилась задача, аналогичная задаче определения поля скоростей в несжимаемой вязкой глубокой жидкости под движущейся твердой плоской пластинкой [118]. По схеме, предложенной в [118], несложно найти решение задачи (45), (45a), (46), (47):

$$\mathbf{y}_\alpha = a^2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_5[3] - \Lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \cdot \int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right) \cdot \exp(2 \cdot S_1 \cdot \tau) d\tau, \quad (49)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$t = 0: \quad \mathbf{y}_\alpha = \mathbf{0}.$$

Легко проверить, что подстановка

$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}^* + \mathbf{y}_*; \quad (50)$$

$$\mathbf{y}_* = \mathbf{y}_\alpha + \mathbf{y}_a + \mathbf{y}_b + \mathbf{y}_c; \quad \xi_2 = \xi^* + \zeta \cdot \exp(2(T + i \cdot \theta)), \quad (51)$$

где \mathbf{y}_α вычисляется из (49), \mathbf{y}_a , \mathbf{y}_b находятся по формулам (35)-(37), а \mathbf{y}_c и ζ вычисляются через (39), (42), (48), сводит задачу второго порядка малости (29) – (32) к однородной, аналогичной той, что получается в первом приближении:

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}^*) + \mathbf{R}(\xi_2) = \mathbf{0};$$

$$z \rightarrow +\infty: \quad \Phi_2^* \equiv \mathbf{y}^*[4] \rightarrow 0;$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u_2^* \equiv \mathbf{y}^*[1] \rightarrow 0; \quad v_2^* \equiv \mathbf{y}^*[2] \rightarrow 0;$$

$$t = 0: \quad \xi^* = \xi_2 - \zeta \cdot \exp(2ikx);$$

$$z \leq 0: \quad y^*[1]_{t=0} = u_2^0 - y_*[1]_{t=0}; \quad y^*[2]_{t=0} = v_2^0 - y_*[2]_{t=0}.$$

Переходя к физически реализуемому решению и принимая во внимание, что y_α построен так, что в начальный момент времени все его элементы равны нулю, можно утверждать, что действительные части величин, составляющих столбец y_* , определенный в (51), являются решением задачи второго порядка малости, если в качестве начальных условий на величины этого порядка взять

$$t = 0: \quad \xi_2 = \operatorname{Re}[\zeta \cdot \exp(2ikx)];$$

$$u_2^0 = \operatorname{Re}(y_a[1] + y_b[1] + y_c[1])_{t=0}; \quad v_2^0 = \operatorname{Re}(y_a[2] + y_b[2] + y_c[2])_{t=0}.$$

Значимость найденного решения y_* не уменьшается от того, что оно удовлетворяет конкретным начальным условиям. Гораздо важнее то, что y_* — ключевое звено подстановки (50), сводящей неоднородную задачу второго порядка малости к однородной. Сам факт однородности новой задачи не зависит от вида функций, задающих исходные начальные условия на величины второго порядка малости. Поэтому произвольность формулировки начальных условий на эти величины сказывается лишь на начальных условиях однородной задачи, к которой подстановкой (50) редуцируется исходная неоднородная. Однородная же задача является предметом исследования хорошо разработанной линейной теории волн.

5. Профиль нелинейной волны. Если к решению задачи второго порядка малости $\operatorname{Re}(y_*)$ прибавить $\operatorname{Re}(y^*)$, то полученное выражение снова будет решением задачи второго порядка малости. Но однородная задача определения y_* совпадает с задачей первого порядка малости (13) – (16). Поэтому при добавлении к $\operatorname{Re}(y_*)$ любого решения вида (18) – (26) с другими значениями волнового числа и амплитуды (их произведение должно быть величиной более высокого порядка, чем ε) снова получится

решение задачи второго порядка малости. С учетом возможности добавок подобного рода форма волны, бегущей по заряженной свободной поверхности вязкой глубокой жидкости, может быть описана выражением

$$\begin{aligned}\xi &= \{a \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(S_1 \cdot t) + a^2 \cdot (\zeta_1 \cdot \cos(2\theta) - \zeta_2 \cdot \sin(2\theta)) \cdot \exp(2 \cdot S_1 \cdot t)\} + Л.В.Р. \equiv \\ &\equiv \{a \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(S_1 \cdot t) + a^2 \cdot A \cdot \cos(2\theta + \beta) \cdot \exp(2 \cdot S_1 \cdot t)\} + Л.В.Р. \quad (52)\end{aligned}$$

$$\zeta_1 \equiv \operatorname{Re}(\zeta); \quad \zeta_2 \equiv \operatorname{Im}(\zeta); \quad A \equiv \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}; \quad \zeta \equiv \frac{\det(\Lambda_\zeta)}{\det(\Lambda)};$$

$$\beta \equiv \begin{cases} \operatorname{Arctg}(\zeta_2 / \zeta_1), & \text{если } \zeta_1 > 0 \text{ и } \zeta_2 \geq 0; \\ \operatorname{Arctg}(\zeta_2 / \zeta_1) + 2\pi, & \text{если } \zeta_1 > 0 \text{ и } \zeta_2 < 0; \\ \operatorname{Arctg}(\zeta_2 / \zeta_1) + \pi, & \text{если } \zeta_1 < 0; \\ \pi/2, & \text{если } \zeta_1 = 0 \text{ и } \zeta_2 < 0; \\ 3\pi/2 & \text{если } \zeta_1 = 0 \text{ и } \zeta_2 < 0. \end{cases}$$

Здесь $\operatorname{Arctg}(x)$ – ветвь функции арктангенс, отображающая числовую ось в сегмент $(-\pi/2, \pi/2)$. Выражение для фазы β построено так, чтобы ее значение лежало в пределах $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

Для добавок, о которых шла речь в предыдущем абзаце, введено обозначение Л.В.Р. – линейные волновые решения (такие же, как в линейной теории). Это может быть любая суперпозиция косинусоидальных бегущих волн $\eta \cdot \cos(\Sigma_2 \cdot t - \kappa \cdot x + \varphi) \cdot \exp(\Sigma_1 \cdot t)$ с такими амплитудой η и волновым числом $\kappa \neq k$, что $\kappa \cdot \eta = o(k \cdot a)$ (o – символ малости). Комплексная частота $\Sigma = \Sigma_1 + i \cdot \Sigma_2$ и волновое число κ этих волн связаны тем же дисперсионным уравнением (23), что и величины S и k , через которые выражаются переменные $\theta = S_2 \cdot t - k \cdot x$ и $T = S_1 \cdot t$. Как решения линейной однородной задачи, Л.В.Р. распространяются не взаимодействуя друг с другом, каждая волна со своей фазовой скоростью.

Слагаемые в фигурных скобках в выражении (52) представляют собой взаимодействующие волновые решения. Коэффици-

енты A и β сложным образом зависят от волнового числа k , которое отвечает волне $a \cdot \cos(\theta)$, распространяющейся по свободной поверхности в первом приближении. Таким образом, амплитуда и фаза второй волновой добавки в фигурных скобках (52) зависит от свойств первой волновой добавки. Обе волновые составляющие в фигурных скобках имеют одинаковую фазовую скорость. Поэтому то, что получается в сумме, является самостоятельной периодической волной, имеющей ту же фазовую скорость. За длину этой волны естественно взять пространственный период по x , общий для обоих слагаемых, — величину $\lambda = 2\pi/k$. Очевидно, k можно считать волновым числом, которое отвечает этой новой волне. В отличие от волновых решений, получаемых при решении задачи в линейном приближении, форма новой волны существенно зависит от ее волнового числа k и, как видно из (52), изменяется с течением времени (в случае, когда $S_1 \neq 0$). Изменения в форме имеют второй порядок малости.

В пределе идеальной жидкости, когда $\nu \rightarrow 0$, значение β стремится либо к нулю, либо к π . Замечая, что вместо $\beta = \pi$ можно положить $\beta = 0$, с изменением знака при A , для профиля волны в этом приближении можно записать содержательное для исследования выражение:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\theta_0) + a^2 \cdot \Lambda \cdot \cos(2\theta_0); \quad \Lambda = \frac{1}{2}k \frac{(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{1 - 2\alpha^2 k^2}; \quad \theta_0 = \omega_0 t - kx; \quad (53)$$

$$W = \frac{E_o^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}; \quad \omega_0^2 \equiv gk(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k W).$$

Здесь α — капиллярная постоянная, а W — безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, который характеризует устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду. Из линейной теории хорошо известно, что условие

$$W > \alpha k + \frac{1}{\alpha k} \quad (54)$$

обеспечивает при заданном αk положительность параметра $S_1 \equiv \text{Re}(S)$, входящего в (50). В этом случае имеет место неустойчивость заряженной свободной поверхности жидкости [7], причем S_1 имеет смысл инкремента нарастания амплитуды линейного по a слагаемого в фигурных скобках (52), а $2 \cdot S_1$ – инкремента нелинейного слагаемого. Если значение W недостаточно велико для выполнения условия (54), то $S_1 < 0$. Тогда S_1 характеризует декремент экспоненциального затухания линейного по a слагаемого в фигурных скобках (52), а $2 \cdot S_1$ – декремент нелинейного слагаемого.

При $W=0$ выражение (52) совпадает с профилем волны, построенным в работе Найфэ [63]. Если в дополнение к этому положить $\gamma=0$, то получится известное квадратичное по амплитуде приближение волны Стокса. Нелинейный профиль волны на поверхности идеальной жидкости, называемый волной Стокса, построен более века назад. Тем не менее (52) – первое корректное обобщение этого понятия на случай жидкости с конечной вязкостью, конечным поверхностным натяжением и заряженной свободной поверхностью в квадратичном по амплитуде приближении. Таким образом, уже само выражение (52) является новым для теории волн на поверхности глубокой жидкости результатом, решением классической задачи гидродинамики, которое более века оставалось неизвестным. Из (53) следует, что в идеальной жидкости при $k = k_* = 1/(\alpha \cdot \sqrt{2})$ знаменатель амплитуды поправки второго порядка малости к профилю волны обращается в нуль, а сама добавка при конечных значениях числителя стремится к бесконечности. Обсуждение этого факта, связанного с нелинейным резонансным взаимодействием волн, частично уже проводилось в [58]. В вязкой жидкости, как и следовало ожидать, амплитуда волн в бесконечность не обращается, а остается конечной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Орты нормали и касательной к свободной поверхности жидкости. Дивергенция орта нормали.

Уравнение искаженной волновым движением плоской свободной поверхности жидкости имеет вид $z - \xi = 0$, $\xi \equiv \xi(x, t)$. Нормальный и касательный орты вычисляются с помощью соотношений

$$\vec{n} = -\frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \vec{e}_z; \quad (1.A)$$

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \vec{e}_x + \frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \vec{e}_z. \quad (2.A)$$

Средняя кривизна поверхности, как известно, равна дивергенции орта внешней нормали

$$\text{div}(\vec{n}) = -\frac{\partial_{xx} \xi}{(1 + (\partial_x \xi)^2)^{3/2}} = -\partial_{xx} \xi + O(\xi^3) \quad (3.A)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Граничные условия для величин различных порядков малости.

1. Кинематическое граничное условие (4). Раскладывая (4) в ряд в окрестности невозмущенной поверхности жидкости $z = 0$, считая здесь и далее, что $u \sim O(\xi)$, можно получить асимптотику этого условия с ошибкой порядка $O(\xi^3)$:

$$z = 0: \quad \partial_t \xi + u \cdot \partial_x \xi = v + \xi \cdot \partial_z v. \quad (1.B)$$

Подставляя сюда соотношения $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, в которых индекс означает порядок малости индексированной величины по ε , можно разделить (1.B) на соотношения для величин различных порядков малости:

$$z = 0: \quad \partial_t \xi_1 - v_1 = 0; \quad (2.B)$$

$$\partial_t \xi_2 - v_2 = \xi_1 \cdot \partial_z v_1 - u_1 \cdot \partial_x \xi_1. \quad (3.B)$$

2. Условие для касательных натяжений на свободной поверхности. Если для ортов \vec{n} и $\vec{\tau}$ воспользоваться формулами (1.A), (2.A), то, обозначая $\chi = \left(1 + (\partial_x \xi)^2\right)^{-1/2}$, несложно найти, что

$$\begin{aligned}
 (\vec{n} \bullet \nabla) \cdot \vec{U} &= \vec{e}_x \cdot (\vec{n} \bullet \nabla) u + \vec{e}_z \cdot (\vec{n} \bullet \nabla) v = \\
 &= \chi \cdot \vec{e}_x \cdot (-\partial_x \xi \cdot \partial_x u + \partial_z u) + \chi \cdot \vec{e}_z \cdot (-\partial_x \xi \cdot \partial_x v + \partial_z v); \\
 (\vec{\tau} \bullet \nabla) \cdot \vec{U} &= \vec{e}_x \cdot (\vec{\tau} \bullet \nabla) u + \vec{e}_z \cdot (\vec{\tau} \bullet \nabla) v = \\
 &= \chi \cdot \vec{e}_x \cdot (\partial_x u + \partial_x \xi \cdot \partial_z u) + \chi \cdot \vec{e}_z \cdot (\partial_x v + \partial_x \xi \cdot \partial_z v); \\
 \vec{\tau} \cdot ((\vec{n} \bullet \nabla) \cdot \vec{U}) &= \chi^2 \cdot (-\partial_x \xi \cdot \partial_x u + \partial_z u - (\partial_x \xi)^2 \cdot \partial_x v + \partial_x \xi \cdot \partial_z v); \\
 \vec{n} \cdot ((\vec{\tau} \bullet \nabla) \cdot \vec{U}) &= \chi^2 (-\partial_x \xi \cdot \partial_x u - (\partial_x \xi)^2 \cdot \partial_z u + \partial_x v + \partial_x \xi \cdot \partial_z v).
 \end{aligned}$$

С помощью двух последних равенств условие (6) можно переписать в виде

$$z = \xi: \quad (\partial_x v + \partial_z u) \cdot (1 - (\partial_x \xi)^2) - 2 \cdot (\partial_x u - \partial_z v) \cdot \partial_x \xi = 0. \quad (4.B)$$

Разложение (4.B) в ряд по ξ в окрестности $z=0$ приводит с ошибкой порядка $O(\xi^3)$ к аппроксимационному выражению

$$z = 0: \quad \partial_x v + \partial_z u + \xi \cdot \partial_z (\partial_x v + \partial_z u) = 2 \cdot (\partial_x u - \partial_z v) \cdot \partial_x \xi.$$

Отсюда несложно получить соотношения величин различных порядков малости:

$$z = 0: \quad \partial_z u_1 + \partial_z v_1 = 0; \quad (5.B)$$

$$\partial_z u_2 + \partial_z v_2 = 2 \cdot (\partial_x u_1 - \partial_z v_1) \cdot \partial_x \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1).$$

Последнее соотношение упрощается с помощью условия неразрывности, записанного в виде $\partial_x u_1 = -\partial_z v_1$, до выражения

$$\partial_z u_2 + \partial_z v_2 = -4 \cdot \partial_z v_1 \cdot \partial_x \xi_1 - \xi_1 \cdot \partial_z (\partial_x v_1 + \partial_z u_1). \quad (6.B)$$

3. Условие для давления на возмущенной поверхности (5).

Если воспользоваться формулой (1.A) и определением $\vec{U} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_z$, то с ошибкой порядка $O(\xi^3)$ можно получить выражения

$$z = \xi: \quad \vec{n} = \left(-\partial_x \xi + O(\xi^3) \right) \cdot \vec{e}_x + \left(1 + O(\xi^2) \right) \cdot \vec{e}_z;$$

$$(\vec{n} \cdot \nabla) \cdot \vec{U} = \left(-\partial_x \xi \cdot \partial_x u + \partial_z u + O(\xi^3) \right) \cdot \vec{e}_x + \left(-\partial_x \xi \cdot \partial_x v + \partial_z v + O(\xi^3) \right) \cdot \vec{e}_z;$$

$$\vec{n} \cdot ((\vec{n} \cdot \nabla) \cdot \vec{U}) = -\partial_x \xi \cdot \partial_z u - \partial_x \xi \cdot \partial_x v + \partial_z v + O(\xi^3).$$

Разложение (5) в ряд по z в окрестности $z=0$ с ошибкой порядка $O(\xi^3)$ имеет вид

$$z = 0: \quad p + \xi \cdot \partial_z p + \frac{1}{2} \cdot \xi^2 \cdot \partial_{zz} p - 2\rho v \cdot \partial_z v - 2\rho v \xi \cdot \partial_{zz} v + 2\rho v \cdot \partial_x \xi \cdot (\partial_z u + \partial_x v) + \quad (7.B)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \left((\nabla \Phi)^2 + 2\xi (\nabla \Phi \cdot \partial_z (\nabla \Phi)) + \xi^2 (\partial_z (\nabla \Phi))^2 + \xi^2 (\nabla \Phi \cdot \partial_{zz} (\nabla \Phi)) \right) = \gamma \cdot \text{div}(\vec{n}).$$

Если учесть, что $p = p_0 + p_1 + p_2$, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2$ $\text{div}(\vec{n}) = -\partial_{xx} \xi + O(\xi^3)$ и что $p_0 = -\rho g z - E_0^2 / (8\pi)$; $\Phi_0 = -E_0 \cdot z$, то (7.B) распадается на соотношения для величин различных порядков малости:

$$z = 0: \quad -\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho v \cdot \partial_z v_1 + \gamma \cdot \partial_{xx} \xi_1 - \frac{E_0}{4\pi} \cdot \partial_z \Phi_1 = 0;$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho v \cdot \partial_z v_2 + \gamma \cdot \partial_{xx} \xi_2 - \frac{E_0}{4\pi} \cdot \partial_z \Phi_2 =$$

$$= 2\rho v \cdot \xi_1 \cdot \partial_{zz} v_1 - \xi_1 \cdot \partial_z p_1 - \frac{1}{8\pi} \cdot ((\partial_x \Phi_1)^2 + (\partial_z \Phi_1)^2) + \frac{E_0}{4\pi} \cdot \xi_1 \cdot \partial_{zz} \Phi_1.$$

4. Разложение условия (7) окрестности невозмущенной поверхности жидкости с необходимой точностью имеет вид

$$z=0: \quad \Phi + \xi \cdot \partial_z \Phi + \frac{1}{2} \cdot \xi^2 \cdot \partial_{zz} \Phi = 0.$$

Это соотношение легко разбивается на порядки малости:

$$z=0: \quad \Phi_0 = 0; \quad \Phi_1 - E_0 \cdot \xi_1 = 0; \quad \Phi_2 - E_0 \cdot \xi_2 = -\xi_1 \cdot \partial_z \Phi_1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С. Вспомогательные матрицы-столбцы, возникающие в задаче второго порядка малости.

Значения величин S , S_2 , q , q_1 , q_2 , D вычисляются с помощью выражений (25) – (26).

1. Матрицы-столбцы $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_6$, входящие в (27), (28):

$$\mathbf{A}_1 = -4\nu^2 k^3 \cdot q_1 \cdot \begin{bmatrix} q_2 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -k \cdot (S_2^2 + D^2) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_3 = \nu k \begin{bmatrix} 2(\bar{S} + 2\nu k^2) q_1 q_2 + (S_2 + iD)(q_2^2 - q_1^2 + k^2) \\ -2 \cdot i \cdot k \cdot (k + q)(S_2 + i \cdot D) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -i\nu k (q - k)^2 (S + 2\nu k^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ N_0 \\ M_0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} \Omega_1 + i\Omega_2 \\ N_1 + iN_2 \\ M_1 + iM_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \bar{S} &= S_1 - iS; \\ \Omega_1 &= k(D - 2\nu k q_1); \\ \Omega_2 &= k(S_2 - 2\nu k q_2); \end{aligned}$$

$$N_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \left(S_1^2 - S_2^2 + 4vk^2 S_1 + 4v^2 k^2 (k^2 - q_1^2 + q_2^2) \right);$$

$$N_1 = N_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 E^2}{4\pi}; \quad N_2 = \rho \left(S_2 \cdot D - 4v^2 k^2 q_1 q_2 \right);$$

$$M_0 = k \left(kS_2 - q_2 (3k^2 + q_2^2 - 3q_1^2) \right);$$

$$M_1 = -k \left(3kS_2 - q_2 (5k^2 - q_2^2 + 3q_1^2) \cdot v \right);$$

$$M_2 = k \left(3kS_1 + v (6k^3 - 5k^2 q_1 + 3q_2^2 q_1 - q_1^3) \right).$$

2. Квадратные матрицы $\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{\Pi}_4$, входящие в (35):

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 2(S_1 - 2vq_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2q_1}{\rho} \\ 0 & 2q_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} 2(S_1 - 2vq_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{\rho} \\ 0 & 2k & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Pi}_3 = \begin{bmatrix} 2S_1 - v(k+q)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(k+q)}{\rho} \\ 0 & k+q & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 2S + v(3k^2 - 2kq - q^2) & 0 & -\frac{2ik}{\rho} \\ 0 & 2S + v(3k^2 - 2kq - q^2) & \frac{(k+q)}{\rho} \\ -2ik & k+q & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Матрица Λ , входящая в (40) и Λ_ζ , входящая в (52):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4i\rho\nu k \sqrt{2\left(2k^2 + \frac{S}{\nu}\right)} & -2k & 2S & 0 \\ -2\rho(S + 4\nu k^2) & -(\rho g + 4\nu k^2) & \frac{kE_0}{2\pi} & \\ 8k^2 + 2\frac{S}{\nu} & -8ik^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_\zeta = \begin{bmatrix} 4i\rho\nu k \sqrt{2\left(2k^2 + \frac{S}{\nu}\right)} & -2k & C_4[2] + \Omega & 0 \\ -2\rho(S + 4\nu k^2) & 2C_4[2] \cdot \rho\nu(k + q) - C_4[3] + N & \frac{kE_0}{2\pi} & \\ 8k^2 + 2\frac{S}{\nu} & -8ik^2 & 2iC_4[2] \cdot k - C_4[1] \cdot (k + q) + M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{kE_0}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$; $N = N_1 + iN_2$; $M = M_1 + iM_2$ определены через параметры, определенные в пункте 1 текущей части приложения, а $C_m[n]$ – n -й элемент C_m – столбца (см.(37)).

3.1.2. Формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности вязкой жидкости

Полученное в предыдущем пункте решение задачи о форме периодической капиллярно-гравитационной волны на поверхности вязкой глубокой жидкости имеет значительную ценность для теории распространения волн, поскольку это первое указание на ошибочность выражения, предложенного в качестве решения этой задачи Харисоном [118] 1908 г. Ошибка Харисона в течение века оставалась не выявленной, а его работа не стала основой для исследования задач с плоской свободной поверхностью, когда необходимо учитывать диссипативные эффекты. В связи со сказанным, интересно рассмотреть некоторые свойства полученного решения при отсутствии на поверхности жидкости электрического заряда.

1. Сравнение найденного решения с известными. Полученное в предыдущем пункте решение интересно сравнить с результатами А.Х. Найфе, который исследовал аналогичную

задачу, сформулированную для идеальной жидкости [63]. В этом случае, согласно [63], прямое разложение решения в квадратическом по амплитуде отклонения поверхности от равновесной формы приближении приводит к следующему результату:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\theta_0) + a^2 \cdot \Lambda_0 \cdot \cos(2\theta_0); \quad \Lambda = \frac{1}{2} k \frac{(\rho g + \gamma k^2)}{(\rho g - 2\gamma k^2)};$$

$$\theta_0 = \omega_0 t - kx. \quad (55)$$

Если $\gamma = 0$, то решение (55) превращается в волну Стокса [64]. Несложно показать, что при $\nu \rightarrow 0$ выражение для профиля волны в вязкой жидкости (52) переходит в соответствующее для идеальной жидкости (53).

При сравнении решений для вязкой жидкости (52) и для идеальной жидкости (55) выяснилось, что они наиболее существенно различаются при значениях безразмерных параметров соответствующих резонансному взаимодействию мод. Для невязкой жидкости из (55) видно, что при $\gamma k^2 = 0.5 \cdot \rho g$ добавка, квадратичная по амплитуде волны первого приближения, становится бесконечно большой, и получается, что главная мода резонансно раскачивает волну с вдвое меньшей длиной.

На рис. 1 в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, построены амплитуды вторых слагаемых решений (52) и (55) при безразмерных значениях $\nu = 10^{-3}$ и $a = 0.01$ в зависимости от безразмерного поверхностного натяжения γ . Выбранный набор безразмерных переменных позволяет сравнить вязкую и невязкую модели межмодового резонанса для волны на поверхности воды с длиной 2.4 см и амплитудой 0.3 мм . Из рисунка видно, что в далекой от резонанса области безразмерных параметров решения (52) и (55) совпадают. Вблизи резонансного безразмерного значения $\gamma = 0.5$ в решении задачи с учетом вязкости становится отличным от нуля коэффициент при $\text{Re}(\zeta_2)$ при $\sin(2\theta)$. Это смещает фазу волны, найденной во втором порядке приближений, по отношению к фазе основной волны. Амплитуда квадратичной добавки остается меньше амплитуды основной волны $a = 0.01$ даже при резонансном значении $\gamma = 0.5$. Это означает,

что решение (52) в данном случае пригодно при всех значениях γ , тогда как решение (55), основанное на приближении невязкой жидкости, предсказывает резонансно высокую амплитуду.

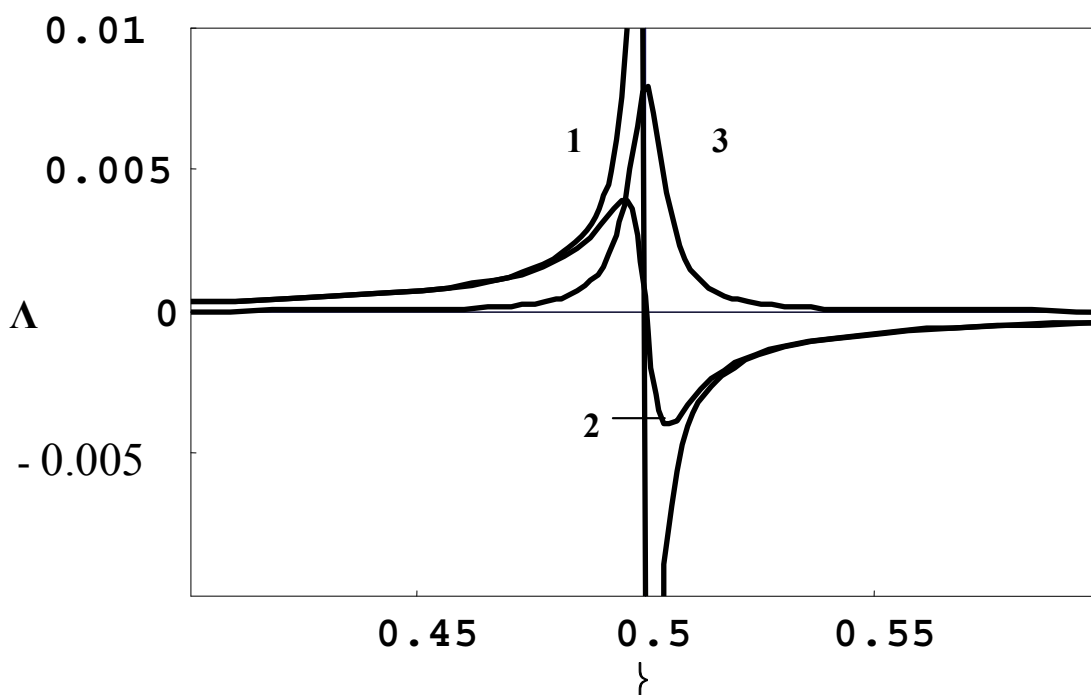


Рис. 1. Зависимости входящих в (52), (53) амплитуд безразмерных квадратичных добавок $\Delta(\gamma)$ к профилю волны при $W = 0$ от величины безразмерного поверхностного натяжения; 1 – для идеальной жидкости; 2 – $\Delta_1(\gamma) = a_2 \zeta_1(\gamma)$, 3 – $\Delta_2(\gamma) = a_2 \zeta_2(\gamma)$: для вязкой жидкости соответственно при $\nu = 10^{-3}$

2. Примеры расчета профиля волны. Расчеты показали, что на воде профили волн неколорезонансной длины $\lambda \neq 2.4 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$, полученные по формуле (55), и профили, рассчитанные при тех же значениях параметров в момент времени $t = 0$ по формуле (52), различаются весьма незначительно, но с течением времени различие в высоте волн (52) и (55) быстро растет. Благодаря вязкости, значение амплитуды волны (52) снижается, причем амплитуда составляющей первого порядка малости уменьшается пропорционально $\exp(-S_1 \cdot t)$, где $S_1 < 0$, а амплитуда добавки второго порядка малости уменьшается как квадрат этой экспоненты. В результате с течением времени, кроме снижения значения амплитуды волны, отмечается еще и изменение формы ее профиля. На рис. 2 приведен пример

профиля нелинейной волны на воде с длиной $\lambda = 2\text{ cm}$ и $a = 0.3\text{ cm}$. Пунктиром построен профиль, рассчитанный без учета вязкости по формуле (55). Он с точностью до толщины линий рисунка совпадает с профилем, найденным в момент времени $t = 0$ по формуле (52), учитывающей вязкость. Согласно (52) за время $t = 5\text{ s}$ амплитуда уменьшится примерно вдвое (профиль изображенный сплошной линией). Кроме того, нижняя впадина профиля за это время поднимается над нулевым уровнем, изменяя характер профиля.

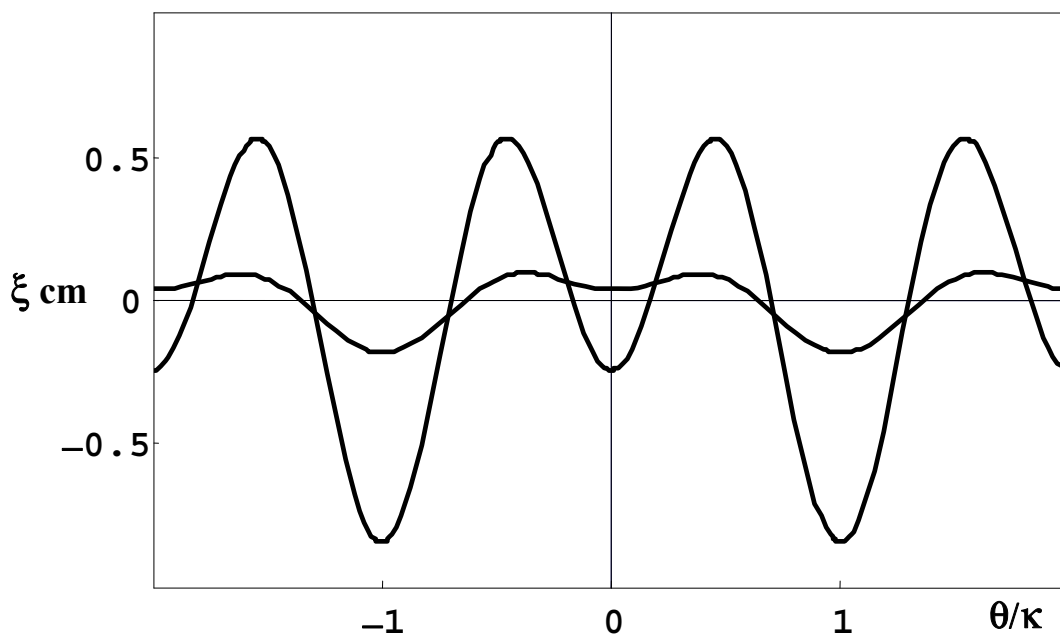


Рис. 2. Профили волн длины $\lambda = 2\text{ cm}$ на воде, рассчитанные по формуле (52) при $\rho = 1\text{ g/cm}^3$, $\gamma = 72\text{ dyn/cm}$, $\nu = 0.01\text{ cm}^2/\text{s}$, $g = 9.81\text{ cm/s}^2$, $W = 0$ в различные моменты времени: $t = 0\text{ s}$ (профиль с большой амплитудой) и $t = 5\text{ s}$. Единицы измерения по вертикальной и горизонтальной оси – сантиметры

Из рис. 3 видно, что оба выражения (52) и (55) непригодны для описания профиля околорезонансной волны, длина которой в данном случае $\lambda = 2.5\text{ cm}$. Действительно, при $a = 3\text{ mm}$ добавка, которая должна иметь второй порядок малости, дает вклад, увеличивающий амплитуду почти до 3 cm .

3. Влияние вязкости на симметрию профиля волны. В приближении идеальной жидкости (55) профиль волны – последовательность больших и малых горбов, симметричных относительно вертикали, проходящей через их вершину. Можно сказать: передний и задний (по отношению к направлению распространения волны) склоны горбов имеют одинаковую крутизну. Благодаря вязкости симметрия нарушается. Но обнаружить это удастся только при довольно больших значениях вязкости. Из рис. 4 видно, что для жидкости, близкой по свойствам к воде, но с $\nu = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ (это в десять раз больше, чем у воды), асимметрия горбов становится заметной, а при $\nu = 0.5$ значительной. Из рис. 4 видно, что у волны с длиной $\lambda = 2.6 \text{ cm}$ для большого горба задний склон круче переднего, а для малого наоборот. Вязкости жидкостей, имеющих в нормальных условиях плотности, близкие к плотности воды, и поверхностные натяжения, близкие к 50 dyn/cm , могут существенно различаться – от $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ для воды, до $\nu = 7 \text{ cm}^2/\text{s}$ для глицерина. По-видимому, раствор со свойствами, при которых построен рис. 4 можно получить, смешивая в определенных пропорциях жидкости с разными вязкостями.

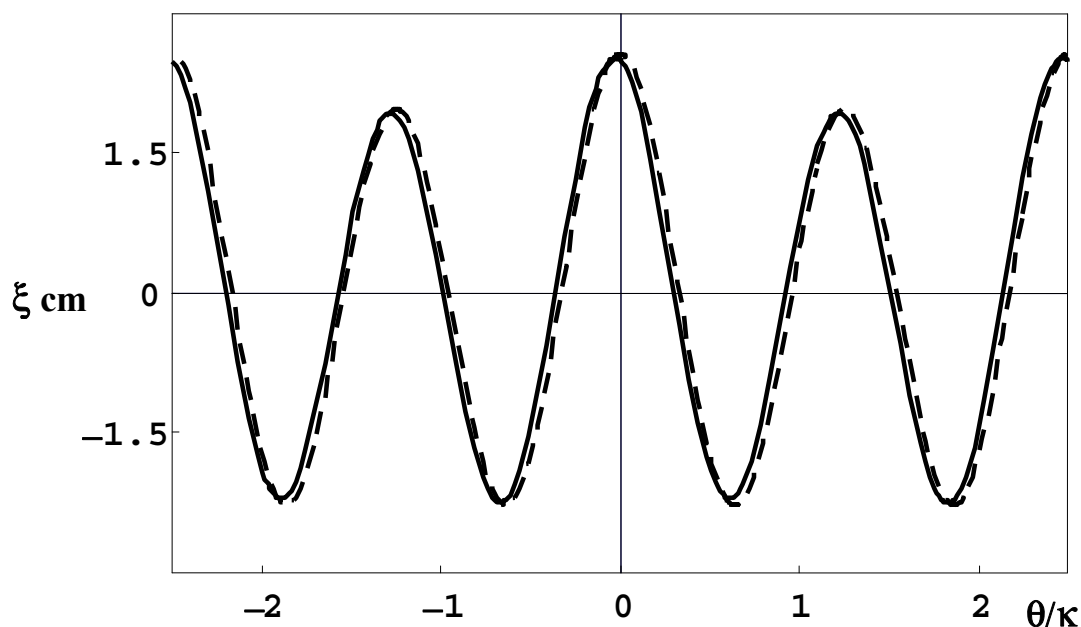
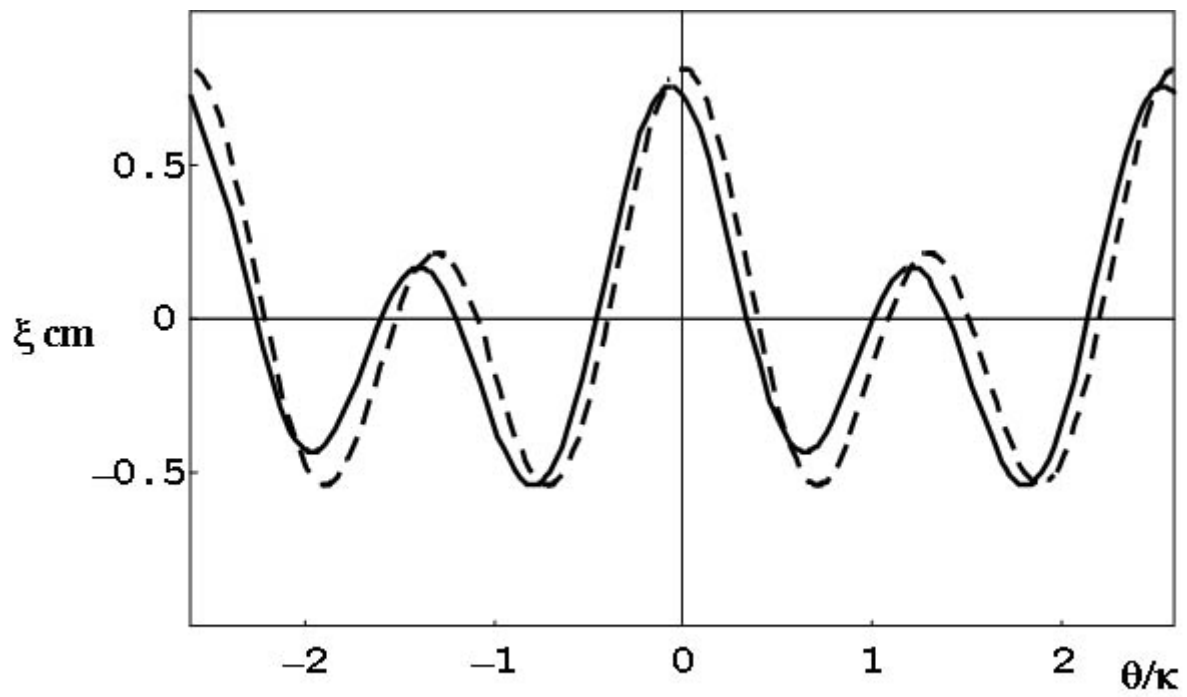
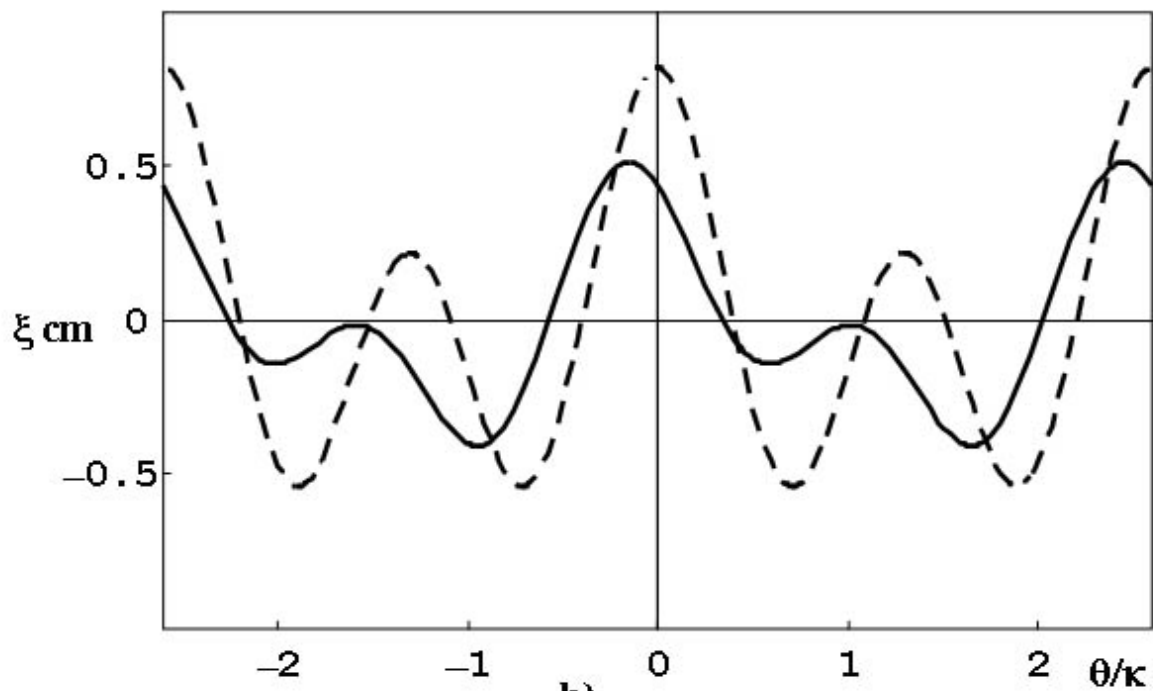


Рис. 3. Профили волн на воде с длиной $\lambda = 2.5 \text{ cm}$, близкой к резонансной 2.4 cm , рассчитанные при $W = 0$ и $t = 0 \text{ s}$ по формулам: сплошная линия – (52) и пунктирная линия – (53)



a)



b)

Рис. 4. Профили волны длины $\lambda = 2.6 \text{ cm}$ на поверхности жидкости при $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\gamma = 60 \text{ dyn/cm}$, $g = 9.81 \text{ cm/s}^2$, рассчитанные при $W = 0$ и $t = 0 \text{ s}$ по формулам: сплошная линия – (52); пунктирная линия – (53); а) – $\nu = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$; б) – $\nu = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$

4. Заключение. Полученное корректное в квадратичном по амплитуде волн приближении асимптотическое решение задачи распространения волн по поверхности бесконечно глубокой жидкости произвольной вязкости обобщает понятие "волны Стокса" (определенное для идеальной жидкости) на случай вязкой жидкости. Сравнение найденного решения с решением для идеальной жидкости показывает, что даже малая вязкость играет существенную роль в формировании профиля волны, причем роль вязкости в исследовании временной эволюции нелинейных волн повышается с ростом порядка малости, в котором ищется решение. Учет вязкости приводит к существенному изменению картины реализации резонансного межмодового взаимодействия волн и нарушает симметрию профиля волны.

3.1.3. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной свободной поверхности маловязкой жидкости

Выражение (52) для профиля периодической капиллярно-гравитационной волны на поверхности вязкой электропроводной жидкости весьма громоздко для качественного исследования. Трудность проведения наглядного исследования осложняется не только большим количеством исходных переменных и вспомогательных величин, но и тем, что в него входит действительная и мнимая часть комплексной частоты, определяемой как один из корней трансцендентного уравнения, выбранный из множества других корней в соответствии с определенными правилами. Даже компьютерное исследование выражения (52) связано с трудностью правильной идентификации корня дисперсионного уравнения в программном режиме. В настоящем пункте будет построено выражение для профиля волны в приближении малой вязкости и даны удобные для практического использования формулы вычисления корней дисперсионного уравнения.

1. Асимптотический анализ в пределе малой вязкости. Представление комплексной частоты в виде ряда по степеням безразмерной вязкости. Чтобы найти аналитические асимптотические выражения для коэффициентов ζ_1 и ζ_2 , фигурирующих в (52), необходимо взять асимптотику найденного решения к ма-

лой вязкости. Для этого разложим дисперсионное уравнение задачи по степеням вязкости. Введем в рассмотрение величины

$$\omega_0 = \sqrt{kg(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha kW)}; \quad r_0 = \sqrt{kg(\alpha kW - 1 - \alpha^2 k^2)}.$$

Значения ω_0 вещественны при докритических значениях W , а r_0 при закритических W . В физическом смысле ω_0 представляет частоту волнового движения на поверхности идеальной жидкости; r_0 – инкремент нарастания неустойчивости по отношению к избытку поверхностного заряда для идеальной жидкости при закритических W .

Разделим обе части дисперсионного уравнения (23) на ω_0 в случае докритических W и на r_0 при закритических значениях W :

$$(\beta + 2\chi)^2 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\} = 4 \cdot \chi^{3/2} \cdot \sqrt{\beta + \chi} = 0; \quad \text{Re}((\beta + 2\chi)^2 + 1) > 0; \quad (57)$$

$$\beta = \left\{ \begin{matrix} S/\omega_0 \\ S/r_0 \end{matrix} \right\}; \quad \chi = \left\{ \begin{matrix} vk^2/\omega_0 \\ vk^2/r_0 \end{matrix} \right\}. \quad (58)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$\left\{ \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} Q, \text{ если } W < \alpha k + (\alpha k)^{-1}; \\ R, \text{ если } W < \alpha k + (\alpha k)^{-1}. \end{matrix} \right. \quad (59)$$

Видно, что в (57), кроме численных коэффициентов, имеются только две безразмерные переменные: безразмерная частота β и безразмерная вязкость χ .

Для определенности рассмотрим дисперсионное уравнение (57) в докритическом по W случае

$$(\beta + 2\chi)^2 + 1 = 4 \cdot \chi^{3/2} \cdot \sqrt{\beta + \chi} = 0; \quad \text{Re}((\beta + 2\chi)^2 + 1) > 0. \quad (60)$$

Пусть $\chi \ll 1$. Найдем разложение по степеням χ для корня дисперсионного уравнения (60), который стремится к $\beta = i$ при $\chi \rightarrow 0$.

Для этого примем, что

$$\beta = i + \sigma; \quad \lim_{\chi \rightarrow 0} (\sigma) = 0.$$

Квадратный корень из правой части (60) имеет две аналитические ветви

$$\sqrt{\beta + \chi} = \sqrt{i} \cdot \sqrt{1 - i(\chi + \sigma)} = \pm \frac{i+1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - i(\chi + \sigma)}, \quad (61)$$

которые представляются рядами по целым степеням малого параметра $(\chi + \sigma)$ (при вычислении квадратного корня $\sqrt{1 - i(\chi + \sigma)}$ для определенности выбирается та его ветвь, на которой он равен единице при $\chi + \sigma = 0$). Выбирая ветвь функции $\sqrt{\beta + \chi}$, действительная часть которой положительна при малых в сравнении с единицей (в том числе и при нулевых) значениях параметра $\chi + \sigma$, получаем дисперсионное уравнение в виде

$$(i + \sigma + 2\chi)^2 + 1 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (i+1) \cdot \chi^{3/2} \cdot \sqrt{1 - i(\chi + \sigma)}.$$

Представим σ в виде двух слагаемых: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 \sim o(\chi)$, другое σ_1 остается неопределенным. При подстановке $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ в (60) его левая часть примет асимптотический вид $2i(\sigma_1 + 2\chi) + o(\chi)$, а правая будет иметь порядок $\chi^{3/2}$. В итоге в линейном по χ приближении получим $\sigma_1 = -2\chi$:

$$\beta = i - 2\chi + \sigma_2; \quad \sigma_2 = o(\chi). \quad (62)$$

В результате подстановки (61), (62) в (60) получается соотношение

$$\sigma_2(\sigma_2 + 2i) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (i+1) \cdot \chi^{3/2} \cdot \sqrt{1 + i(\chi - \sigma_2)}. \quad (63)$$

Для правой части, с учетом (62), получается

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot (i+1) \cdot \chi^{3/2} \cdot \sqrt{1 + i(\chi - \sigma_2)} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (i+1) \cdot \chi^{3/2} + \sqrt{2} \cdot i \cdot (i+1) \cdot \chi^{5/2} + o(\chi^{5/2}).$$

Однозначно выделились два первых главных члена, которые оказались пропорциональны $\chi^{3/2}$ и $\chi^{5/2}$. Значит, слагаемые таких же порядков должны быть главными в асимптотическом представлении левой части (63). В итоге в асимптотическом представлении σ_2 выделяются два первых лидирующих порядка:

$$\sigma_2 = \beta_3 \cdot \chi^{3/2} + \beta_5 \cdot \chi^{5/2} + o(\chi^{5/2}).$$

После повторной подстановки σ_2 с выделенными первыми лидирующими слагаемыми в (63) найдем, что наименьший возможный порядок по χ для третьего слагаемого в разложении квадратного корня из (63) есть $O(\chi^3)$. Значит, этот же порядок должен присутствовать в асимптотическом представлении левой части (63):

$$\sigma_2 = \beta_3 \chi^{3/2} + \beta_5 \chi^{5/2} + \beta_6 \chi^3 + o(\chi^3).$$

Процедура последовательного выделения лидирующих слагаемых в представлении для σ_2 может быть продолжена по индукции.

В проведенных рассуждениях ничего не говорилось о значениях β_3 и β_5 . Через них выражаются коэффициенты при более высоких порядках, которые могут оказаться нулевыми (для β_6 так и получается). Однако общая закономерность процедуры выделения лидирующих порядков в представлении для σ_2 состоит в том, что выделение слагаемых каждого следующего порядка связано с возведением в степень или перемножением порядков, выделенных на предыдущем шаге. Процесс выделения начинается с порядков $\chi^{3/2}$ и $\chi^{5/2}$. Поэтому порядок всех следующих членов разложения должен выражаться целой степенью величины $\chi^{1/2}$. Это значит, что без ограничения общности для σ_2 можно использовать представление

$$\sigma_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \beta_n \cdot \chi^{n/2}, \quad (64)$$

в котором некоторые β_n могут быть нулевыми. Корень (60), обращающийся в мнимую единицу $\chi = 0$, нужно искать в виде ряда

$$\beta = i + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \cdot \chi^{n/2}. \quad (65)$$

Подстановка (65) в (60), разложение обеих частей (60) по целым степеням $\chi^{1/2}$ и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях этого параметра приводит к системе уравнений для определения β_n .

Для отыскания коэффициентов β_n в разложениях (64), (65) используем теорему о дифференцировании функции $\beta = \beta(\delta)$, $\delta = \chi^{1/2}$, заданной неявным образом, с помощью (60). При этом появляется возможность найти производные $d^n \beta / d\delta^n$ любого порядка n , а через них выразить коэффициенты Тейлоровского разложения (65).

Аналогичные рассуждения легко провести для дисперсионного уравнения в закритическом по W случае.

В итоге для комплексной частоты S получится выражение

$$S = \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ r_0 \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} i \\ 1 \end{Bmatrix} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \chi_n^{n/2} \right); \quad \chi_n = \begin{Bmatrix} \nu k^2 / \omega_0 \\ \nu k^2 / r_0 \end{Bmatrix};$$

$$r_0 = \sqrt{kg(\alpha k W - \alpha^2 k^2 - 1)}; \quad (66)$$

$$\beta_n = -\frac{1}{n!} \cdot \frac{d}{d\delta^{n-1}} \left(\frac{\partial_{\beta} F(\beta, \delta)}{\partial_{\delta} F(\beta, \delta)} \right) \Bigg|_{\substack{\beta=i \\ \beta=1 \\ \delta=0}}; \quad F(\beta, \delta) = (\beta + 2\delta^2)^2 - 4\delta^3 \sqrt{\beta + \delta^2}. \quad (67)$$

Фигурные скобки используются здесь в смысле (59).

При вычислении β_n по формуле (67) нужно принять во внимание два обстоятельства. Во-первых, при последовательном вычислении полных производных по δ каждый раз, когда в результате дифференцирования составной функции появляется $\beta' = \beta'(\delta)$, эту производную нужно заменять выражением

$$\beta' = -\frac{\partial_{\alpha} F(\beta, \delta)}{\partial_{\delta} F(\beta, \delta)} = \frac{2\delta(-3\beta\delta - 4\delta^3 + (\beta + \delta)^{3/2})}{\delta^3 - (\beta + \delta)^{3/2}}.$$

Во-вторых, выражение, получающееся после вычисления финальной производной, является дробно-рациональной функцией β , δ и $\sqrt{\beta + \delta^2}$. Чтобы вычислить значение этого выражения при $\beta = i$, $\delta = 0$, в качестве \sqrt{i} нужно взять число $(i+1)/\sqrt{2}$. Это обеспечивает соответствие вычисленного коэффициента β_n корню уравнения (60), для которого выполняется условие $\text{Re}((\beta + 2\chi)^2 + 1) > 0$.

При построении ряда (65) использовалось представление в виде ряда для квадратного корня из правой части (61). Этот ряд сходится внутри области $|\chi + \sigma| < 1$. Вместо общего анализа условий сходимости ряда (65) была исследована возможность представления корня уравнения (57) конечной частью ряда (66). Ниже приведены приближенные выражения для частоты S_2 и параметра S_1 , характеризующего декремент затухания при $S_1 < 0$ и инкремент неустойчивости при $S_1 > 0$, полученные из (66) отбрасыванием слагаемых порядка $O(\chi^5)$ и выше:

$$S_2 = \left\{ \omega_0 \left(1 - \sqrt{2} \cdot \chi^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \chi^{5/2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \chi^{7/2} + 2 \cdot \chi^4 - \frac{9}{8\sqrt{2}} \cdot \chi^{9/2} \right) \right\}; \quad (68)$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 \left(-2 \cdot \chi + \sqrt{2} \cdot \chi^{3/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \chi^{5/2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \chi^{7/2} - \frac{9}{8\sqrt{2}} \cdot \chi^{9/2} \right) \\ r_0 \left(1 - 2 \cdot \chi + 2 \cdot \chi^{3/2} - \chi^{5/2} - \frac{1}{4} \cdot \chi^{7/2} + 2 \cdot \chi^4 - \frac{9}{8} \cdot \chi^{9/2} \right) \end{array} \right\}. \quad (69)$$

Численные расчеты показывают, что при $\chi = 0.1$ относительная погрешность формулы (68) составляет 10^{-6} , если учитывать все 6 слагаемых, и 0.002, если ограничиться слагаемыми не выше $\chi^{3/2}$. Для формулы (69) относительная погрешность — 10^{-5} , если учитывать все выписанные слагаемые, 0.015 для декремента и

0.004 для инкремента, если отбросить члены более высокого по сравнению с $\chi^{3/2}$ порядка. Поэтому при $\chi \leq 0.1$ точность, достаточная для практических расчетов, достигается, если ограничиться в (68), (69) порядком $\chi^{3/2}$.

Все выписанные в формулах (68), (69) слагаемые имеет смысл сохранять при значениях, близких к $\nu = 0.5$. При таком значении χ относительная погрешность формулы (68) составляет 0.03, формулы (69) – 0.1 для декремента и 0.02 для инкремента. Эти погрешности заметно растут при дальнейшем увеличении.

2. Асимптотические выражения для профиля нелинейной волны. Приближенные формулы для профиля нелинейной волны в пределе маловязкой жидкости. Для амплитудных параметров ζ_1 и ζ_2 из (52) в пределе малой вязкости несложно получить из точного решения асимптотические формулы:

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}k \frac{(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{1 - 2\alpha^2 k^2} + \left\{ \frac{o(\nu)}{g} \cdot \frac{4k^2}{1 - 2\alpha^2 k^2} \nu \right\}; \quad (70)$$

$$\zeta_2 = \left\{ \frac{k^2 \omega_0}{g} \cdot \frac{2(2 - \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{1 - 2\alpha^2 k^2} + o(\nu) \right\} \cdot 0. \quad (71)$$

Фигурные скобки здесь имеют такой же смысл, как в предыдущем пункте. При $W = 0$, $\nu = 0$ получается решение, которое совпадает с полученным в работах [61 – 63], если в качестве начального условия использовать условие на величину a . Из (70) и (71) видно, что при $\alpha k \rightarrow 1/\sqrt{2}$ амплитудные множители ζ_1 и ζ_2 стремятся к бесконечности. В связи с этим значение $k = k_* = 1/\sqrt{2}$ в [61 – 63] определялось как резонансное.

Формула для профиля волны (52) может быть использована по-разному, в зависимости от способа определения начального условия. В частности, можно проводить нормировку амплитуды a так, чтобы максимум начального отклонения поверхности равнялся исходно заданному значению Λ . Тогда получим выражение

для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны в квадратичном приближении по ε :

$$\xi(x, t) = \xi(\theta, t) = \eta \cdot \cos(\theta) + \eta^2 \cdot (\zeta_1 \cdot \cos(2\theta) - \zeta_2 \cdot \sin(\theta)) \cdot \exp(2T), \quad (72)$$

где значение η подобрано так, что

$$\max(\xi(\theta, 0)) = \Lambda \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (73)$$

Это соотношение играет роль условия нормировки амплитуды. Оно означает, что на отрезке $[0, 2\pi]$ существует значение θ такое, что $\xi(\theta, 0) = \Lambda$ и что при таком θ функция $f(\theta) = \xi(\theta, 0)$ достигает своего максимума. Поскольку структура выражения (72) такова, что $f(\theta)$ имеет конечное число экстремумов, среди которых находится максимум, то для осуществления нормировки можно рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \eta \cdot \cos(\theta) + \eta^2 \cdot (\zeta_1 \cdot \cos(2\theta) - \zeta_2 \cdot \sin(2\theta)) = \Lambda; \\ -\sin(\theta) + 2 \cdot \eta^2 \cdot (-\zeta_1 \cdot \sin(2\theta) + \zeta_2 \cdot \cos(2\theta)) \end{cases}$$

относительно θ и η . Первое уравнение этой системы – условие обращения $\xi(\theta, 0)$ в Λ при некотором θ , а второе уравнение – необходимое условие экстремума функции $f(\theta)$. Среди конечного числа пар (η, θ) решений выписанной системы обязательно имеется та, для которой $\xi(\theta, 0)$ максимально. Значение из этой пары и следует взять.

Следует отметить, что употребление в качестве начального условия высоты волны Λ , включающей составляющие и первого и второго порядков по ε , отличает постановку задачи в настоящей работе от предыдущих работ разных авторов [57-63], в которых за исходное данное принималось значение амплитуды при первом слагаемом в (52).

В пределе идеальной жидкости при $\nu = 0$ форма нелинейной волны в начальный момент времени имеет вид $\xi = \eta \cdot \cos(kx) + \eta^2 \cdot (\zeta_1 \cdot \cos(2kx) - \zeta_2 \cdot \sin(kx))$. Удовлетворяя условию нормировки (73), несложно получить квадратное уравне-

ние относительно η , положительными решениями которого будут

$$\eta = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+4\Lambda\zeta}-1}{2\zeta}, & \text{если } \zeta \geq 0; \\ -\frac{\sqrt{1+4\Lambda\zeta}+1}{2\zeta}, & \text{если } \zeta < 0; \end{cases} \quad \zeta = \frac{1}{4} \cdot k \cdot \frac{(1+\alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{(0.5 - \alpha^2 k^2)}. \quad (74)$$

Такой подход гарантирует, что профиль волны на поверхности идеальной жидкости

$$\xi = \eta \cdot \cos(\theta) + \eta^2 \cdot \zeta \cdot \cos(2\theta)$$

не будет расти по амплитуде при $k \rightarrow k_*$. При приближении значения волнового числа к резонансному значению амплитуда линейного по малому параметру слагаемого в (72) будет стремиться к нулю, а нелинейного к Λ . Несмотря на конечность высоты профиля волны в положении резонанса, разложение (72) при $k = k_*$ теряет асимптотичность: главный член асимптотического представления (72) становится бесконечно малой по сравнению с квадратичной по малому параметру добавкой.

Поскольку ζ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, для возможности вычислений по формулам (74) необходимо, чтобы $4\Lambda|\zeta| \leq 1$.

3. Влияние вязкости на форму свободной поверхности. Влияние вязкости на эволюцию профиля волны двояко. С одной стороны, через вязкость выражается S_1 , которое в зависимости от того, докритично значение W или закритично, описывает декремент затухания или инкремент нарастания амплитуды волны. Несложно также видеть, что отношения S_2/ω_0 и S_1/ω_0 являются функциями только от безразмерной вязкости χ . С другой стороны, от вязкости зависят амплитудные коэффициенты ζ_1 и ζ_2 , через которые выражается решение задачи второго порядка малости (52).

Из асимптотических выражений (70) и (71) видно, что при докритических значениях W параметр ζ_2 наиболее сильно зависит от вязкости ($\zeta_2 \sim O(\nu)$). Условия знакопостоянства этого параметра имеют вид

$$\zeta_2 > 0 \quad \text{если} \quad \begin{cases} W < (\alpha k)^{-1} + \alpha k; \\ 2\alpha^2 k^2 > 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} W > (\alpha k)^{-1} + \alpha k; \\ 2\alpha^2 k^2 < 1; \end{cases}$$

$$\zeta_2 < 0 \quad \text{если} \quad \begin{cases} W > (\alpha k)^{-1} + \alpha k; \\ 2\alpha^2 k^2 > 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} W < (\alpha k)^{-1} + \alpha k; \\ 2\alpha^2 k^2 < 1. \end{cases}$$

Перепишем решение для ξ в форме

$$\xi = [\eta \cdot \cos(\theta) + \eta^2 \cdot \zeta_1 \cdot \cos(2\theta) \cdot \exp(2T)] - \eta^2 \cdot \zeta_2 \cdot \sin(\theta) \cdot \exp(2T).$$

Здесь слагаемое, заключенное в квадратные скобки, представляет собой профиль, симметричный относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Второе слагаемое – профиль, сдвинутый на $\pm \pi/2$ (в зависимости от знака ζ_2) относительно первого. Результирующий профиль будет асимметричен относительно вертикали, проходящей через вершину волны. Степень асимметрии связана с величиной ζ_2 , зависящей от ν , и, таким образом, определяется вязкостью. Направление асимметрии (по движению волны или против) определяется знаком ζ_2 .

Из (70), (71) видно, что при закритических W характер влияния вязкости на форму свободной поверхности совсем иной: благодаря вязкости появляется пропорциональная ей добавка в выражении для ζ_1 , положительная для длинных волн с $2\alpha k < 1$ и отрицательная для коротких $2\alpha k > 1$. Значение ζ_2 при $W > \alpha k + (\alpha k)^{-1}$ равно нулю. Это означает, что при закритических W никакой асимметрии профиля волны нет, а вязкость отвечает за увеличение доли добавки второго порядка малости в выражении для ξ .

На рис. 5 – 9 в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, приведены результаты расчета временной эволюции профилей волн при $k = 1$ и $\nu = 0.03$. Из рисунков видно, что волна, распространяющаяся вправо, в отсутствие электрического заряда имеет профиль, вершина которого "скошена" в сторону, противоположную направлению распространения волны (см. рис. 5). Так ведут себя волны, для которых $\zeta_2 > 0$. При других k может получиться, что $\zeta_2 < 0$. Увеличение W до значения $W = 1$ выравнивает асимметрию (рис. 6). Дальнейшее увеличение W связано со сла-

бым, заметным лишь по форме впадин укрупнением переднего фронта волны (рис. 7). При приближении параметра W к критическому значению $W=2$ выводы, сделанные на основе анализа выражений, полученных при малой вязкости, несправедливы, т.к. при $k=1$ и $W=2$ безразмерная вязкость $\chi=(\nu k^2/\omega_0)\rightarrow\infty$. Однако расчеты, проведенные по точным формулам, показывают, что в окрестности $W=2$ асимметрия профиля волны исчезает.

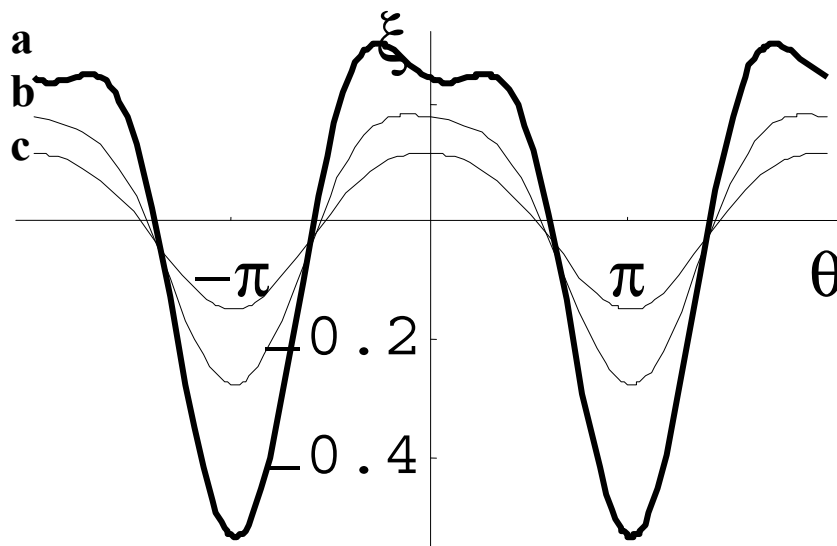


Рис. 5. Профили нелинейных волн, рассчитанные в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$ по (72), (73) при $k=1$, $\nu=0.03$, $\Lambda=0.3$ в различные моменты времени (a – $t=0$; b – $t=10$; c – $t=20$) при $W=0$

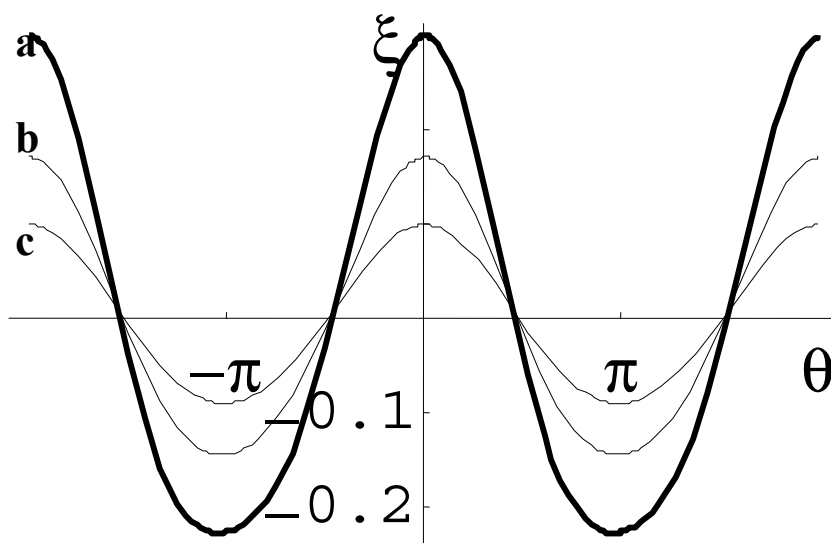


Рис. 6. То же, что на рис. 5, при $W=0.5$

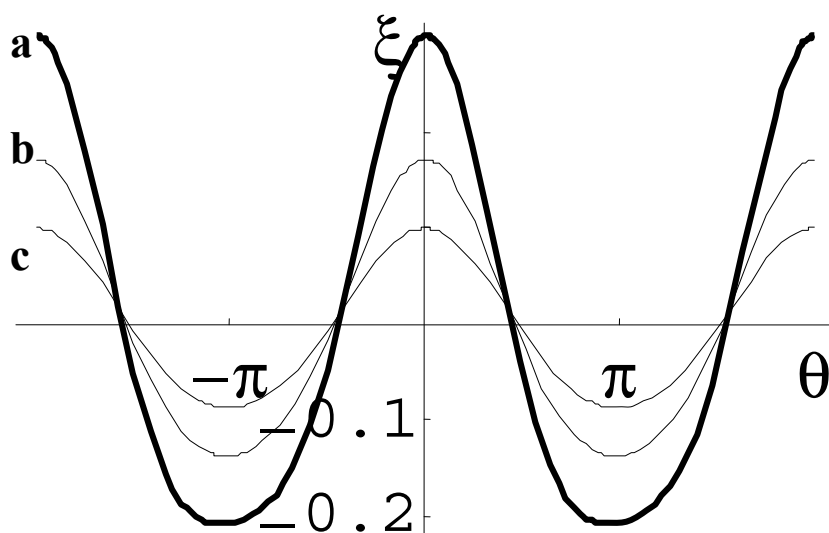


Рис. 7. То же, что на рис. 5 – 6, при $W = 1.7$

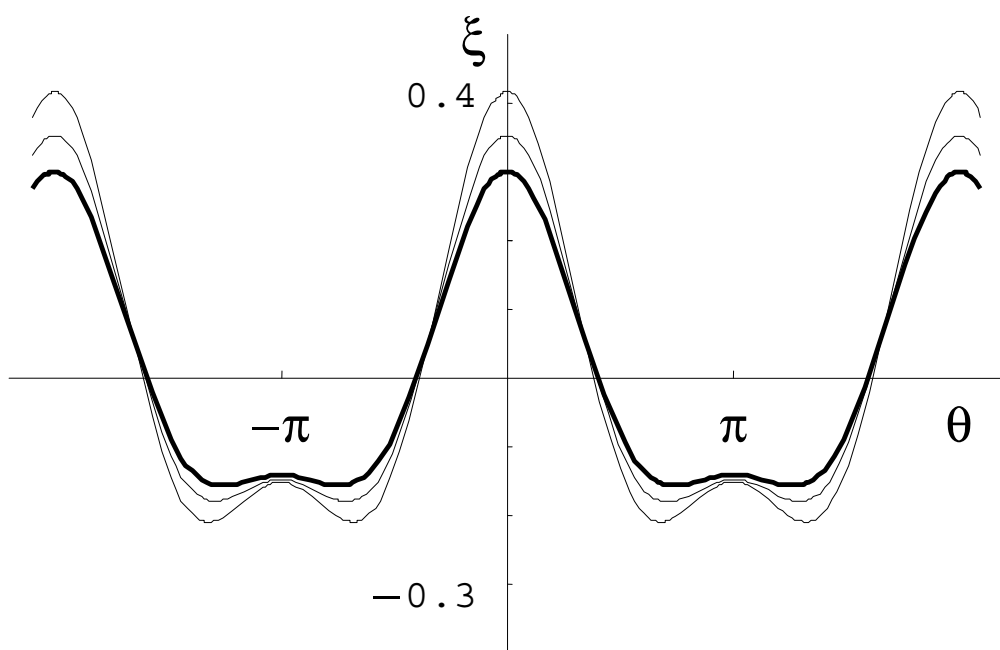


Рис. 8. Форма эмиссионного выступа, развивающегося из начальной деформации равновесной плоской поверхности вида (72) при $k = 1$, $\nu = 0.1$, $\Lambda = 0.3$, $W = 4$ в различные моменты безразмерного времени: а – $t = 0$, б – $t = 0.1$, в – $t = 0.2$. При больших временах амплитуды эмиссионных выступов быстро увеличиваются за счет преимущественного роста нелинейной добавки

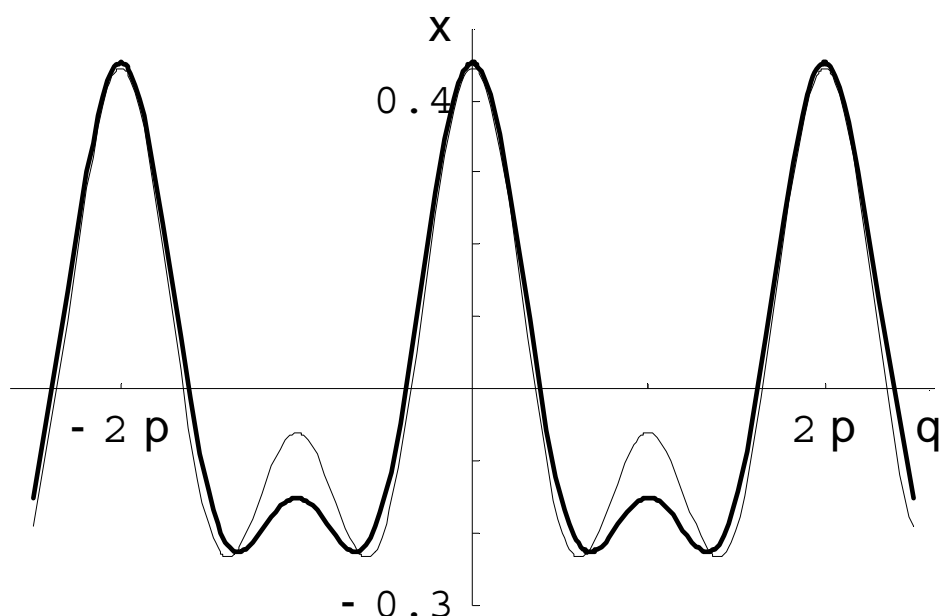


Рис. 9. Форма эмиссионного выступа, развивающегося из начальной деформации равновесной плоской поверхности вида (72) при $k = 1$, $\Lambda = 0.3$, $W = 4$ за время $t = 0.2$. Жирная линия – вязкая жидкость с $\nu = 0.1$; тонкая – идеальная с $\nu = 0$

На рис. 8 показан начальный этап эволюции профиля свободной поверхности при закритическом значении $W = 4$, при $k = 1$ и $\nu = 0.1$. На рис. 9 построена форма выступа на свободной поверхности для закритического значения W , когда $\nu = 0$, и $\nu = 0.1$ через некоторое время после начала его роста. Времена для разных вязкостей использованы разные и подобраны так, чтобы выступы достигли одной и той же высоты. При $\nu = 0$ эта высота достигается за $t = 0.20$, а для $\nu = 0.1$ за большее время $t = 0.25$. Из рисунка видно, что при одной и той же высоте выступ на поверхности вязкой жидкости имеет немного более широкую вершину и менее развитое пикообразное образование во впадине. Это связано с тем, что при безразмерном значении $k = 1$ получается, что $2\alpha^2 k^2 > 1$ и множитель при ν в (46) отрицателен. Для тех значений k , для которых $2\alpha^2 k^2 < 1$, этот множитель будет положителен, значит ζ_1 будет больше, чем в случае идеальной жидкости. что приведет к небольшому сужению эмиссионного выступа.

4. Заключение. Нелинейные периодические капиллярно-гравитационные волны на заряженной свободной поверхности вязкой электропроводной жидкости существенно отличаются от ранее исследованных нелинейных волн на заряженной поверхно-

сти идеальной жидкости. Это отличие обусловлено наличием поверхностного заряда и влиянием вязкости. При докритическом в смысле устойчивости свободной поверхности по отношению к избытку электрического заряда значении поверхностной плотности заряда наличие вязкости приводит к появлению асимметрии профиля волны по отношению к вертикальной прямой, проходящей через ее вершину и увеличивающейся с ростом вязкости. При закритическом значении поверхностной плотности заряда влияние вязкости приводит к изменению формы эмиссионных выступов на свободной заряженной поверхности жидкости на начальной стадии развития неустойчивости. Вершина выступа, развивающегося из виртуального возмущения коротковолнового диапазона оказывается более уплощенной по сравнению с выступом на поверхности идеальной жидкости, а в случае выступа, развивающегося из длинноволнового диапазона – более заостренной. Интересно, что декремент затухания нелинейной поправки к профилю волны в два раза больше декремента затухания линейной по малому параметру ее компоненты.

3.1.4. Влияние поверхностного заряда на формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности вязкой жидкости

1. Условие (52) выделяет на плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$ область неустойчивых волновых чисел (область над кривой L , см. рис. 10). Величина $W_* = 2$, соответствующая на кривой L значению $\alpha k = 1$, является наименьшим значением W , лежащим на границе устойчивости. При $W = W_*$ становится неустойчивой волна $\zeta = a \cdot \cos(S_2 t - kx) \cdot \exp(T)$ со значением волнового числа $k = \alpha^{-1}$. Эту волну называют основной модой. Чем больше W , тем более широкий спектр синусоидальных волновых решений линеаризованной задачи становится неустойчивым. С ростом W спектр неустойчивых волн расширяется как в сторону малых, так и в сторону больших волновых чисел. В рамках представлений линейной теории все неустойчивые волны участвуют в формировании эмиссионных выступов. Это означает, что с ростом W основания эмиссионных выступов должны расширяться. Сравнение же результатов наблюдений экспериментальных работ

[4], где зафиксировано образование эмиссионных выступов при существенно различных значениях напряженности поля (при различных W), этого вывода не подтверждает. Ясно, что механизм включения длинных волн в процесс образования эмиссионных выступов в реальности имеет определенные ограничения, которые нельзя сформулировать в рамках линейной теории.

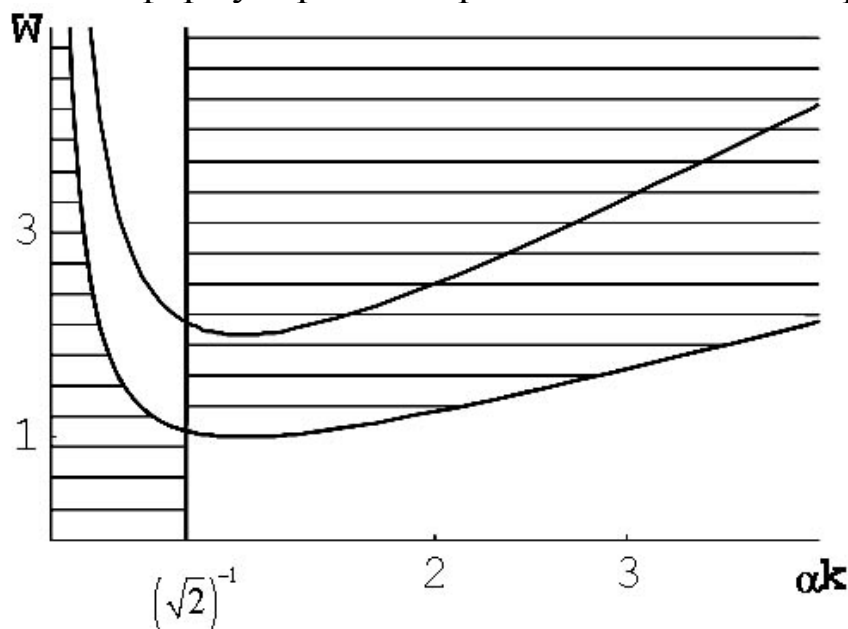


Рис. 10. Области реализации различных режимов нелинейного волнового движения. Область над кривой L – неустойчивые решения. В заштрихованных областях, ограниченных кривой Γ и прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$, волны имеют заостренные вершины. В незаштрихованных областях волны имеют притупленные вершины

Нелинейное решение (52) позволяет взглянуть на образование эмиссионных выступов с иной точки зрения. Главная идеализация, используемая линейной теорией, состоит в предположении о справедливости принципа суперпозиции. На самом деле, эмиссионный выступ формируется не просто за счет сложения волновых решений линейной задачи, но и за счет роста амплитуды нелинейных волн, описываемых выражениями типа первого слагаемого (52). При этом форма профиля волны изменяется за счет преимущественного увеличения амплитуды второго слагаемого в фигурных скобках (52). Несложно видеть, что при $S_1 > 0$ амплитуда нелинейного по амплитуде a слагаемого растет во времени с вдвое большим инкрементом, чем амплитуда линейного по амплитуде слагаемого. За короткое время определяющим в формировании

эмиссионного выступа становится не решение линейной задачи, а добавка к нему, отвечающая нелинейному характеру волны.

Решение (52) можно рассматривать как модельное, в котором в начальный момент времени профиль волны описывается в первом приближении только одной гармоникой, разрешающей линейную задачу. В общем случае, когда начальный профиль представляется суперпозицией ряда таких гармоник, решение существенно усложнится, и вместо второго слагаемого в фигурных скобках формулы (52) получится сумма всевозможных волн, порождаемых трехмодовым волновым взаимодействием [57 – 58]. Их инкременты определяются парными произведениями инкрементов изначальных волн. Поэтому скорость роста у них будет больше, чем у волн первого приближения, и формирование эмиссионных выступов определяют волны, порожденными нелинейным взаимодействием.

2. На плоскости безразмерных параметров $(\alpha k, W)$, на которой построена граница устойчивости решений линейной задачи, изобразим кривую Γ , определяемую уравнением (рис. 10)

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\alpha k + \frac{1}{\alpha k} \right) - W = 0. \quad (75)$$

Из (53) следует, что на этой кривой обращается в нуль амплитуда второго порядка малости $\Lambda = 0$ и с точностью до величин третьего порядка малости профиль периодической волны при $(\alpha k, W) \in \Gamma$ в пределе идеальной жидкости оказывается синусоидальным без каких-либо добавок. Расчеты по формуле (52) показывают, что в случае вязкой жидкости на этой кривой достигается локальный минимум величины A (в котором A близко к нулю) как функции параметров $(\alpha k, W)$.

Следующий момент, на который интересно обратить внимание, определяется ролью фазы β , входящей в (52). Из (52) и (53) следует, что значению фазы, близкому $\beta = 0$, при $A \neq 0$ отвечает волна, которая, благодаря синфазности между $a \cdot \cos(\theta)$ и коротковолновой нелинейной добавкой $a^2 A \cdot \cos(2\theta)$, имеет большую, по сравнению с волной первого приближения, кривизну вершины (вершина волны в нелинейном приближении заостряется). При $\beta = \pi$, $A \neq 0$ вершина, наоборот, округляется.

Анализируя выражение для амплитуды нелинейной добавки Λ , несложно видеть, что

$$\Lambda > 0, \text{ если } \begin{cases} 2\alpha^2 k^2 < 1; \\ 2W < \alpha k + (\alpha k)^{-1}; \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} 2\alpha^2 k^2 > 1; \\ 2W > \alpha k + (\alpha k)^{-1}; \end{cases}$$

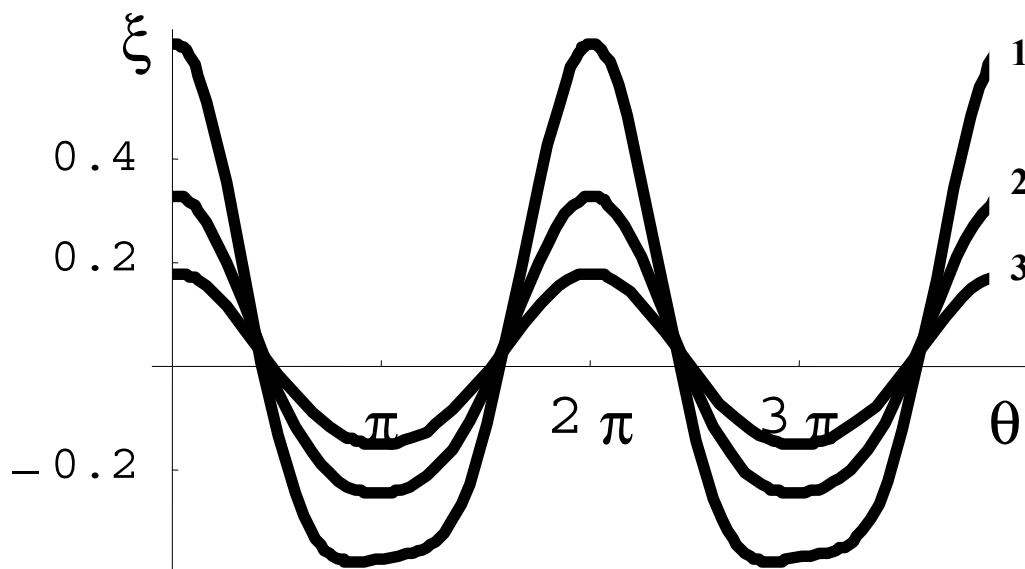
$$\Lambda < 0, \text{ если } \begin{cases} 2\alpha k^2 < 1; \\ 2W > \alpha k + (\alpha k)^{-1}; \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} 2\alpha k^2 > 1; \\ 2W < \alpha k + (\alpha k)^{-1}. \end{cases}$$

Это означает, что плоскость изменения параметров $(\alpha k, W)$ пересечением линии Γ и прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$ делится на четыре области, ограниченные углами, каждый из которых имеет прямолинейную и криволинейную стороны (рис. 10). В пределе $\nu \rightarrow 0$ противоположащие пары углов ограничивают области с одним и тем же значением фазы β . В заштрихованных областях фаза $\beta = 0$, а нелинейные волны имеют заостренные вершины (см. рис. 11а, с). Другой паре областей соответствует фаза $\beta = \pi$, а вершины нелинейных волн сглажены (см. рис. 11 b, d).

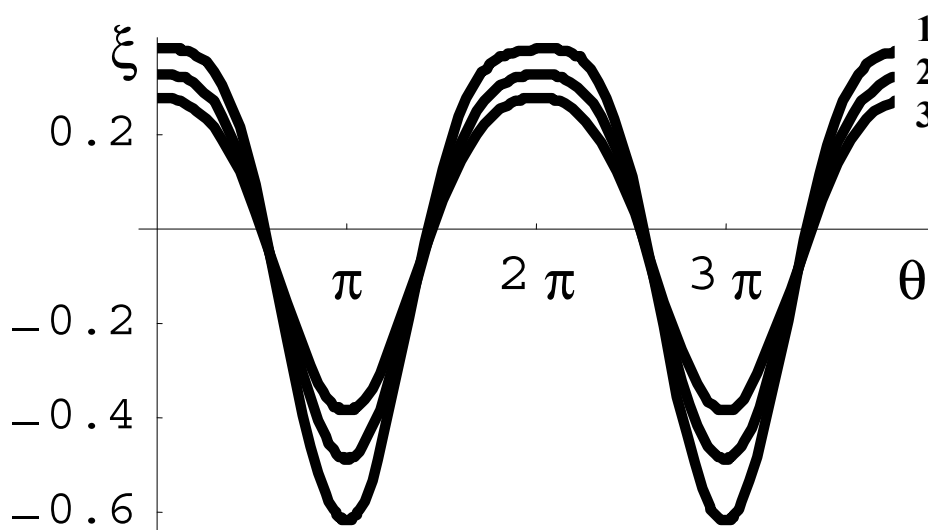
В пределе $a \rightarrow \infty$ фаза на сторонах углов изменяется скачком. Если учитывать вязкость, стороны углов на плоскости $(\alpha k, W)$ "расплываются" в полосы, в которых фаза плавно изменяет свое значение.

3. Из рис. 10 видно, что область неустойчивости решений линейаризованной задачи (область над линией L) прямой $\alpha k = 1/\sqrt{2}$ делится на две части. Развитие неустойчивости волны типа (52) происходит с формированием заострения на вершине, если $\alpha k > 1/\sqrt{2}$ (рис.11с), и с уплощением вершины при $\alpha k < 1/\sqrt{2}$ (рис.11d). Электрическое поле отрывает с вершин выступов капельки с характерным линейным размером порядка радиуса кривизны вершины [11]. Поэтому эмиссия капелек с заостренной вершины, связанная с отрывом более мелких и более сильно заряженных, более вероятна по сравнению с отрывом капель с уплощенной вершины волны. После начала эмиссии временная эволюция волн начинает подчиняться новым закономерностям, которые необходимо исследовать отдельно. Таким образом, анализ нелинейного решения задачи приводит к естественному ограни-

чению со стороны длинных волн на длины волн, участвующих в формировании эмиссионных выступов.



a) ($k=1$)



b) ($k=0.6$)

Рис. 11 а, б. Профили нелинейных волн, построенные в различные моменты времени в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, при $\nu = 0.01$. Амплитуда волн уменьшается со временем за счет влияния вязкого затухания, ввиду докритичности значения параметра Тонкса-Френкеля $W = 1.5$. $t=0$ (1), $t=30$ (2), $t=60$ (3)

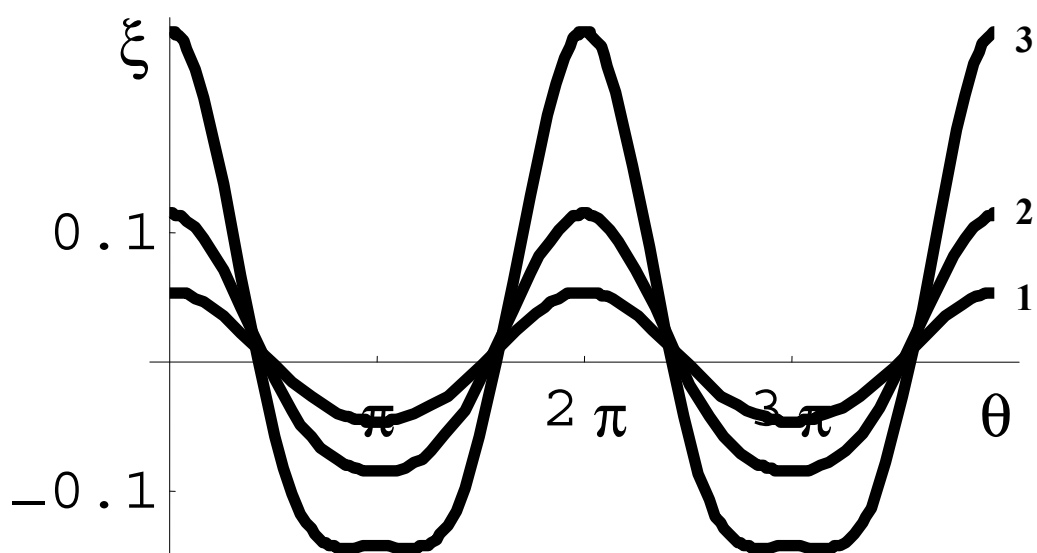


Рис. 11 с ($k=1$)

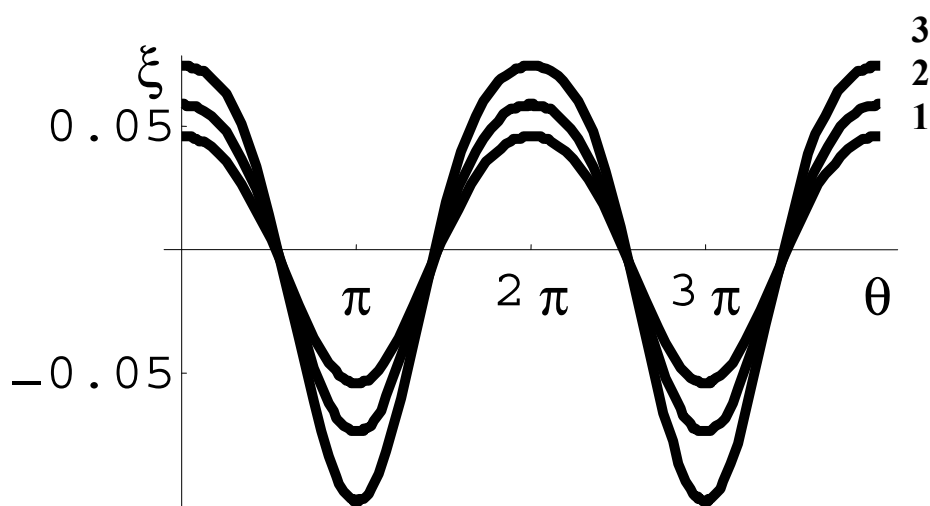


Рис. 11 d ($k=0.6$)

Рис. 11 с,d. Профили нелинейных волн, построенные в различные моменты времени в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, при $\nu = 0.01$. Амплитуда волн увеличивается со временем за счет влияния вязкого затухания, ввиду закритичности значения параметра Тонкса-Френкеля $W = 2.5$. $t=0$ (1), $t=1$ (2), $t=2$ (3).

Влияние вязкости и нелинейности на критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости в использованном квадратичном приближении не проявляется. Оно

проявится в расчетах следующего порядка малости в виде поправок к частотам волн.

4. Полученное выражение для профиля нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны интересно тем, что квадратичная по амплитуде волны добавка имеет при $\nu \rightarrow 0$ резонансный вид (см. 53).

Из (53) видно, что добавки второго порядка малости к амплитуде волны в идеальной жидкости при $k < k_* \equiv \sqrt{\rho g / (2\gamma)}$ $k > k_*$ имеют различные знаки: для длинных (гравитационная ветвь) $k < k_*$; величина Λ положительна, а для коротких (капиллярная ветвь) волн $k > k_*$ – отрицательна. При $k = k_*$ имеет место внутренний нелинейный резонанс трехмодового взаимодействия капиллярно-гравитационных волн [57 – 58], а амплитуда добавки второго порядка малости стремится к бесконечности. Исследование профиля волны на заряженной поверхности вязкой глубокой жидкости при $k = k_*$ при отличной от нуля вязкости показало, что само положение резонанса при $\nu \neq 0$ не изменяется, но амплитуда добавки второго порядка малости в окрестности резонанса остается конечной.

На рис. 12 в безразмерных переменных, в которых $\rho = g = \gamma = 1$, приведены зависимости модуля амплитуды A добавки второго порядка малости к профилю волны в выражении (52) от волнового числа k при $\nu = 10^{-2}$ и различных значениях безразмерного параметра Тонкса-Френкеля W , характеризующего устойчивость поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Из рис. 12 видно, что с ростом W величина добавки второго порядка малости к амплитуде волны при малых значениях ($W < 1$) уменьшается (рис. 12а), а при больших $W > 1$ быстро растет (рис. 12б). Такое поведение модуля амплитуды характерно и для идеальной жидкости, что несложно видеть из аналитического выражения (53) для Λ : при $W = 1$ коэффициент Λ меняет свой знак.

Как выше уже отмечалось, наличие у жидкости вязкости и электрического заряда не сказывается на положении внутреннего нелинейного резонанса, который при $\nu \neq 0$ и $W \neq 0$ попрежнему имеет место при $k = k_*$. В использованном приближении второго порядка малости под резонансным взаимодействием волн подразумевается трехмодовое взаимодействие, реализующееся между тремя капиллярно-гравитационными волнами, движущимися в

одном направлении, когда их волновые числа и частоты связаны условиями $k_1 + k_2 = k_3$, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$. В принятых безразмерных переменных $\omega^2 = k(1 + k^2 - kW)$. Отметим, что сформулированные в [56] условия взаимодействия в рассматриваемом случае нелинейных капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости выполняются для любых значений W вплоть до критических ($W_{cr} = k + k^{-1}$) в форме $2k_* = k_0$ и $2\omega_* = \omega_0$, т.е. имеет место так называемый "вырожденный" резонанс, когда волна с волновым числом k_* дважды взаимодействует с волной $k_0 = 2k_*$, отдавая ей энергию.

Указанные закономерности поведения капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости, в частности, означают, что за счет нелинейного взаимодействия волн в малой окрестности волнового числа $k = k_0$ волны будут иметь амплитуды, превышающие амплитуды волн с волновыми числами $k \ll k_0$ и $k \gg k_0$. При увеличении напряженности электростатического поля E_0 у поверхности жидкости волны с $k \approx k_0$ согласно [1 – 2] будут иметь преимущество в смысле реализации тенденции к потере устойчивости по отношению к поверхностному заряду (будут обладать большими величинами инкрементов неустойчивости в начальный момент времени [119]) и именно их рост определит физическую картину реализации неустойчивости.

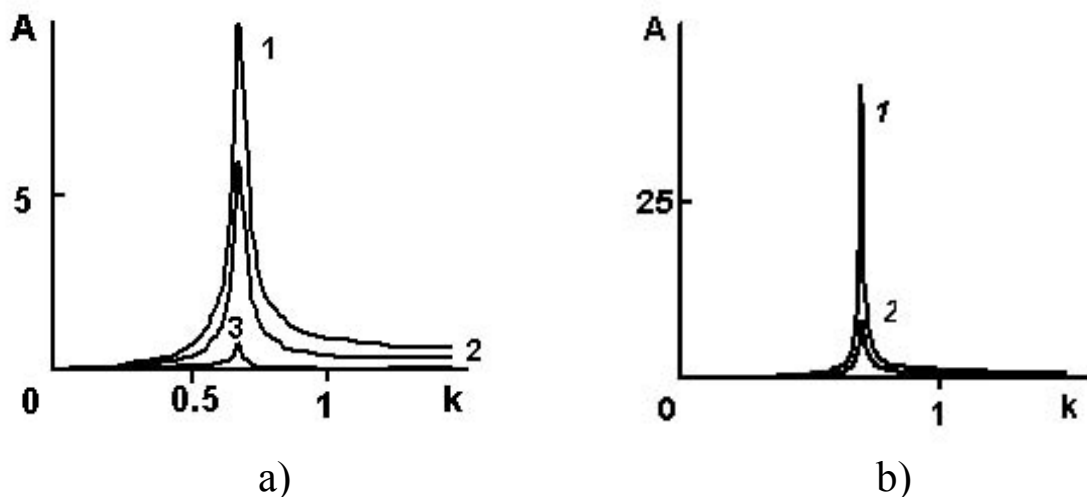


Рис. 12. Зависимости безразмерного модуля амплитуды A добавки второго порядка малости от безразмерного волнового числа k при $\nu = 10^{-2}$ и различных значениях параметра W :
 а) $W = 0.0$ (1), $W = 0.5$ (2), $W = 1$ (3); б) $W = 1.5$ (1), $W = 2.0$ (2)

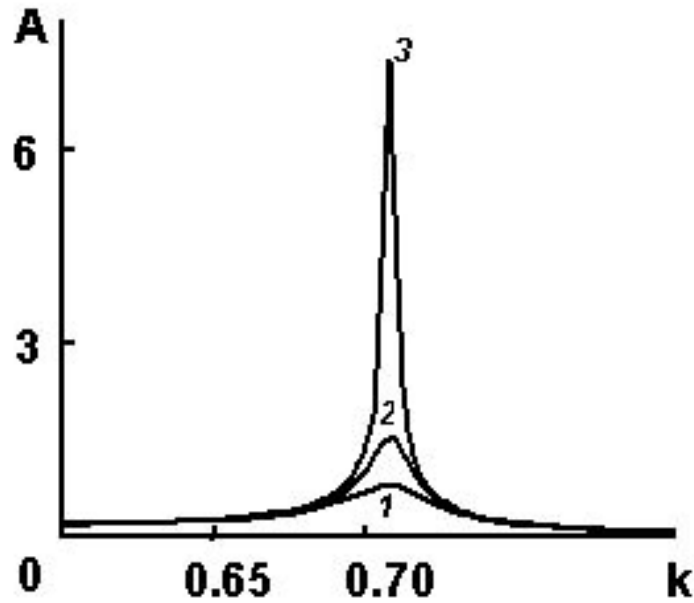


Рис. 13. Зависимости, аналогичные, представленным на рис. 12, построенные при $W = 1$ и различных значениях безразмерной вязкости: $\nu = 10^{-2}$ (1), $\nu = 5 \cdot 10^{-3}$ (2), $\nu = 10^{-3}$ (3)

Влияние вязкости на величину добавки второго порядка малости к амплитуде волны иллюстрирует рис. 13, построенный по соотношению (52).

9. Заключение. Анализ найденного решения задачи о нелинейных периодических волнах на заряженной поверхности вязкой проводящей жидкости показал, что главный вклад в процесс формирования эмиссионных выступов, образующихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности, вносит не весь набор неустойчивых волн с длинами из интервала, предсказанного линейной теорией, а только та их часть, на которой нелинейность процесса проявляется в заострении вершин. Волновые числа таких волн удовлетворяют условию $k > k_* - \sqrt{\rho g / (2\gamma)}$.

Положение внутреннего нелинейного резонанса капиллярно-гравитационных волн не зависит от вязкости и наличия заряда на свободной поверхности. При резонансном взаимодействии энергия от капиллярно-гравитационных волн с волновым числом $k_* = \sqrt{\rho g / (2\gamma)}$ перекачивается к более коротким волнам с волновым числом $k_* = \sqrt{2\rho g / \gamma}$.

Расчеты, выполненные в настоящей главе, опирались на уравнения движения Навье-Стокса для жидкости, в которой возможна диссипация энергии. Вариационные принципы, интенсивно используемые для описания движения идеальной жидкости, никак не использовались. Это связано с тем, что в задачах с диссипацией уравнения движения могут оказаться невыводимыми из вариационных принципов. В частности, имеются примеры невозможности вывода диссипативной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений установившегося движения вязкой жидкости из вариационных принципов [120 – 121]. Классические вариационные приемы исследования волнового движения, разработанные для изучения волнового движения на поверхности идеальной жидкости в данном случае некорректны, и продемонстрированная возможность обойтись без них – важный результат, имеющий фундаментальное значение.

3.2. О расчете волнового движения в рамках теории пограничного слоя

1. Существующие математические методы расчета нелинейного периодического капиллярно-гравитационного волнового движения на поверхности вязкой жидкости в рамках представлений о пограничном слое основаны на элементарной оценке (не вполне корректной, как будет показано ниже) его толщины, предложенной для анализа задачи Лонгет-Хиггинсом [122]. Подход, основанный на оценке Лонгет-Хиггинса, не предусматривает расчета вихревого течения жидкости внутри пограничного слоя. Выполненные в последние годы корректные аналитические асимптотические расчеты нелинейного периодического волнового движения на поверхности вязкой жидкости [91, 123 – 125], связанные с крайне громоздкими даже при использовании компьютерных пакетов аналитических вычислений расчетами, заставили реанимировать проблему построения корректной теории пограничного слоя у свободной поверхности жидкости в надежде упростить математическую процедуру отыскания параметров периодических нелинейных волн.

Хорошо известно, что на границе области, в которой имеет место ламинарное течение маловязкой несжимаемой жидкости,

возникает интенсивное вихревое движение, быстро затухающее по мере удаления от границы, так что имеется возможность выделить приповерхностную область с наиболее интенсивным вихревым движением в так называемый ламинарный пограничный слой. При этом движение жидкости за пределами пограничного слоя считается потенциальным. Такой прием позволяет в общем случае весьма сложную задачу строгого аналитического расчета движения вязкой жидкости в области с заданными границами свести к двум более простым: расчету потенциального движения невязкой жидкости в объеме и расчету вихревого движения вязкой жидкости в пограничном слое [126 – 129]. Граница области движения жидкости может быть твердой поверхностью, границей раздела двух несмешивающихся жидкостей или свободной поверхностью.

Правильная оценка толщины пограничного слоя в каждой отдельно взятой задаче существенно упрощает расчет течения жидкости при заданных граничных условиях и облегчает качественный анализ его свойств. В то же время само понятие толщины пограничного слоя не обладает той строгостью, которая присуща другим механическим величинам. В истинном течении компоненты ротора скорости плавно уменьшаются по абсолютной величине при выходе из пограничного слоя в область почти потенциального течения. Выделение четкой границы, разделяющей движение на область с вихревым движением и без него, означает условное установление порога, начиная с которого ротор скорости в задаче считается нулевым (что, в конечном итоге, приводит к ограничению точности проводимых расчетов). Сам порог может быть выбран по-разному в зависимости от целей исследования. Именно поэтому оценочные выражения для толщины пограничного слоя, используемые на практике, как правило, содержат безразмерный множитель, выбор которого диктуется сравнением с экспериментом, свойствами известного приближенного решения, или какими либо вспомогательными соглашениями.

Объектом настоящего исследования является течение в пограничном слое, возникающем под свободной поверхностью бесконечно глубокой маловязкой жидкости, по которой распространяется капиллярно-гравитационная волна. В большинстве классических монографий по гидродинамике [126 – 128] для оценки

толщины δ такого пограничного слоя используется выражение, предложенное в [122]:

$$\delta = C\sqrt{\nu/\omega}. \quad (1)$$

Здесь ω – циклическая частота периодической капиллярно-гравитационной волны; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; C – безразмерный параметр, значение которого в [122] принято равным $\sqrt{2}$. Соотношение (1) сформулировано на основании анализа точного решения задачи о расчете течения жидкости, связанного с капиллярно-гравитационной волной, распространяющейся по поверхности бесконечно глубокой маловязкой жидкости в линейном по амплитуде волны приближении [126]. Значение $C = \sqrt{2}$ выбрано таким образом, чтобы в известном приближенном решении закон убывания с глубиной h амплитуды ротора скорости течения жидкости описывался через параметр δ наиболее просто – выражением вида $\exp(-\delta \cdot h)$. Очевидно, такой выбор C в выражении для δ не гарантирует достаточной подавленности вихревого движения на глубине большей, чем δ , и остается неясным, каким нужно взять значение толщины слоя, чтобы охарактеризовать положение уровня, ниже которого вихрь скорости можно положить равным нулю с заранее заданной точностью для отыскания характеристик течения. Известно, что при распространении по свободной поверхности слоя жидкости конечной толщины периодической капиллярно-гравитационной волны глубина в половину длины волны является тем уровнем, начиная с которого дно и свободная поверхность перестают «чувствовать» друг друга [130 – 131]. Представляет интерес формулировка аналогичного критерия относительно вихревой составляющей течения, порожденного поверхностными волнами, т.е. возможность получения ответа на вопрос: начиная с какой глубины в количественных расчетах течения вязкой жидкости и в качественных рассуждениях можно полагать вихревое движение, порожденное свободной поверхностью, полностью подавленным, не влияющим на потенциальное течение в объеме?

В нижеследующем изложении движение жидкости, возникающее при распространении периодической капиллярно-гравитационной волны по поверхности маловязкой бесконечно

глубокой жидкости, будет аппроксимироваться с помощью модельного течения, состоящего из вихревой части внутри приповерхностного пограничного слоя, и потенциальной части во всем объеме жидкости. Будут выведены уравнения и граничные условия, к которым задача расчета модельного течения сводится методами теории пограничного слоя, имеющие более простой вид по сравнению с традиционными. Будет найдено оптимальное значение C в формуле (1).

2. Математическая формулировка и известное решение задачи. Примем, что несжимаемая жидкость с кинематической вязкостью ν , плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения γ в декартовой системе координат $Oxyz$, с осью Oz , направленной вертикально вверх, в поле сил тяжести $\vec{g} \parallel -\vec{e}_z$, заполняет полупространство $z < 0$ и граничит с вакуумом. Рассмотрим линеаризованную по амплитуде возмущения задачу определения спектра капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости.

Пусть $u = u(x, z, t)$ и $v = v(x, z, t)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей течения жидкости, связанного с периодическим волновым движением ее свободной поверхности, которые для простоты считаются не зависящими от координаты y . Тогда отклонение свободной поверхности жидкости $\xi = \xi(x, t)$ от равновесной плоской в поле сил тяжести формы $z = 0$ и поле скоростей $\vec{U} = u \cdot \vec{e}_x + v \cdot \vec{e}_z$ в приближении волн малой амплитуды удовлетворяют соотношениям

$$z < 0: \quad \partial_t \vec{U} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \vec{U} = \vec{0}; \quad \nabla \cdot \vec{U} = 0; \quad (2)$$

$$z = 0: \quad \partial_t \xi - v = 0; \quad -\rho g \xi + p - 2\rho \nu \partial_z v + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \quad \partial_z u + \partial_x v = 0; \quad (3)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad u \rightarrow 0; \quad v \rightarrow 0, \quad (4)$$

где t – время, p – добавка к равновесному значению давления внутри жидкости, ∂_t и ∂_x – частные производные по времени и координате, \vec{e}_x и \vec{e}_z – орты осей Ox и Oz .

Решение сформулированной задачи хорошо известно и может быть записано в виде [91, 126]

$$\xi = \frac{1}{2} \alpha \cdot \exp(\theta) + K.C.; \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} u(\vec{r}, t) \\ v(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(p)}(\vec{r}, t) \\ v^{(p)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{(e)}(\vec{r}, t) \\ v^{(e)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(p)}(\vec{r}, t) \\ v^{(p)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} -i(S + 2\nu k^2) \\ S + 2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(k \cdot z) \exp(\theta) + K.C.;$$

$$\begin{pmatrix} u^{(e)}(\vec{r}, t) \\ v^{(e)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} 2i\nu k q \\ -2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(q \cdot z) \cdot \exp(\theta) + K.C.;$$

$$p(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} \alpha \rho S \left(\frac{S}{k} + 2\nu k \right) \exp(kz) \cdot \exp(\theta) + K.C.;$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}; \quad \theta \equiv St - i kx.$$

Поле скоростей течения жидкости представлено в виде суперпозиции потенциальной $u^{(p)}, v^{(p)}$ и вихревой $u^{(e)}, v^{(e)}$ компонент; α – комплексная амплитуда поверхностной волны, определяемая из начальных условий; аббревиатура «К.С.» обозначает комплексно сопряженные слагаемые к выписанным; i – мнимая единица; k – волновое число; $\text{Re}(q) > 0$ – характерный масштаб скорости экспоненциального убывания амплитуды вихревого движения с глубиной; S – комплексная частота, являющаяся решением дисперсионного уравнения:

$$\left(2k^2 + \frac{S}{\nu} \right)^2 + \omega_0^2 - 4\nu^2 \left(k^2 + \frac{S}{\nu} \right)^{3/2} = 0; \quad \omega_0^2 \equiv gk \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 \right). \quad (7)$$

Здесь ω_0^2 имеет смысл квадрата комплексной частоты S^2 при $\nu \rightarrow 0$, иными словами, ω_0 есть частота капиллярно-гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости.

В пределе малой (но ненулевой) вязкости комплексная частота S и вспомогательный параметр q выражаются в явном виде: $S \approx i\omega_0 - 2\nu k^2$; $q \approx (1+i)\sqrt{\omega_0/(2\nu)}$. Если в соотношениях (5) – (6) параметры S и q выразить по этим формулам, то получится асимптотическое по малой вязкости решение задачи (2) – (4), в котором поле скоростей описывается соотношениями

$$\begin{pmatrix} u(\vec{r}, t) \\ v(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(p)}(\vec{r}, t) \\ v^{(p)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{(e)}(\vec{r}, t) \\ v^{(e)}(\vec{r}, t) \end{pmatrix}; \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(p)} \\ v^{(p)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \omega_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(kz) \cdot \exp(\theta) + K.C.; \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} k\sqrt{2\nu\omega_0}(1+i)i \\ -2\nu k^2 \end{pmatrix} \exp(q\delta) \cdot \exp(\theta) + K.C.; \quad (10)$$

$$S = i\omega_0 - 2\nu k^2; \quad q = \frac{(1+i)}{\delta_L}; \quad \delta_L \equiv \sqrt{\frac{2\nu}{\omega_0}}. \quad (11)$$

Здесь δ_L – характерная толщина пограничного слоя по Лонгет-Хиггинсу [122], определяющая глубину, на которой амплитуда ротора скорости $|\partial_x v - \partial_z u|$ поля скоростей (8) уменьшается в $e \approx 2.73$ раз.

Если учесть, что в реальных условиях маловязкой жидкости толщина пограничного слоя обычно много меньше длины волны $\delta_L \ll \lambda = 2\pi/k$, то из формулы (8) следует, что структура аналитического выражения для поля скоростей является типичной для теории пограничного слоя: потенциальная (основная) часть течения плюс вихревая (погранслоиная) часть. Для нижеследующего существенно, что потенциальное течение с компонентами скорости $u^{(p)}, v^{(p)}$ играет важную роль во всем объеме, тогда как вихревая часть течения с компонентами $u^{(e)}, v^{(e)}$ при малой вязкости

существенна только в тонком слое вблизи свободной поверхности. Действительно, амплитуда потенциальных компонент поля скоростей $u^{(p)}, v^{(p)}$ уменьшается с глубиной пропорционально $\exp(kz) \equiv \exp(z/2\pi\lambda)$, а амплитуда вихревых компонент скорости $u^{(e)}, v^{(e)}$ уменьшается при малой величине коэффициента кинематической вязкости (когда $\text{Re}(q) \ll k$) значительно быстрее: по закону $\exp(\text{Re}(q) \cdot z) \equiv \exp(z/\delta_L) \equiv \exp(z \cdot \sqrt{\omega_0/2\nu})$.

Вихревые компоненты поля скоростей $u^{(e)}, v^{(e)}$ стремятся к нулю в пределе $\nu \rightarrow 0$ на любой глубине. Из непрерывности $u^{(e)}, v^{(e)}$ следует, что при малой, но отличной от нуля вязкости вихревая составляющая течения является малой добавкой к основному потенциальному движению во всей области течения, в том числе и в приповерхностном пограничном слое. Таким образом, даже в области пограничного слоя основную составляющую течения маловязкой жидкости следует считать потенциальной. Наличие этой составляющей движения – главное отличие в течении жидкости внутри пограничного слоя, формирующегося вблизи свободной поверхности (рассматриваемая ситуация), от течения в пограничном слое вблизи твердой стенки, когда значительность потенциальной составляющей движения по сравнению с вихревой не принимается во внимание [127].

3. Модельная задача. Сформулируем модельную задачу, которой будем аппроксимировать точное решение (8) – (11) и которая получается из задачи (2) – (4) на основании представлений о погранслоном строении ее решения. Для достижения этой цели будем исходить из предположения, что вихревая часть модельного течения сосредоточена только в пограничном приповерхностном слое и ротор скорости модельного течения обращается в нуль на нижней границе этого слоя.

В исходных уравнениях (2) – (4) скорость \vec{U} состоит из погранслоной (вихревой) и основной (потенциальной) составляющих движения. Чтобы воспользоваться фактом погранслойности строения решения, эти две составляющие необходимо разделить и уравнения для потенциальной составляющей решать во всей области $z \leq 0$, а уравнения для погранслоной вихревой добавки только в узком слое $-\delta \leq z \leq 0$. Толщину пограничного слоя δ пока будем

считать определенной с точностью до постоянного множителя G и в соответствии с (1), (11) удовлетворяющей соотношению

$$\delta \equiv G \cdot \sqrt{2\nu/\omega_0} \equiv G \cdot \delta_L \quad (12)$$

и малой по сравнению с длиной волны $\delta/\lambda \ll 1$.

Будем искать поле скоростей $\vec{U}(\vec{r}, t)$, разрешающее задачу (2) – (4) на основании теоремы Гельмгольца [132], в виде суперпозиции потенциального $\vec{U}^{(p)}(\vec{r}, t)$ и вихревого соленоидального $\vec{U}^{(e)}(\vec{r}, t)$ течений:

$$z \leq 0: \quad \vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{U}^{(p)}(\vec{r}, t) + \vec{U}^{(e)}(\vec{r}, t); \quad (13)$$

$$z \leq 0: \quad \vec{U}^{(p)}(\vec{r}, t) \equiv \nabla \varphi(\vec{r}, t); \quad \nabla \cdot \vec{U}^{(e)} = 0;$$

$$-\delta \leq z \leq 0: \quad \nabla \times \vec{U}^{(e)}(\vec{r}, t) \equiv \vec{\Omega}(\vec{r}, t) \equiv \Omega(\vec{r}, t) \cdot \vec{e}_y;$$

$$\Omega(\vec{r}, t) \equiv \partial_x v^{(e)}(\vec{r}, t) - \partial_z u^{(e)}(\vec{r}, t).$$

Здесь $\varphi(\vec{r}, t)$ – скалярный гидродинамический потенциал основного течения; $\vec{\Omega}(\vec{r}, t)$ – ротор поля скоростей течения жидкости. Из соленоидальности $\vec{U}^{(e)}$ и уравнения неразрывности следует, что поле $\vec{U}^{(p)}$ тоже соленоидально: $\nabla \cdot \vec{U}^{(p)} \equiv \Delta \varphi = 0$. Из соленоидальности $\vec{U}^{(e)}$, т.е. условия $\partial_x u^{(e)} + \partial_z v^{(e)} = 0$, следует существование потенциальной функции $\psi(\vec{r}, t)$ с дифференциалом $d\psi = v^{(e)} dx - u^{(e)} dz$. Откуда $u^{(e)} = -\partial_z \psi$, $v^{(e)} = \partial_x \psi$. При этом $\Delta \psi = \partial_x v^{(e)} - \partial_z u^{(e)} \equiv \Omega$. К обеим частям линеаризованного уравнения Навье-Стокса (2) применим к уравнению операцию *rot* и получим уравнение для отыскания вихревой компоненты течения

$$\partial_t \Omega(\vec{r}, t) - \nu \Delta \Omega(\vec{r}, t) = 0.$$

Окончательно получим отдельные уравнения для функции $\varphi(\vec{r}, t)$, отвечающей за основное потенциальное течение, и для функций $\psi(\vec{r}, t)$, $\Omega(\vec{r}, t)$, через которые определяется погранслоное вихревое движение:

$$z \leq 0: \quad \Delta \varphi = \partial_{xx} \varphi + \partial_{zz} \varphi = 0; \quad (14)$$

$$-\delta \leq z \leq 0: \quad \partial_t \Omega - \nu \Delta \Omega = 0; \quad \Omega = \Delta \psi. \quad (15)$$

В уравнениях (15) функция $\Omega(\vec{r}, t)$ является вспомогательной. Из этих соотношений главное определить функцию $\psi(\vec{r}, t)$, поскольку все граничные условия на границе слоя $-\delta \leq z \leq 0$ возможно записать в форме, которая содержит только ψ и не содержит Ω . В линейной по амплитуде волны теории для системы (15) существует процедура исключения вспомогательной функции Ω , описанная, например в [126], где (15) сводится к одному уравнению относительно ψ , отвечающей за вихревое движение, $\partial_t \psi - \nu \Delta \psi = 0$. Однако процедура такого упрощения основана на линейности уравнений (15). В нелинейном по амплитуде волны приближении функция $\Omega(\vec{r}, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению $\partial_t \Omega + (\vec{U} \cdot \nabla \vec{U}) - \nu \Delta \Omega = 0$ [128]. В паре с уравнением $\Delta \psi = \Omega$ оно обобщает систему (15) на общий случай волнового движения с произвольной амплитудой. Но для такой ситуации не существует процедуры исключения из имеющейся пары уравнений функции $\Omega(\vec{r}, t)$. Имея в виду возможные последующие исследования нелинейного волнового движения в вязкой жидкости, в которых аналогичная задача будет рассматриваться в нелинейной постановке, в настоящем рассмотрении соотношения на функцию $\psi(\vec{r}, t)$ используются в форме (15).

Теперь учтем, что если вихревое (погранслоное) течение сосредоточено только в узком приповерхностном слое, то компоненты скорости этого течения поперек пограничного слоя изменяются на характерном линейном масштабе δ , а вдоль слоя – на характерном линейном масштабе, равном длине волны λ . Поэтому отношение производных от этих величин вдоль Oz к производным вдоль Ox имеет порядок $\propto \lambda/\delta$. Мы приняли, что $\delta/\lambda \ll 1$ и $\delta \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow 0$ (см. (1)). Отсюда получаются оценки

$$\nu \rightarrow 0: \quad \left| \frac{\partial_x v^{(e)}}{\partial_z v^{(e)}} \right| = \left| \frac{\partial_{xx} \psi}{\partial_{xz} \psi} \right| \propto O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \rightarrow 0; \quad \left| \frac{\partial_x u^{(e)}}{\partial_z u^{(e)}} \right| = \left| \frac{\partial_{xz} \psi}{\partial_{zz} \psi} \right| \propto O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) \rightarrow 0.$$

Несложно сделать вывод, что интересующий нас класс решений должен удовлетворять условию

$$\nu \rightarrow 0: \quad \left| \frac{\partial_{xx}\psi}{\partial_{zz}\psi} \right| = \left| \frac{\partial_{xx}\psi}{\partial_{xz}\psi} \right| \left| \frac{\partial_{xz}\psi}{\partial_{zz}\psi} \right| \square O\left(\frac{\delta^2}{\lambda^2}\right) \rightarrow 0. \quad (16)$$

Граничные условия (3) – (4) превращаются в граничные условия на функции φ , ψ , Ω , если учесть, что входящие в них компоненты скорости выражаются через введенные скалярные функции по формулам

$$u^{(p)} = \partial_x \varphi; \quad v^{(p)} = \partial_z \varphi; \quad u^{(e)} = -\partial_z \psi; \quad v^{(e)} = \partial_x \psi. \quad (17)$$

Во второе из соотношений (3) входит давление p на уровне $z=0$. Чтобы обойтись без поиска давления во всем объеме, дополним граничные условия проекцией уравнения Навье-Стокса (2) на ось Ox . Оно вместе динамическим граничным условием (3) будет содержать функцию $p = p(t, x) \equiv p(t, x, z=0)$, которая в процессе решения исключится. В полученном соотношении нужно учесть, что для горизонтальной компоненты потенциальной части течения выполняется условие $\partial_{xx} u^{(p)} + \partial_{zz} u^{(p)} = \Delta u^{(p)} = \Delta(\partial_x \varphi) = \partial_x(\Delta \varphi) = 0$. Наконец, примем во внимание обращение в нуль ротора скорости Ω на нижней границе слоя. В результате (14) – (15) будут дополнены граничными условиями

$$z=0: \quad \partial_t \xi - (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \quad (18)$$

$$-\rho g \xi + p - 2\rho \nu \partial_z (v^{(p)} + v^{(e)}) + \gamma \partial_{xx} \xi = 0; \quad (19)$$

$$\rho \partial_t (u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x p - \rho \nu (\partial_{xx} u^{(e)} + \partial_{zz} u^{(e)}); \quad (20)$$

$$\partial_z (u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \quad (21)$$

$$z = -\delta: \quad \Omega = 0; \quad (22)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad u^{(p)} \rightarrow 0; \quad v^{(p)} \rightarrow 0. \quad (23)$$

Соотношения (14) – (23) представляют собой формулировку модельной задачи, в которую преобразуется исходная задача (2) – (4) на основании представлений о погранслоистой структуре ее решения. Несложно видеть, что в пределе $\delta \rightarrow \infty$ формулировка модельной задачи (14) – (23) полностью эквивалентна формулировке исходной задачи (2) – (4), переписанной через вспомогательные скалярные функции φ, ψ, Ω . Значит, решения модельной и исходной задач в пределе $\delta \rightarrow \infty$ совпадают. Но это утверждение не конструктивно. Целесообразно рассмотреть вопрос, при каком конкретном значении толщины пограничного слоя δ можно говорить о близости решений точного и модельного.

4. Решение модельной задачи. Для неизвестных величин $\xi = \xi(x, t)$, $p = p(x, t)$, $\varphi = \varphi(x, z, t)$, $\psi = \psi(x, z, t)$ будем искать решение в виде бегущей волны $\sim \exp(\theta)$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ p \\ \varphi \\ \psi \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ f(z) \\ h(z) \\ r(z) \end{pmatrix} \cdot \exp(\theta). \quad (24)$$

Подставляя выражение для φ в уравнение Лапласа (14) и учитывая (23), найдем что $f(z) = a \cdot \exp(kz)$, где a – неопределенная константа. Подставляя выражение для Ω в (15) с учетом граничного условия (22), найдем $r(z) = b \cdot \sinh(q(z + \delta))$, где b – неопределенная константа. Теперь из второго уравнения (15), выбирая решение удовлетворяющее условию (16), можно получить $h(z) = (b/q^2) \cdot \sinh(q(z + \delta))$. Подставляя эти выражения в (24), приходим к выражениям для неизвестных функций

$$\begin{pmatrix} \xi \\ p \\ \varphi \\ \psi \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \cdot \exp(kz) \\ \frac{b}{q^2} \sinh(q(z+\delta)) \\ b \cdot \sinh(q(z+\delta)) \end{pmatrix} \cdot \exp(\theta). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (17), а полученные выражения в граничные условия (18)-(21), получаем систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант α , β , a , b , которая в матричной форме записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} S & 0 & -k & \frac{ik}{q^2} \sinh(q\delta) \\ -\frac{\rho}{k} \omega_0^2 & 1 & -2\rho\nu k^2 & \frac{2i\rho\nu k}{q} \cosh(q\delta) \\ 0 & -ik & -i\rho k S & -\rho \frac{S+\nu(k^2-q^2)}{q} \cosh(k\delta) \\ 0 & 0 & -2ik^2 & -\frac{(k^2+q^2)}{q^2} \sinh(q\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Условие нетривиальной разрешимости этой системы – обращение в нуль определителя коэффициентов при неизвестных α , β , a , b – приводит к дисперсионному уравнению

$$4\rho\nu k^3 (S+\nu k^2) - q \left(\rho \omega_0^2 + (S-2\nu k^2)^2 \right) \tanh(q\delta) = 0. \quad (27)$$

Полагая согласно (12)

$$\nu = \Lambda \delta^2, \quad \Lambda = \delta^2 \omega_0 / 2G$$

и определяя решение (27) с точностью до слагаемых $\sim \delta^2$, находим, что $S \approx i\omega_0 - 2\Lambda \delta^2 k^2 = i\omega_0 - 2\nu k^2$. Иными словами, независимо от выбора значения G в формуле (12) исследуемое волновое движение в модельном течении подчиняется при малой вязкости дисперсионному соотношению, которое получается в точном ре-

шении. При таком значении S выражение для параметра q в пределе малой вязкости примет вид $q \equiv \sqrt{k^2 + S/\nu} \approx (1+i)\sqrt{\omega_0/(2\nu)} \equiv (1+i)/\delta_L$, что совпадает с (11).

Выполнение соотношения (27) гарантирует линейную зависимость системы уравнений (26). Поэтому константы β , a , b можно выразить через амплитуду волны α , оставив три уравнения с ненулевым определителем из коэффициентов при β , a , b . Взяв первое, третье и четвертое уравнения, получим

$$\begin{pmatrix} \beta \\ a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \rho S \left(S(k^2 + q^2) - 2kq(S + \nu(k^2 - q^2)) \right) \frac{\coth(q\delta)}{k(k^2 - q^2)} \\ -S \frac{k^2 + q^2}{k(k^2 - q^2)} \\ \frac{S}{\sinh(q\delta)} \cdot \frac{2ikq^2}{(k^2 - q^2)} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что компоненты потенциальной части поля скоростей модельной задачи определяются по тем же формулам (9), что и компоненты потенциальной части поля скоростей точного решения задачи (2) – (4).

Для погранслойной части решения модельной задачи получаются формулы, отличные от выражений (10) для вихревой составляющей точного поля скоростей в приближении малой вязкости:

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \alpha \begin{pmatrix} k \cdot i(1+i) \sqrt{2\nu\omega_0} \frac{\cosh(q(z+\delta))}{\sinh(\delta \cdot q)} \\ -2\nu k^2 \frac{\sinh(q(z+\delta))}{\sinh(\delta \cdot q)} \end{pmatrix} \exp(St - ikx) + K.C. \quad (28)$$

Здесь S и q вычисляются по формулам (11).

6. Упрощение модельной задачи. Математическая формулировка модельной задачи без ущерба для вида решения в пределе малой вязкости может быть упрощена с помощью построений, аналогичных тем, что используются в традиционной теории пограничного слоя [127] с некоторым различием в представлении о

строении течения в пограничном слое, связанном с наличием свободной поверхности. Нижеследующее упрощение основано на оценочных рассуждениях, которые легко провести даже без знания точного решения. Но для проверки полученных выводов там, где это важно, проводится сравнение свойств моделируемого решения со свойствами точного (8) – (11).

Воспользуемся малостью толщины пограничного слоя δ по сравнению с длиной волны λ . Далее в суммах вида $\Sigma = A + B$ будем пренебрегать слагаемым B , если $B/A \ll O(\delta^2/\lambda^2)$:

$$A + B = A \left(1 + \frac{B}{A} \right) = A \left(1 + O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right) \right) \approx A.$$

Как и при выводе оценки (16), отметим, что вихревое (погранслоное) течение сосредоточено только в узком слое. Для отвечающих за его описание функций ψ , Ω , $u^{(b)}$, $v^{(b)}$ характерный линейный масштаб изменения их значений равен: поперек пограничного слоя – его толщине δ , а вдоль слоя – длине волны λ . Поэтому отношение производных от этих величин вдоль Oz к производным вдоль Ox имеет порядок $\ll O(\lambda/\delta)$. Отсюда получаются оценки (см. (16))

$$\frac{\partial_{xx}\psi}{\partial_{zz}\psi} \ll O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right); \quad \frac{\partial_{xx}\Omega}{\partial_{zz}\Omega} \ll O \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right).$$

Тогда в принятом приближении можно опустить $\partial_{xx}\Omega$ и $\partial_{xx}\psi$ в (15).

Для того чтобы в пределе $\nu \rightarrow 0$ уравнения модельного течения переходили в уравнения течения идеальной жидкости, уравнение Лапласа (14) для потенциальной части течения нужно сохранить без изменения. Поэтому для величин ϕ , $u^{(p)}$, $v^{(p)}$ во всей области течения (даже в пограничном слое) характерный линейный масштаб изменения их значений будем считать одинаковым, равным λ , как и в случае течения идеальной жидкости.

Примем следующее соглашение о строении течения в пограничном слое вблизи свободной поверхности. Течение состоит из главной (потенциальной) и добавочной (вихревой) частей. Вихревая часть течения является малой, исчезающей в пределе $\nu \rightarrow 0$,

добавкой к основной части течения. Для основной части движения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости, одинаков во всех направлениях. Для вихревой части течения характерный линейный масштаб, на котором изменяются компоненты скорости в направлении, перпендикулярном пограничному слою, равен толщине слоя, а вдоль слоя определяется характерным горизонтальным размером поверхностного возмущения.

В связи со сказанным в упрощенной модельной задаче в пределе малой вязкости основными уравнениями являются соотношения

$$z < 0: \quad \Delta \varphi = 0; \quad (29)$$

$$-\delta < z < 0: \quad \partial_t \Omega - \nu \partial_{zz} \Omega = 0; \quad \partial_{zz} \psi = \Omega. \quad (30)$$

Для упрощения граничных условий проведем ряд оценок относительно порядков величин, входящих в граничные условия (18) – (21). Все нижеследующие оценки проводятся на уровне $z = 0$. Знак « \square » используется как символ отношения «сравнение по порядку величины».

Принимая во внимание соглашение о характерных линейных масштабах, на которых изменяются значения компонент основного и погранслоного течений, будем следовать следующим правилам оценки производных по пространственным координатам от этих величин. Для φ , $u^{(p)}$, $v^{(p)}$ будем пользоваться формальным правилом построения оценки сравнения: ∂_x переходит в $1/\lambda$ и ∂_z переходит в $1/\lambda$, например $\partial_x u^{(p)} \square u^{(p)}/\lambda$. Для погранслоных величин ψ , Ω , $u^{(e)}$, $v^{(e)}$ правило оценки производных другое: ∂_x переходит в $1/\lambda$, а ∂_z переходит в $1/\delta$, например: $\partial_x u^{(e)} \square u^{(e)}/\lambda$, но $\partial_z u^{(e)} \square u^{(e)}/\delta$.

Заметим, что условие (21) с учетом определения функции $\Omega = \partial_x v - \partial_z u$ можно переписать в виде

$$\Omega = 2\partial_x v = 2\partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}). \quad (31)$$

Пусть W – характерное значение скорости потенциального течения на уровне $z=0$. При потенциальном волновом течении частицы жидкости двигаются по траекториям, близким к окружностям [126 – 129]. Поэтому горизонтальную и вертикальную компоненту скорости потенциального течения будем считать величинами одного порядка

$$\frac{u^{(p)}}{W} \approx \frac{v^{(p)}}{W} \approx O(1). \quad (32)$$

Из (31), (32), оценки $\partial_x v \approx v/\lambda$ и малости $v^{(e)}$ в сравнении с $v^{(p)}$ следует оценка

$$\Omega \approx W/\lambda. \quad (33)$$

Из условия соленоидальности вихревой части поля скоростей $\partial_x u^{(e)} + \partial_z v^{(e)} = 0$ следует, что $\partial_x u^{(e)} \approx \partial_z v^{(e)}$. Отсюда по принятому правилу оценки производных от погранслойных величин имеем соотношение

$$\frac{v^{(e)}}{u^{(e)}} \approx O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right). \quad (34)$$

В связи с (34), еще раз применяя правило оценки производных, получаем

$$\frac{\partial_x v^{(e)}}{\partial_z u^{(e)}} \approx O\left(\frac{\delta^2}{\lambda^2}\right).$$

Значит, в левой части соотношения $\Omega = \partial_x v^{(e)} - \partial_z u^{(e)}$ главным является второе слагаемое, и поэтому $\Omega \approx u/\delta$. Сравнивая эту оценку с (33) и (34), получаем

$$\frac{u^{(e)}}{W} \approx O\left(\frac{\delta}{\lambda}\right); \quad \frac{v^{(e)}}{W} \approx O\left(\frac{\delta^2}{\lambda^2}\right). \quad (35)$$

Из оценки $\partial_x v \sim (\delta^2/\lambda^2)\partial_z u$ и определения Ω также следует, что (21) можно записать в другом виде:

$$z = 0: \quad \partial_z u^{(p)} + 2\partial_x (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0. \quad (36)$$

Если в (10) учесть, что кинематическая вязкость ν пропорциональна δ^2 , то несложно убедиться, что оценочные соотношения (34) – (36) действительно выполняются для точно вычисленных компонент $u^{(e)}$ и $v^{(e)}$.

За характерное время, в течении которого изменяются функции, входящие в задачу, естественно принять $T = \omega_0^{-1}$, где ω_0 – характерная циклическая частота волнового движения в пределе идеальной жидкости.

Несложно показать, что в условии (19) в приближении малой вязкости можно пренебречь слагаемым $2\rho\nu\partial_z v^{(e)}$. Действительно, из кинематического условия (18), оценки (32) и малости $v^{(e)}$ в сравнении с $v^{(p)}$ имеем $\xi \ll W/\omega_0$. Кроме того, воспользуемся тем, что $\nu \ll \omega_0\delta^2$. Тогда легко оценить отношение слагаемого $2\rho\nu\partial_z v^{(e)}$ ко второму слагаемому левой части (19):

$$\frac{2\rho\nu\partial_z v^{(e)}}{\rho g \xi} \ll \frac{\omega_0\delta^2}{g(W/\omega_0)} \frac{W}{\delta} \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\delta\omega_0^2}{g} \left(\frac{\delta^2}{\lambda^2} \right).$$

Произведение величины порядка δ^2/λ^2 на малую $\delta\omega_0^2/g$ при $\delta \rightarrow 0$ дает величину более высокого порядка малости, чем величина $\sim \delta^2/\lambda^2$.

Аналогичным образом можно убедиться в возможности пренебречь в (20) слагаемым $\rho\nu\partial_{xx} u^{(e)}$, сравнивая его с первым слагаемым этого условия:

$$\frac{\rho\nu\partial_{xx} u^{(e)}}{\rho\partial_t u^{(p)}} \ll \frac{\omega_0\delta^2}{\omega_0 W} \frac{W}{\lambda^2} \left(\frac{\delta}{\lambda} \right) = \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^3.$$

Проводя аналогичный анализ для всех остальных слагаемых, входящих в граничные условия, можно убедиться, что они, в рамках выбранного приближения, должны быть сохранены.

Собирая все соотношения упрощенной модельной задачи, получим математическую формулировку модельной задачи, которая получилась в результате применения теории пограничного слоя:

$$z < 0: \quad \Delta\varphi = 0;$$

$$-\delta < z < 0: \quad \partial_{zz}\psi = \Omega; \quad \partial_t\Omega - \nu\partial_{zz}\Omega = 0.$$

$$z = -\delta: \quad \Omega = 0; \quad u^{(p)} = \partial_x\varphi; \quad v^{(p)} = \partial_z\varphi; \quad u^{(e)} = -\partial_z\psi; \quad v^{(e)} = \partial_x\psi;$$

$$z = 0: \quad \partial_t\xi - (v^{(p)} + v^{(e)}) = 0; \quad -\rho g\xi - p - 2\rho\nu\partial_z(v^{(p)}) + \gamma\partial_{xx}\xi = 0;$$

$$\rho\partial_t(u^{(p)} + u^{(e)}) + \partial_x p - \rho\nu\partial_{zz}u^{(e)}; \quad \partial_z u^{(p)} + 2\partial_x(v^{(p)} + v^{(e)}) = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad u^{(p)} \rightarrow 0; \quad v^{(p)} \rightarrow 0. \quad (37)$$

В формулировке упрощенной модельной задачи отсутствует условие (16.). Это не означает, что оно не учитывается. Просто оно было использовано на этапе упрощения уравнений, и для искомых решений выполняется.

7. Решение упрощенной задачи. Принцип решения упрощенной модельной задачи (37) такой же, как у модельной задачи (14) – (23). Но объем вычислений заметно меньше. Отличие состоит в том, что другим получается явный вид параметра q , а вместо (26) получается система уравнений

$$\begin{pmatrix} S & 0 & -k & \frac{ik}{q^2}\sinh(q\delta) \\ -\frac{\rho}{k}\omega_0^2 & 1 & -2\rho\nu k^2 & 0 \\ 0 & -ik & -i\rho k S & -\rho\frac{(S-\nu q^2)}{q}\cosh(k\delta) \\ 0 & 0 & -2ik^2 & -\frac{(2k^2+q^2)}{q^2}\sinh(q\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ d \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение после сокращения на $ik\rho\sinh(q\delta)$ принимает вид

$$(S + 2\nu k^2)^2 + \omega_0^2 = 0,$$

и в приближении малой вязкости из него получаются известные соотношения (11). Вычисление компонент поля скоростей в приближении малой вязкости приводит к прежним соотношениям: (9) – для потенциальной части течения и (28) – для вихревой (погранслоистой) части.

Получилось, что в приближении малой вязкости при моделировании решения задачи (2) – (4) с помощью задачи, в которой вихревое движение сосредоточено в пограничном слое толщиной δ , без ущерба для вида финальных выражений можно использовать не полные уравнения и граничные условия модельной задачи (14) – (23), а упрощенные уравнения (37). Упрощенные уравнения получаются из (14) – (23) с помощью теории пограничного слоя, модифицированной для расчета течения вблизи подвижной свободной поверхности жидкости. В отличие от теории пограничного слоя вблизи твердой стенки, в теории пограничного слоя вблизи свободной поверхности нужно учитывать значительность потенциальной составляющей течения в пограничном слое. Причем на компоненты этой составляющей не распространяются упрощения теории пограничного слоя, основанные на утверждении о малости производных от компонент скорости вдоль слоя по сравнению с производными от тех же компонент поперек слоя.

8. Подбор толщины пограничного слоя. Независимо от выбора уравнений модельной задачи (14) – (23) или (37) в пределе малой вязкости получились соотношения, которые отличаются от решений (8) – (11) исходной задачи (2) – (4) только в выражениях для компонент скорости погранслоистой добавки $u^{(e)}$, $v^{(e)}$: вместо (10) получились соотношения (28). Исследуем, насколько хорошо соотношения (28) аппроксимируют выражения (10) в зависимости от значения параметра δ , а конкретнее от значения безразмерного параметра G в формуле (12).

Растянем вертикальную координату в δ раз перпендикулярно пограничному слою:

$$\Pi = z/\delta. \quad (38)$$

Согласно (11) – (12) в приближении малой вязкости $q = (1+i)/\delta_L = G(1+i)/\delta$. Поэтому, учитывая, (38) можно записать $qz = G(1+i)\Pi$; $q\delta = G(1+i)$; $q(z+\delta) = G(1+i)(1+\Pi)$;

$\nu q = \nu(1+i)G/\delta = \sqrt{\nu\omega_0}(1+i)/\sqrt{2}$. Таким образом, через растянутую вертикальную координату (38), которая равна нулю на уровне $z=0$ и минус единице на границе пограничного слоя, соотношения (10) и (28) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} k\sqrt{2\nu\omega_0}(1+i)i \exp(G(1+i)\Pi) \\ -2\nu k^2 \exp(G(1+i)\Pi) \end{pmatrix} \exp(\theta) + K.C.; \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} u_*^{(e)} \\ v_*^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} k\sqrt{2\nu\omega_0}(i+1)i F(G, \Pi) \\ -2\nu k^2 \Phi(G, \Pi) \end{pmatrix} \exp(\theta) + K.C.; \quad (40)$$

$$F(G, \Pi) = \frac{\cosh(G(1+i)(1+\Pi))}{\sinh(G(1+i))}; \quad (41)$$

$$\Phi(G, \Pi) = \frac{\sinh(G(1+i)(1+\Pi))}{\sinh(G(1+i))}. \quad (42)$$

Звездочкой обозначены компоненты погранслойной добавки к основному полю скоростей, рассчитываемые из решения модельной задачи, а для компонент точного решения (2) – (4) сохранено прежнее обозначение.

Из (39) следует, что точность аппроксимирования функций $u^{(e)}, v^{(e)}$ функциями $u_*^{(e)}, v_*^{(e)}$ при фиксированном значении параметра $G = G_0$ полностью определяется тем, насколько точно зависимость $\eta_{G_0}(\Pi) = \exp(G_0(1+i)\Pi)$ аппроксимируется функциями $F_{G_0}(\Pi) = F(G_0, \Pi)$ и $\Phi_{G_0} = \Phi(G_0, \Pi)$ на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. Выясним, насколько близки эти функции при толщине пограничного слоя, определяемой по Лонгет-Хиггинсу [122], т.е. когда $\delta = \delta_L$, что согласно (12) означает выбор $G = 1$.

На рис 1. а-б показано, как ведут себя действительные и мнимые части сравниваемых функций на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. Из этих рисунков видно, что при $G = 1$ зависимости действительной и мнимой частей функции (41) и (42) от параметра Π заметно отличаются от действительной и мнимой части функции $\exp((1+i)\Pi)$

на всем промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$. В частности, модельное решение прогнозирует уменьшение вертикальной компоненты скорости на нижней границе слоя до нуля, а не в $e \approx 2.7$ раза, как в точном решении. Кроме того, на верхней границе слоя аппрокимирующая функция $u_*^{(e)}$ имеет заметную ненулевую отрицательную мнимую часть (см. поведение $\text{Im}(F(1, \Pi))$ на рис. 1b), что означает наличие в законе эволюции вихревого движения фазового сдвига по отношению к волновому возмущению ξ . Другими словами, при моделировании возникает фиктивный эффект наличия конечного времени – релаксации – характерного времени, в течение которого вихревое движение на верхней границе слоя реагирует на изменения, происходящие на свободной поверхности. В точном решении такого эффекта нет: $\text{Im}(\exp((i+1)\Pi)) = 0$ при $\Pi = 0$.

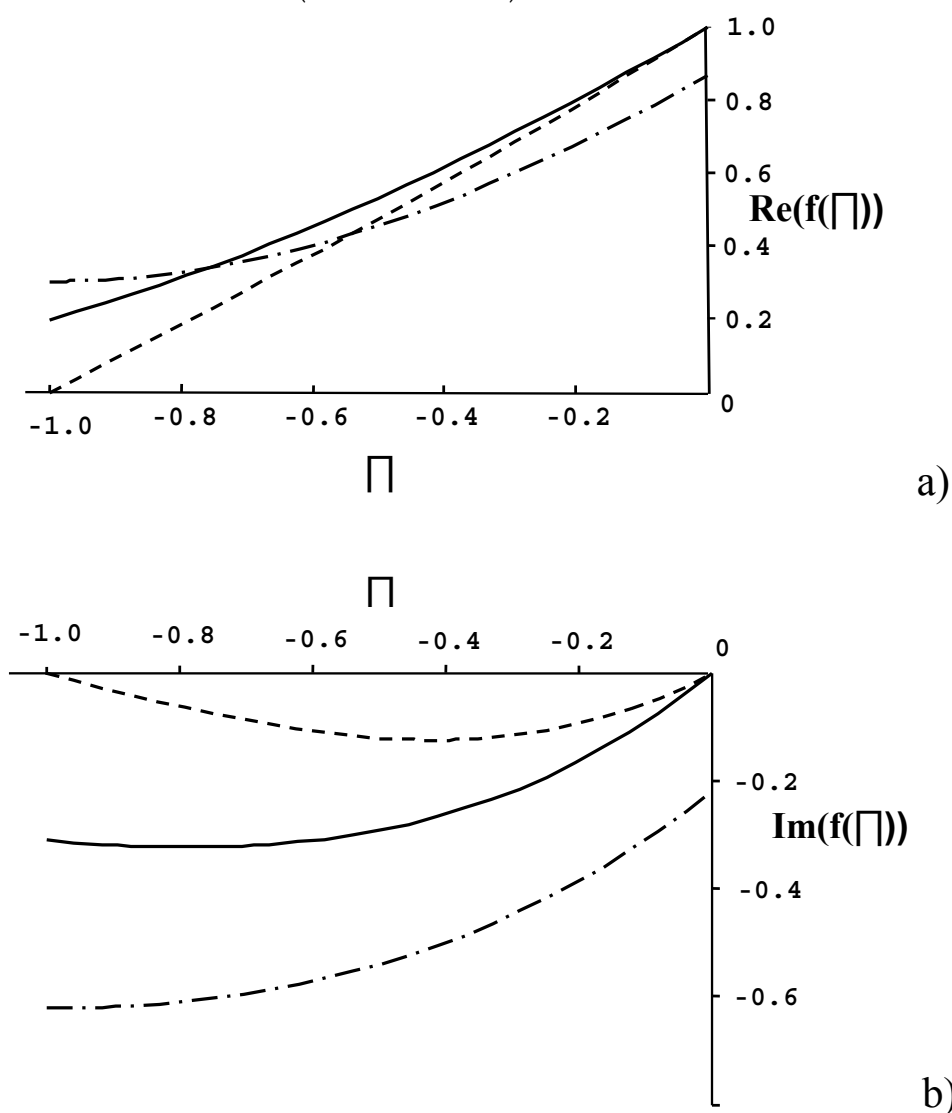


Рис. 1.

Таким образом, при выборе толщины пограничного слоя по Лонгет-Хиггинсу представление о существовании вихревого движения только в приповерхностном слое толщиной δ_L приводит к существенным ошибкам: при моделировании течения получаются неверные значения для компонент скоростей вихревой составляющей течения и появляется фиктивный релаксационный эффект. Эти ошибки моделирования принципиальны в ситуации, когда рассматриваемый метод моделирования применяется для расчета влияния на движение свободной поверхности релаксационных эффектов (релаксации заряда, поверхностно-активных веществ и т.п.), ввиду их чувствительности к поведению поля скоростей непосредственно в приповерхностной области течения [123 – 124].

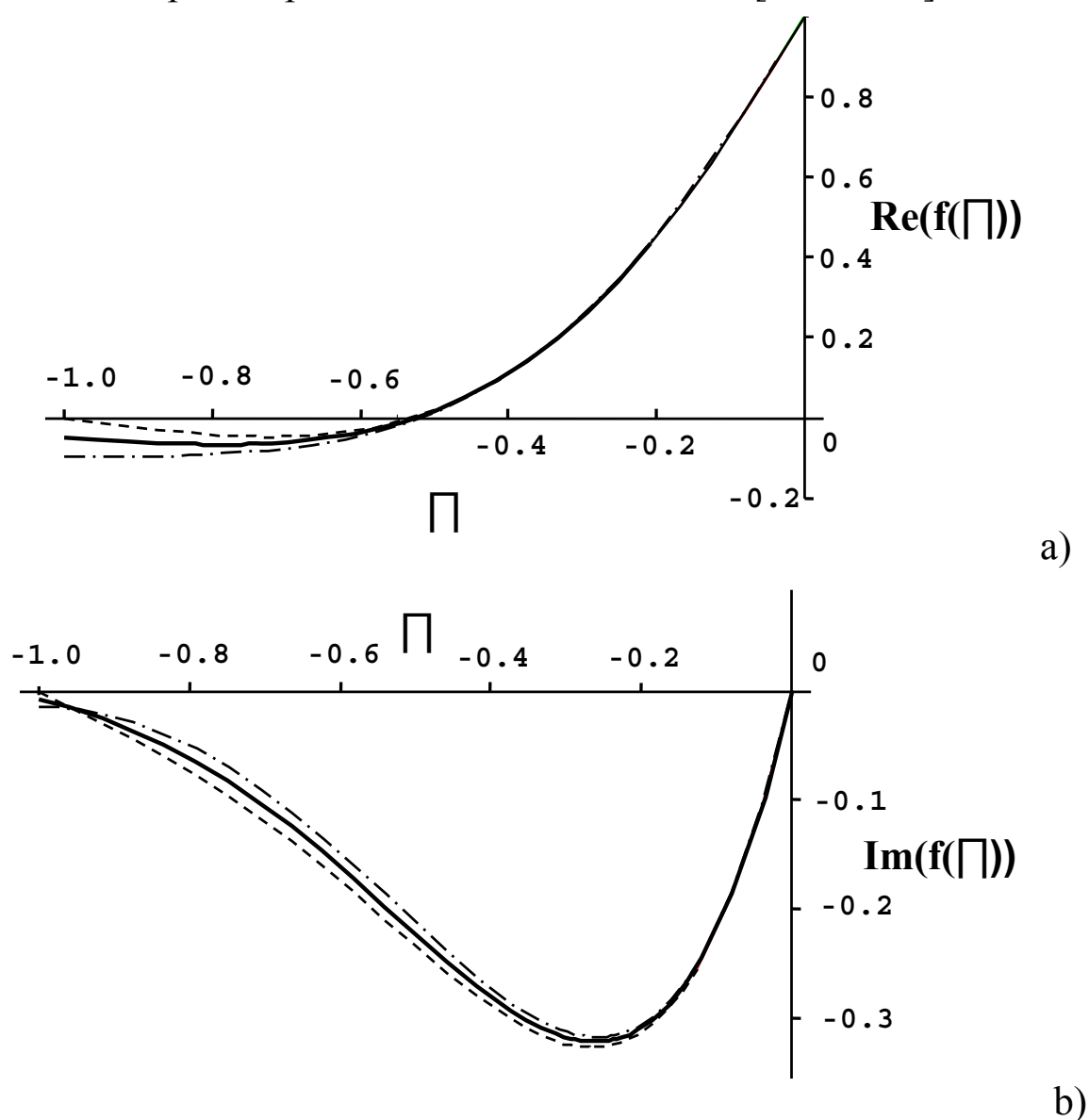


Рис. 2.

На рис. 2 – 4 построены зависимости действительных и мнимых частей функций $\exp(G(i+1)\Pi)$, $\Phi(G,\Pi)$ и $F(G,\Pi)$ на промежутке $-1 \leq \Pi \leq 0$ при различных значениях $G=3$ (рис. 2), $G=4$ (рис. 3) и $G=5$ (рис. 4). Из рисунков видно, что при увеличении значения G разница между рассматриваемыми функциями быстро уменьшается. Точнее говоря, уменьшается абсолютная погрешность, с которой функции $\Phi(G,\Pi)$ и $F(G,\Pi)$ модельного решения (40) аппроксимируют функцию $\exp(G(i+1)\Pi)$ точного решения (39).

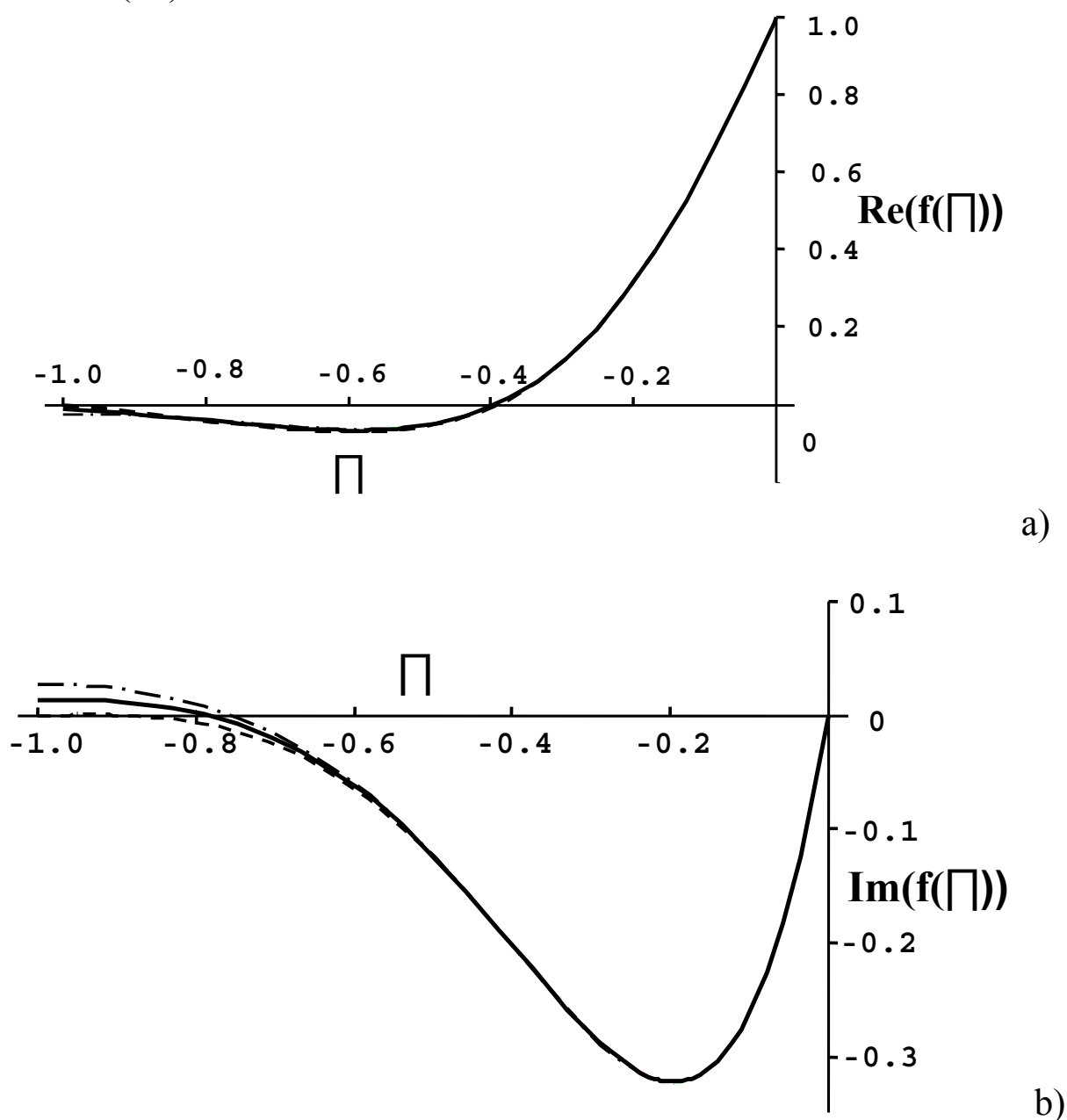


Рис. 3.

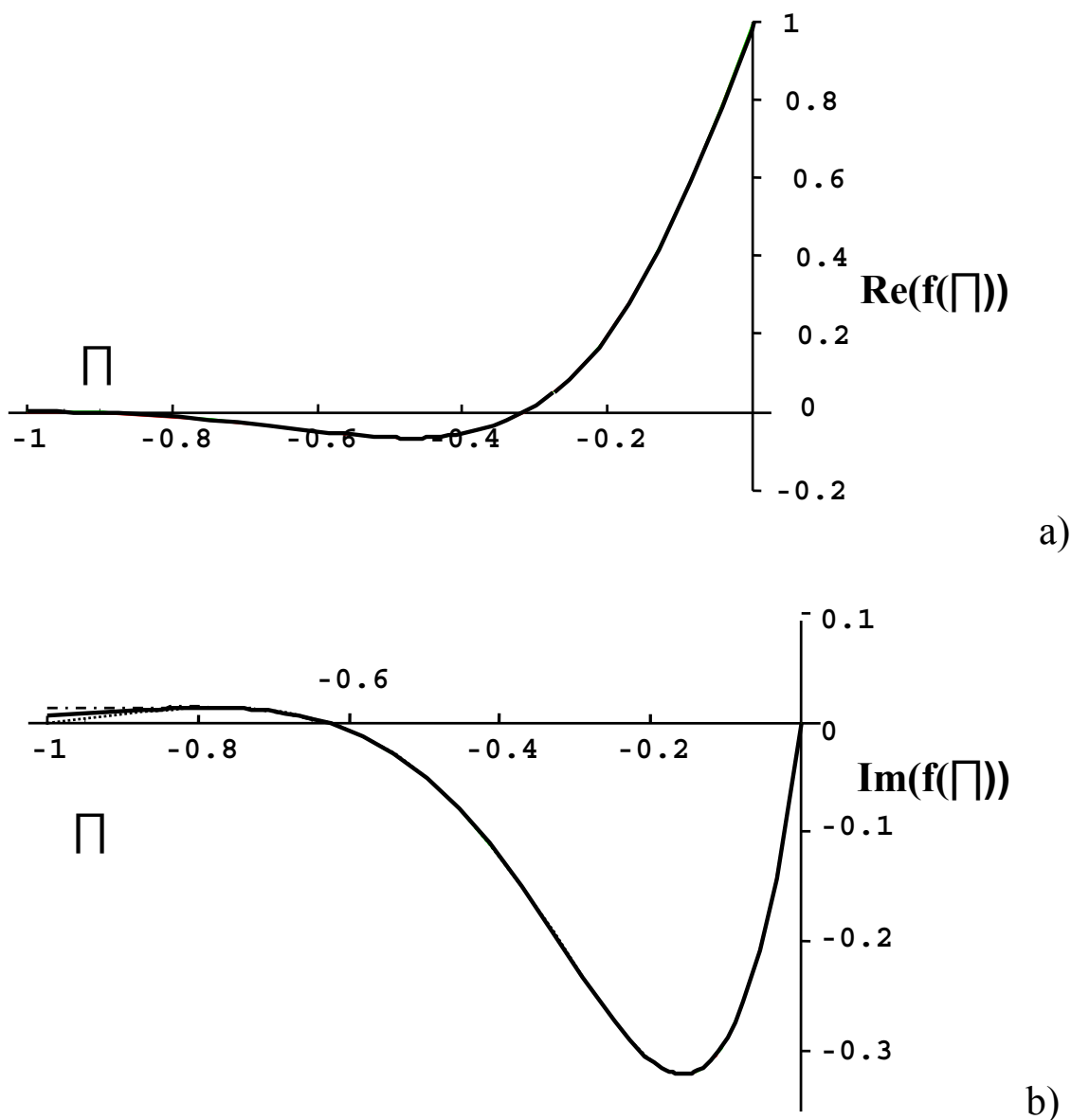


Рис. 4

Рис. 1 – 4. Сравнение зависимости амплитудных множителей при периодической части волнового решения от безразмерной глубины Π : точного (обозначенного сплошной линией) и модельных (обозначено пунктиром для горизонтальной компоненты скорости и штрих-пунктиром для вертикальной) построенные при различных значениях коэффициента G .

Сплошная линия соответствует функции $f(\Pi) = \exp((1+i)G \cdot \Pi)$,

пунктир – $f(\Pi) = \Phi(G, \Pi)$, штрих-пунктир – $f(\Pi) = F(G, \Pi)$.

Рисунки с индексом «а» соответствуют действительным частям комплексных амплитудных множителей,
рисунки с индексом «б» – мнимым.

Рис. 1. $G = 1$. Рис. 2. $G = 3$. Рис. 3. $G = 4$. Рис. 4. $G = 5$

Расчеты показывают, что погрешность аппроксимации, понимаемая в смысле абсолютного значения максимального отклонения аппроксимирующих функций от точной величины, достигает максимума на нижней границе слоя при $\Pi = -1$. На большей части пограничного слоя $0.8 \leq \Pi \leq 0$ эта погрешность при $G \geq 4$ примерно на порядок меньше (см. рис. 3 – 4). При значении $G = 4$ сравнение действительных частей функций $\exp(G(i+1)\Pi)$, $\Phi(G, \Pi)$ и $F(G, \Pi)$ (рис. 4а) обнаруживает погрешность ≈ 0.01 , а сравнение мнимых частей этих функций приводит к погрешности ≈ 0.03 . При $G < 4$ соответствующие погрешности увеличиваются (см. рис. 1 – 2), а при $G > 4$ уменьшаются (см. рис. 4 на котором различия между кривыми порядка толщины линии). С определенным запасом точности можно утверждать, что при $G = 4$ абсолютная погрешность, с которой функции $\Phi(4, \Pi)$ и $F(4, \Pi)$ аппроксимируют функцию $\exp(4(i+1)\Pi)$, не превышает 5% от значения этой функции на верхней границе слоя: $\exp(4(i+1)\Pi)|_{\Pi=0} = 1$.

Рассматривая строение модельных (40) и точных (39) выражений, несложно заключить, что аналогичное утверждение имеет место относительно характера аппроксимации соотношений (29) выражениями (30). Так, для горизонтальной компоненты скорости имеем

$$u^{(e)} - u_*^{(e)} = \Delta u^{(e)} = \frac{1}{2} \alpha k \sqrt{2\nu\omega_0} (1+i)i \Delta\Phi \exp(\theta) + K.C.;$$

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi(G, \Pi) = \exp(G(1+i)\Pi) - \Phi(G, \Pi).$$

Отсюда на основании (39) и выполненных оценок получаем

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta u^{(e)}|}{|u^{(e)}|_{\Pi=0}} &= \frac{|\Delta\Phi|}{|\exp(G(1+i)\Pi)|_{\Pi=0}} = |\Delta\Phi| = \sqrt{\text{Re}(\Delta\Phi)^2 + \text{Im}(\Delta\Phi)^2} \approx \\ &\approx \sqrt{0.01^2 + 0.03^2} \approx 0.03. \end{aligned}$$

Таким образом, можно утверждать, что модельные выражения для вихревых компонент поля скоростей (40) при выборе

значения $G=4$ аппроксимируют точные компоненты (39) вихревой составляющей поля скоростей с погрешностью не более 5% от значения этих компонент на верхней границе слоя. Точность аппроксимации увеличивается с ростом значений G и уменьшается при уменьшении G .

Можно утверждать, что значение $G=4$ — это то значение, начиная с которого толщина пограничного слоя $\delta = G \cdot \delta_L$ может быть принята за глубину, на которой вихревое движение, порождаемое движением свободной поверхности, существенно подавлено. На глубине более чем δ оно настолько незначительно, что при изменении полной формулировки задачи расчета течения на формулировку с дополнительным условием исчезновения ротора скорости при $z \leq \delta$, решение измененной задачи слабо отличается от точного: ошибка лежит в пределах нескольких процентов от значения вихревой компоненты скорости на верхней границе слоя.

9. Заключение. Теория пограничного слоя может быть с успехом использована для аналитического расчета течений жидкости, связанных с капиллярно-гравитационными волнами на свободной поверхности маловязкой жидкости. Но при этом необходимо принимать во внимание, что хорошее приближение к точному решению можно получить только при достаточно больших толщинах пограничного слоя (не менее чем в четыре раза больших традиционно используемых). Структура поля скоростей течения жидкости в пограничном слое вблизи свободной поверхности отличается от строения погранслоного течения вблизи твердой стенки: при наличии свободной поверхности имеется потенциальное течение, доминирующее во всей области движения, в том числе и в пограничном слое; в самом пограничном слое на потенциальное течение аддитивно накладывается вихревое; однако выводы классической теории пограничного слоя о быстром изменении компонент скорости в направлении, перпендикулярном границе по сравнению с их изменением вдоль границы, справедливы только для компонент поля скоростей вихревого движения и неприменимы к компонентам потенциальной части течения.

4. Интерлюдия. Периодические волны на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи несжимаемой жидкости. Дробление заряженных струй

1. Явлению неустойчивости заряженной поверхности жидкости и электродиспергированию жидкостей посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями, например обзоры [5, 98 – 99, 100 – 105, 133 – 135], в которых проанализировано состояние исследований в различных сферах использования обсуждаемого явления. Следует обратить внимание на широкое практическое использование феномена при получении порошков тугоплавких металлов, в химической технологии при распылении ядохимикатов и лакокрасочных материалов, горючего в реактивных двигателях в реактивной космической технике, электрокаплеструйной печати. Он также связан с разработкой новых средств масс-спектрометрического анализа нелетучих и термически нестабильных жидкостей.

Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по изучению неустойчивости движущейся струи жидкости и дробления ее на отдельные капли, многое в физике происходящих в процессах остается до сих пор не выясненным и по-прежнему привлекает внимание исследователей. Сказанное, в частности, относится к анализу устойчивости неосесимметричных мод осцилляций струи, и связано это с тем, что большая часть проведенных к настоящему времени исследований была направлена на получение потоков монодисперсных капель [135 – 139]. Тем не менее феномен распада на капли неосесимметричных струй, выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [140] и менисков жидкости на торцах капилляров [141 – 145], при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду был давно известен. И только в последние годы выполнено несколько работ по исследованию в линейном приближении

устойчивости заряженных струй относительно произвольных неосесимметричных возмущений [146 – 148].

Наиболее интересные работы, появившиеся в последнее время, ориентированы на исследование нелинейных эффектов, связанных с осцилляциями струй и дроблением их на капли (см., например, [149 – 164] и указанную там литературу). Однако лишь пять последних из перечисленных работ относятся к нелинейным осцилляциям заряженной струи, остальные рассматривают нелинейные проблемы осцилляций и дробления незаряженных струй, что тем не менее важно, поскольку многие проблемы нелинейной устойчивости заряженных и незаряженных струй одинаковы, и пока в этом вопросе исследователи находятся на стадии накопления экспериментальных и теоретических данных.

2. Впервые задача теоретического аналитического исследования устойчивости бесконечного цилиндрического столба жидкости под действием капиллярных сил была решена Рэлеем [165 – 166]. В своих работах он опирался на экспериментальные исследования Савара [167], в которых была подробно изучена феноменология распадающейся струи, в частности, показано, что длина нераспадающейся части струи зависит от вида начального возмущения. Было установлено, что струя жидкости, подверженная синусоидальному осесимметричному возмущению, с длиной волны, превышающей длину окружности, ограничивающей сечение струи, неустойчива по отношению к этому возмущению, сама же неустойчивость возникает в результате действия капиллярных сил, а виртуально возникшее возмущение нарастает с течением времени. Рэлей получил соотношение, связывающее скорость роста амплитуды волнового возмущения и его длину волны. Как оказалось, время от момента возникновения возмущения до момента распада струи на капли, вычисленное при помощи линейной теории, неплохо согласовалось с результатами опытов [17, 165 – 167]. В рамках линейного по амплитуде возмущения теоретического анализа удалось выяснить, что коротковолновые возмущения ($kR \gg 1$) на струе жидкости устойчивы и могут распространяться вдоль струи в виде капиллярных волн. Однако они быстро затухают под действием имеющейся в реальных условиях вязкости жидкости [168]. Длинноволновые же возмущения

($kR < 1$) неустойчивы, и при всех длинах волн, удовлетворяющих условию $kR < 1$, реализуется капиллярная неустойчивость струи, сопровождающаяся разбиением струи на капли. Максимальным инкрементом обладают волны с длиной $\lambda_{\max} \approx 9R$ ($k_{\max} \approx 0.7/R$). Величина инкремента неустойчивости при этом равна $\alpha_{\max} = 0,97(\sigma/8\rho R^3)^{1/2}$. В итоге характерный размер капель, на которые распадается струя определится соотношением $D_* = 1,145D^{2/3}\lambda_{\max}^{1/3}$. Подход Рэлея был распространен на случай вязкой жидкости в работах [168]. Выяснилось, что вязкость оказывает стабилизирующее действие на распад струи, а вязкая диссипация внутри струи и вязкое трение на ее поверхности при истечении из насадка генератора приводят к изменению профиля скорости и возрастанию времени релаксации. Указанные явления совместно с более низким значением коэффициента поверхностного натяжения существенно увеличивают длину нераспавшейся части.

Рассмотренная картина развития капиллярной неустойчивости, основанная на линейной теории осцилляций и распада струи, несмотря на успешное объяснение многих экспериментальных фактов, не является исчерпывающей и должна быть обобщена на случай учета внутренних течений в струе, эффектов релаксации вязкости, заряда и коэффициента поверхностного натяжения, а также учета реальной нелинейности феномена. Кроме того, среди необходимых обобщений следует указать и на полуограниченность реальных струй [122, 160, 169 – 174]. Для истолкования расхождений теории и экспериментальных данных были предложены несколько гипотез: динамическое воздействие окружающего воздуха на осесимметричные возмущения струи, увеличивающие давление в сужениях и уменьшающие – на выпуклостях струи, что приводит к более быстрому росту возмущений [17, 168, 175]; влияние вязкости окружающего воздуха [176]; изменение механизма распада струи – переход от осесимметричных возмущений к изгибным (изгибается ось струи) [177 – 178]; переход к турбулентному режиму течения в струе [179 – 180]; влияние релаксации начального профиля скорости в струе [133].

Но наиболее важным в контексте данного обзора является исследование устойчивости струй по отношению к собственному

или индуцированному электрическим зарядам, проведенное экспериментальными и теоретическими средствами в [141 – 142, 181 – 194].

3. Еще на заре исследования электрических явлений Вильям Гилберт заметил, что капля воды на сухой подложке приобретает коническую (вершиной вверх) форму, если над ней на небольшом расстоянии поместить наэлектризованный кусок янтаря [194]. Как было показано уже в наше время [195], при этом на свободной поверхности капельки появляется индуцированный электрический заряд и капля претерпевает неустойчивость: она деформируется к вытянутому сфероиду, на ее вершине формируется эмитирующий выступ, названный «конусом Тейлора», с вершины которого выбрасывается тоненькая струйка воды, распадающаяся на отдельные капельки. По-видимому, первые наблюдения эмиссии струек жидкости, распадающихся на отдельные капельки, при электризации свободной поверхности жидкости связаны с работами одного из первых исследователей электрических явлений аббата Ж. Нолле в середине восемнадцатого века [196]: он заметил, что если человека поместить на изолирующую подставку и подвергнуть электризации (с помощью созданного О. Герике прообраза электрофорной машины), то из ранок и порезов на коже человека начинают бить очень тонкие струйки крови, распадающиеся на отдельные капли.

Систематические исследования феномена электризации менисков жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему и сопровождается выбросом заряженных струй, распадающихся на отдельные капли, начались лишь в начале двадцатого века и связаны с именем Дж. Зелени [197 – 199], который детально исследовал закономерности эмиссии капель и струй жидкости при электризации ее свободной поверхности. В связи с многообразием академических, технических и технологических приложений феномена электродиспергирования жидкости его эксперименты были продолжены в работах В. Маки [140], В. Инглиша [200], В. Дрозина [201], Б. Воннегута и Р. Ньюбауэра [202], М. Наваба, С. Мэйсона [203], К. Шульца [204], Р. Магарвея, Л. Аутхауза [141], В. Клебера [205], Р. Карсона, Ч. Хендрикса [206], Р. Хайнса [207], Дж. Тейлора [194], А. Джонса, Р. Цонга [208], А. Хюбнера, Х. Чу [142], В. Коженко-

ва, А. Кирша, Н. Фукса [99, 209 – 210], Т. Бураева, И. Верещагина [100, 211 – 212], К. Робинсона, Р. Турнбулла, К. Кима [144, 213], Дж. Вилсона [214], Д. Смиа [215], И. Хайяти, А. Бейли, Т. Тад-роса [216 – 218], В. Кириченко, И. Петрянова-Соколова [219 – 221], М. Клопо, Б. Прюнет-Фокса [145, 222], Ф. Ла Мора [223], А. Гомеса, К. Танга [224]. В указанных работах было обнаружено около десятка различных режимов электродиспергирования жидкости, приведенных в систему в работах [225 – 226]. Но для проводимого рассмотрения важно, что во всех этих работах был зафиксирован выброс с заряженной поверхности жидкости заряженных же струй жидкости, распадающихся на отдельные капли. Здесь следует отметить, что в последние двадцать лет регулярно проводятся международные симпозиумы по электродиспергированию жидкости, собирающие сотни докладов, посвященных этому феномену. И хотя подавляющее большинство докладываемых работ носят экспериментальный характер и сообщают в основном об особенностях электродиспергирования конкретных жидкостей в конкретных установках и устройствах, тем не менее общее количество публикаций по обсуждаемой теме исчисляется тысячами и насущной проблемой является построение общей теории электродиспергирования (дробления заряженной струи на капли) с учетом реальных физико-химических характеристик жидкостей и многообразия релаксационных эффектов.

В проведенных экспериментах выяснилось, что форма струй, выбрасываемых со свободной поверхности заряженных капель или наэлектризованных менисков жидкости на вершинах капилляров, по которым жидкость подается в разрядную систему, отличается от цилиндрической, для которой на сегодняшний день выполнены все известные теоретические исследования, как линейного, так и нелинейного приближений. Форма струй, выбрасываемых неустойчивыми каплями и менисками жидкости, неоднократно исследовалась теоретически с различной степенью строгости (см., например, [227 – 235] и указанную там литературу). Так, например, для объемно заряженной осесимметричной струи электропроводной жидкости в [231] получена следующая зависимость радиуса струи от продольной координаты x :

$$r(x) = \sqrt{w \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{w^2 x}} - 1}; \quad w = \sqrt{\frac{1}{4q} + \frac{4}{Re}}; \quad q = \frac{\rho M^2}{2\pi^2 \gamma E a^5},$$

где Re – число Рейнольдса; ρ – массовая плотность жидкости; γ – объемная плотность электрического заряда; M – объемный расход жидкости; E – напряженность внешнего электростатического поля, параллельного оси симметрии струи; a – начальный радиус. Качественно сходные закономерности изменения радиуса струи по мере удаления ее от места образования наблюдаются и для электропроводных жидкостей. В [236] для объемно заряженной струи диэлектрической жидкости (жидкого водорода) исследовалось влияние объемного заряда струи конечной длины на скорость движения ее торца.

Представляется, что исследование на устойчивость по отношению к бесконечно малым волновым деформациям с разумной строгостью регулярными методами для струи такой формы провести будет весьма сложно. Именно по этой причине все выполненные до настоящего времени теоретические (как в линейном, так и в нелинейных приближениях) исследования исходят из цилиндрической невозмущенной формы струи.

Кроме сказанного выше, в перечисленных экспериментах выяснилось, что длина утоньшающейся с удалением от торца капилляра нераспавшейся части струи является функцией величины заряда, приходящегося на единицу длины струи. Свободный же (незакрепленный) конец струи, вытекающей из сопла, с увеличением величины заряда на единицу длины струи начинает совершать хлыстообразное движение, а с его торца отрываются дочерние капельки. Хлыстообразное движение свободного конца струи указывает на реализацию как изгибной неустойчивости струи, так и на ее неустойчивость по отношению к вращению относительно исходной оси симметрии. Вращение относительно оси симметрии струи, эмитированной неустойчивой заряженной поверхностью жидкости, проще всего объясняется одновременным возбуждением двух или нескольких одинаковых мод при наличии между ними сдвига по фазе. Отметим, что в отличие от прагматически обусловленного вынужденного капиллярного распада струй [135] с контролируемыми граничными и начальными условиями обуславливаемая в контексте проводимого исследования спонтанная не-

устойчивость струй (с последующим распадом на капли) характеризуется полной свободой в задании начальных и граничных условий и ничто не препятствует возбуждению на торце капилляра нескольких одинаковых мод с различными начальными фазами. Изгибная же неустойчивость струй нуждается в отдельном исследовании.

В связи со сказанным выше теоретическое и экспериментальное исследование закономерностей распада заряженных струй на капли представляет значительный интерес (особенно если принять во внимание многообразные приложения феномена в практике) и неоднократно проводилось на разном уровне строгости и общности [237 – 257].

Первым устойчивость поверхностно однородно заряженного столба идеальной жидкости по отношению к осесимметричным осцилляциям исследовал Рэлей [165], получивший дисперсионное уравнение для случая длинных волн (когда длина волны много больше радиуса столба жидкости) в виде

$$\omega^2 = \frac{n(n-1)\sigma}{\rho a^3} \left\{ (n+1) - \frac{2Q^2}{\pi \sigma a} \right\},$$

где Q – заряд столба, приходящийся на единицу длины; σ – коэффициент поверхностного натяжения; a – радиус; ω – частота осцилляций; ρ – плотность жидкости; n – номер моды.

Через несколько лет А.В. Бассет, исследуя варикозную неустойчивость заряженной струи, имеющей форму $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \exp(i\omega t)$, выписал дисперсионное уравнение для осцилляций основной моды поверхностно заряженной струи маловязкой жидкости с произвольной длиной волны (с волновым числом k) в виде

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \left\{ (1 - k^2 a^2) - \frac{Q^2}{4\pi \sigma a} \left[1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)} \right] \right\}.$$

Бассет указал, что наличие заряда на струе приводит к ее стабилизации. В соответствии с анализом Рэля на незаряженной струе неустойчивы волны с волновыми числами $k > a^{-1}$. Согласно же результатам Бассета на заряженной струе неустойчивы волны

с меньшими волновыми числами $k^2 a^2 \geq \{1 - \frac{Q^2}{4\pi\sigma a} [1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}]\}$

или с большими длинами волн. Выяснилось, что длина нераспавшейся части струи за срезом сопла, из которого вытекает струя, с ростом поверхностной плотности заряда увеличивается.

Тейлор [194] исправил численный коэффициент в выражении Бассета, получив дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \{(1 - k^2 a^2) - \frac{Q^2}{\pi\sigma a} [1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}]\}.$$

Тейлор же в [194] исследовал изгибную неустойчивость струи, отталкиваясь от известного по экспериментальным исследованиям факта, что при достаточно большой плотности заряда на струе ее конец начинает совершать хлыстообразное движение, распадаясь при этом на отдельные капельки. Тейлор выписал форму струи в виде $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\varphi) \cdot \exp(i\omega t)$, где φ – азимутальный угол, и получил дисперсионное уравнение для изгибной неустойчивости струи:

$$\omega^2 = -\frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{I_1'(ka)}{I_1(ka)} \{k^2 a^2 + \frac{Q^2}{\pi\sigma a} [1 + \frac{K_1'(ka)}{K_1(ka)}]\}.$$

Условие нейтрального равновесия струи по отношению к изгибной неустойчивости отсюда получается в виде

$$\frac{Q^2}{\pi\sigma a} = \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}.$$

В работе [191] исследовано влияние вязкости и электрического поля на характер устойчивости капиллярных струй, рассмотрены неосесимметричные возмущения струи, сделана попытка прояснить непонятные моменты (в которых имеет место рассогласование теории и эксперимента) линейной теории. Описаны два вида неустойчивостей, вызываемые поверхностным натяжением и силой Кулона. Полученное дисперсионное уравнение и выражение для скорости распада струи проанализированы в предельных случаях малой и большой вязкости и численно изучены в промежуточной области. Кроме того, в [191] описаны но-

вые типы мод, которые приводят к вращательному движению струи.

Экспериментальные исследования электродиспергирования жидкости с заряженной поверхности жидкости (см., например, [181 – 184, 128 – 193, 236, 255 – 257]) свидетельствуют о возможности возбуждения неосесимметричных мод заряженных струй, но в теоретическом отношении этот вопрос исследован пока недостаточно полно, хотя из феноменологии [194, 196 – 144] с очевидностью следует, что реализация неустойчивости именно этих мод в существенной степени ответственна как за хлыстообразное движение струй, так и за полидисперсный характер их распада на капли. В [192] было получено (правда, с ошибкой) дисперсионное уравнение для осцилляций произвольной моды поверхностно заряженной идеально электропроводной струи несжимаемой жидкости, но проведенное далее качественное исследование затронуло только осесимметричную моду. В [240 – 242, 246] говорится о теоретическом исследовании устойчивости мод с $m=1$ и $m=2$. Мода с $m=2$ называется «Боровской» и согласно утверждению [240 – 242, 246] ее возбуждение приводит к продольному расщеплению струи на две дочерние струи, как это зафиксировано в экспериментах [249]. Такое утверждение повторяется в [233 – 234] и вызывает недоумение, поскольку продольное расщепление неосесимметричной струи, периодически изменяющей свою форму по азимутальному углу, должно проходить с нарушением начальной винтовой симметрии и, следовательно, возможность ее реализации сомнительна.

Дисперсионные уравнения для различным образом заряженных струй электропроводных и диэлектрических жидкостей получались с различным успехом и с различными погрешностями в теоретических работах, выполненных в линейном приближении по амплитуде осцилляций [146 – 148, 42 – 46, 181 – 185, 237 – 248]. В теоретических работах [251 – 254] рассмотрены конкретные вопросы расчета характеристик струй, эмитируемых с конуса Тейлора.

Детальный теоретический анализ закономерностей осцилляций и величин инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод заряженных электропроводных и диэлектрических струй проведен в [146 – 148] в связи с возможностью приложения ре-

зультатов к истолкованию закономерностей спонтанного распада струй. Выяснилось, что инкременты неустойчивости неосесимметричных волн в маловязких струях электропроводных жидкостей при больших плотностях поверхностного заряда сравниваются с инкрементами неустойчивости осесимметричных волн, а в сильновязких струях существенно их превышают [146 – 147]. Это обстоятельство вместе с фактом утоньшения формы струи по мере удаления ее от места формирования позволяет предположить, что при спонтанном капиллярном распаде заряженных струй на капли важную роль в формировании спектра распределения капель по размерам должна играть неустойчивость неосесимметричных мод капиллярных осцилляций струи.

Для объемно заряженных струй диэлектрических жидкостей [148] величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод снижаются при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости, причем этот эффект сказывается тем сильнее, чем меньше азимутальное число m (чем меньше степень несимметричности) и достигают минимума для осесимметричных мод. Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных условиях превышать величины инкремента неустойчивости осесимметричных мод, что существенно скажется на закономерностях дробления струи на капли.

В работах [184, 236 – 242] предполагалось исследовать влияние эффекта релаксации электрического заряда (влияние конечности скорости выравнивания электрического потенциала струи, или, иначе говоря, влияние конечности скорости переноса заряда в реальной жидкости) на струе на ее устойчивость, но во всех перечисленных работах неверно выписано уравнение баланса поверхностного заряда (отсутствует слагаемое, связанное с кривизной поверхности струи) и, следовательно, неверны и полученные результаты, на что и было указано в [150]. Только в последнее время авторами настоящей работы было получено корректное дисперсионное уравнение, учитывающее эффект релаксации заряда:

$$- 2k^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon} G_m(k) \frac{\gamma}{\rho} (1 + sM_{mk} - a)(m^4 - l^4) + n2sa(m^4 + l^4) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\gamma}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
& + m^2 [n (f G_m(k) + 2w(k^2 - l^2)(1 - a)) + s^2(w M_{mk} - a n) + \\
& + sw(1 - a + 2n(k^2 - l^2)M_{mk}) + ns[(f - ab)G_m(k)M_{mk} - \\
& - n2a (G_m(k)(1 - 2l^2) + k^2 - l^2)]] \} + \\
& + l^2 G_m(l) \{ 2n \check{w}(1 + s M_{mk} - a)(m^4 - k^4) + 2nsa(m^4 + k^4) \}_{\mathbf{BI}} \\
& + nl^2 \check{f} G_m(k)(1 + s M_{mk}) + sa (s - G_m(k)(2n + b M_{mk})) \}_{\mathbf{BI}} \\
& + m^2 \check{f} sa w + (2nf + sw)(1 + s M_{mk}) + 2nsa (s - b M_{mk} + n(l^2 - 2)) \}_{\mathbf{BI}} \\
& + k^2 [- n f G_m(k)(1 + s M_{mk}) - 4nw G_m(k)(1 - a) + s^2(na - w M_{mk}) - \\
& - sw(1 - a + 4n G_m(k)M_{mk}) + nsa (b G_m(k)M_{mk} + 2n(l^2 + 3m^2 + 5G_m(k)))] \} + \\
& + 2G_m^2(l) \{ 2nk^4 [w(1 + s M_{mk} - a) - nsa] - nl^2 [f G_m(k)(1 + s M_{mk}) + \\
& + sa (s - G_m(k)(2n + b M_{mk})) + m^2 (2nsa + w(1 + s M_{mk} - a))] + \\
& + k^2 [n f G_m(k)(1 + s M_{mk}) - nwm^2 G_m(k)(1 - a) + s^2(na - w M_{mk}) + \\
& + sw(1 - a + nm^2 G_m(k)M_{mk}) - \\
& - nsa (b G_m(k)M_{mk} + 2n[l^2 + (1 - m^2)G_m(k)])] \}_{\mathbf{BI}} = 0;
\end{aligned}$$

$$a = a(s, s, \varepsilon_d, w, m, k) \in L_{mk} M_{mk}; b = b(w, m, k) \in k^2 + m^2 - 1 + w;$$

$$f_{mk} = f_{mk}(s, s, \varepsilon_d, w) = w H_m(k) + ab; l^2 \equiv k^2 + s/v;$$

$$M_{mk} = M_{mk}(s, s, \varepsilon_d, w) \in 2\sqrt{pw} \check{f} - 2\sqrt{pw} G_m(k)(4ps + \varepsilon_d s) \}_{\mathbf{BI}}^1,$$

$$L_{mk} = L_{mk}(s, s, \varepsilon_d, w) \in sH_m(k) - G_m(k)(4ps + \varepsilon_d s); w \in 4p\varpi_0^2;$$

$$G_m(x) \in xI_m''(x)/I_m(x); \quad H_m(x) \in xK_m''(x)/K_m(x),$$

где k и m – волновое и азимутальное числа; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; R – радиус струи; ρ – массовая плотность; ν – коэффициент кинематической вязкости; γ – коэффициент поверхностного натяжения; σ – удельная электропроводность; ε_d – диэлектрическая проницаемость; ϖ_0 – поверхностная плотность электрического заряда на струе. Анализ дисперсионного уравнения показал, что влияние эффекта релаксации заряда заметно только в случае больших вязкостей жидкости. Движения жидкости, связанные с перераспределением заряда по поверхности струи при ее осцилляциях, имеют аperiодический (затухающий) характер и приводят к более быстрому рассеиванию механической энергии осцилляций, или, иначе говоря, к более быстрому затуханию волн на струе. Обсуждаемый эффект зависит от волнового и азимутального чисел и по разному проявляется для волн с различной степенью асимметрии и для жидкостей с различными физико-химическими свойствами и может способствовать умножению количества наблюдаемых режимов электродиспергирования.

3. Нелинейные осцилляции струй. Как отмечалось выше, большая часть теоретических нелинейных исследований осцилляций и устойчивости струй выполнено для незаряженных струй, кроме выше упомянутой работы [160], выполненной численными методами. Лишь в [193, 258] рассматривается неустойчивость заряженных струй идеальной жидкости, также выполненными численными методами.

Не будем останавливаться на обсуждении теоретических работ по нелинейным осцилляциям и дроблению струй, выполненных численными методами, обладающими стандартными ограничениями общности проведенных рассмотрений [156 – 160, 172 – 173, 193, 258]. Познакомиться с используемой регулярной процедурой аналитического асимптотического нелинейного анализа устойчивости заряженной струи можно на конкретном примере вполне корректно выполненных, содержащих детальный разбор процедуры ана-

литического счета работ [161 – 164], выполненных во втором порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к радиусу струи. В этих работах выяснилось, что решение задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной струи уже во втором порядке малости по амплитуде деформации невозмущенной цилиндрической струи позволяет обнаружить вырожденное резонансное взаимодействие волны, определяющей начальную виртуальную одномодовую деформацию, с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и поверхностной плотности электрического заряда на струе. В частности, осесимметричная мода может взаимодействовать с модой, ответственной за закручивание струи ($m=1$). При нелинейном резонансном взаимодействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из начально возбужденной моды с $m=1$ энергия может перекачиваться как в осесимметричную моду с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную с $m=2$ также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с $m \geq 2$ возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе. Последнее условие может выполняться для тонкого конца электропроводной струи, выброшенной заряженной поверхностью жидкости, имеющей постоянный потенциал поверхности и, следовательно, неоднородное распределение поверхностного заряда, плотность которого будет увеличиваться с утоньшением струи. В итоге закономерности перераспределения энергии нелинейной волны за счет нелинейного резонансного взаимодействия будут различны для начального и конечного участков струи, что в свою очередь приведет к различию условий дробления струи на различных ее участках. При многомодовой начальной деформации общие закономерности реализации нелинейного волнового движения на струе остаются прежними, но, кроме вырожденных резонансов, появляются и вторичные комбинационные. Энергия теперь переносится и от высоких мод к низким, и появляются условия для реализации распадной неустойчивости.

Отличительной особенностью аналитических асимптотических расчетов нелинейных осцилляций струи является их математическая громоздкость, примером чего может служить результат расчета формы образующей нелинейно-осциллирующей струи, когда начальная деформация равновесной цилиндрической формы задается в виде неосесимметричной моды, проведенного авторами настоящей статьи в третьем порядке малости.

Кроме появления слагаемых третьего порядка малости, мало сказывающихся на рельефе струи, наиболее интересным результатом проведенного расчета по сравнению с ранее проведенными в [161 – 164] расчетами второго порядка малости является появление нелинейной поправки к частоте волны, наличие которой приводит к изменению критических условий (критической длины волны и величины поверхностной плотности электрического заряда) реализации неустойчивости струи. Коэффициент g в зависимости от волнового числа, поверхностной плотности электрического заряда и азимутального числа m может быть как отрицательным, так и положительным, что означает возможность смещения критических условий реализации неустойчивости для волн с различной асимметрией в различных направлениях: либо в сторону их увеличения, либо в сторону уменьшения.

Следует также отметить, что все аналитические исследования нелинейных осцилляций струй, как незаряженных, так и заряженных, проведены для модели идеальной жидкости, что существенно сужает возможность практического использования полученных в расчетах результатов. Поэтому представляется необходимым провести анализ нелинейных осцилляций струй вязкой жидкости.

5. Нелинейные неосесимметричные волны на однородно заряженной поверхности струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости

5.1. Одномодовая начальная деформация свободной поверхности струи

1. Во всех работах, посвященных нелинейным исследованиям, рассматривались лишь осесимметричные осцилляции струи, поскольку авторы проведенных исследований интересовались в основном закономерностями разбиения струи на капли, а еще Рэлей обнаружил для незаряженной струи, что ее разбиение на отдельные капли происходит за счет возбуждения осесимметричной волны. В то же время в [146 – 148] показано, что для струй, достаточно сильно заряженных (поверхностно или объемно), инкременты неустойчивости неосесимметричных волн могут превышать инкремент неустойчивости осесимметричной волны. Поэтому в настоящем рассмотрении будет проведено аналитическое асимптотическое исследование нелинейных осцилляций неосесимметричных волн на поверхности заряженной идеально проводящей струи в рамках метода многих масштабов, использованного ранее в [149] для исследования нелинейных осцилляций незаряженной струи.

2. Рассмотрим движущуюся с постоянной скоростью \overline{U}_0 бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности распределен заряд, поверхностная плотность которого в равновесном состоянии, т.е. в условиях отсутствия каких-либо возмущений цилиндрической формы струи, имеет величину χ .

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью \overline{U}_0 , а ось OZ направ-

лена вдоль оси симметрии невозмущенной струи по направлению ее движения $\vec{n}_z \parallel \vec{U}_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Проследим эволюцию во времени распространяющейся по поверхности струи в положительном направлении оси OZ неосесимметричной волны с волновым числом k , амплитуда которой мала по сравнению с радиусом струи.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, приняв в качестве основных единиц R, ρ, σ (т.е., полагая, $R = \rho = \sigma = 1$). В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1, \quad (1)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты, t – время, ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели потенциального течения математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи:

$$\Delta \Psi = 0, \quad \Delta \Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и в бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \Psi| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):
кинематического:

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Psi \cdot \nabla F = 0; \quad F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)]; \quad (4)$$

динамического:

$$r = 1 + \xi: \quad \Delta P - \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla \Phi)^2 - \nabla \cdot \vec{n} = 0 \quad (5)$$

и условия эквипотенциальности поверхности струи:

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_s(t). \quad (6)$$

В выражении (5) ΔP – перепад давлений внутри и вне струи в равновесном состоянии ($\xi = 0$, $\Psi = 0$); предпоследнее и последнее слагаемые – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; \vec{n} – вектор нормали к поверхности (1): $\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$.

Краевую задачу (1) – (6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi\lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \pi\lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2) – (8) необходимо задать еще начальные условия. Однако, в силу того, что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах об отыскании периодических волновых профилей поверхности идеальной жидкости принято выбирать начальные условия так, чтобы решение принимало наиболее простой вид [61 – 63, 149]. Этот прием и будет использован в нижеследующих рассуждениях.

Будем искать решение задачи (2) – (8) в виде разложения по малому параметру ε , в качестве которого выберем отношение амплитуды волны к радиусу струи. Используя метод многих

масштабов и ограничиваясь точностью до второго порядка малости включительно, представим искомые функции ξ , Ψ и Φ в виде рядов по степеням ε , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется двумя временными масштабами – основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Psi(r, \varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{9}$$

Поскольку мы считаем, что волна, распространяющаяся по поверхности струи, бежит в положительном направлении оси OZ , то примем, что форма свободной поверхности жидкости

$$r = 1 + \varepsilon \cdot f(\varphi) \cdot \left(A(T_1) \cdot \exp(i\theta) + \overline{A(T_1) \cdot \exp(i\theta)} \right) + O(\varepsilon^2),$$

где $\theta \equiv k \cdot z - \omega_m(k) \cdot T_0$, где $\omega_m(k)$ – частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; $f(\varphi)$ – действительная функция, описывающая форму поперечного сечения струи, $A(T_1)$ – пока неизвестная комплексная функция, зависящая от медленного времени T_1 . Горизонтальная черта означает комплексное сопряжение.

Очевидно, что $f(\varphi)$ – периодическая функция с периодом 2π и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_m \cdot \exp(im\varphi) + \overline{C_m} \cdot \exp(-im\varphi) \right);$$

$$C_m = \frac{1}{2\pi(1 + \delta_{m,0})} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cdot \exp(-im\varphi) \cdot d\varphi.$$

Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся рассмотрением случая, когда форма поперечного сечения струи определяется какой-либо одной гармоникой, т.е. примем, что

$$f(\varphi) = C_m \cdot \exp(im\varphi) + \overline{C_m} \cdot \exp(-im\varphi);$$

тогда, переобозначая надлежащим образом коэффициенты ($\zeta^{(+)}(T_1) = C_m \cdot A(T_1)$; $\zeta^{(-)}(T_1) = \overline{C_m} \cdot A(T_1)$), выражение для свободной поверхности струи запишем в виде

$$r = 1 + \varepsilon \left[\left(\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right) \cdot \exp(i\theta) + (к.с.) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее аббревиатура (к.с.) обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

Выражение (10) будем рассматривать как начальное условие, необходимое для замыкания краевой задачи (2) – (8).

3. Подстановка разложений (9) в уравнения (2) – (8), использование оператора $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$ для вычисления производной по времени и разложение условий (4) – (8) в ряд Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r=1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε и с приравниванием нулю множителей при различных степенях ε , позволяют вместо исходной краевой задачи получить задачи различных порядков малости.

3а. В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю: $\Phi_s^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи

$$\Delta p = 1 - 2\pi\chi^2.$$

3b. В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9), функции $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ ($j=1,2$) в первом приближении являются решениями записанных для них уравнений, полностью аналогичных (2), (3).

Система граничных и дополнительных условий (4) – (8) в первом порядке малости принимает вид

$$r=1: \quad \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \right\} + \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} = 0; \quad (13)$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_s^{(1)}(t); \quad (14)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right]_{r=1} d\varphi \cdot dz = 0; \quad (15)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)} d\varphi \cdot dz = 0. \quad (16)$$

На основании (1), (9) и (10) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}$ получим следующее выражение:

$$\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) = [\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + (k.c.). \quad (17)$$

Явный вид функций $\zeta^{(+)}(T_1)$ и $\zeta^{(-)}(T_1)$ может быть определен лишь при анализе задачи следующего порядка малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (17) удовлетворяет условию неизменности объема (16).

Принимая во внимание, что поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (12) и условием эквипотенциальности (14), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ методом разделения переменных, представив их в виде

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = A(T_1) \cdot B(r) \cdot D(\varphi) \cdot \exp(i\theta) + (k.c.);$$

$$\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = [S(T_1) \cdot C(r) \cdot W(\varphi) \cdot \exp(i\theta) + (k.c.)] + \Phi_s^{(1)}(t). \quad (18)$$

Подставляя (18), а также (17), (11) в (12), (14) и приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$A(T_1) \cdot D(\varphi) = \frac{-i\omega}{B'(1)} [\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi)];$$

$$S(T_1) \cdot W(\varphi) = \frac{4\pi\chi}{C(1)} [\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi)]. \quad (19)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи.

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (2), которые после подстановки в них (18), (19) легко сводятся к имеющим одинаковый вид обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно функций $B(r)$ и $C(r)$:

$$\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dG(r)}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \cdot G(r) = 0;$$

здесь $G(r) \equiv B(r)$ или $G(r) \equiv C(r)$. Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$.

Учитывая, что добавки к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ должны удовлетворять условиям ограниченности (3), можно записать $B(r) = I_m(kr)$, $C(r) = K_m(kr)$. В результате выражения для поправок к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ примут окончательный вид:

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = -i\omega \frac{I_m(kr)}{k \cdot I'_m(k)} \left[\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta);$$

$$\Phi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1) = 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \left[\zeta^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta). \quad (20)$$

При записи выражения для $\Phi^{(1)}$ учтено, что из условия сохранения заряда следует, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности равна нулю: $\Phi_s^{(1)}(t) = 0$.

Из системы граничных и дополнительных условий (12) – (16) осталось неиспользованным динамическое граничное условие (13). Подставляя в него решения (17), (20) и (11), получаем дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k и азимутальное число m с частотой колебаний ω :

$$\omega_m^2(k) = G_m(k) [k^2 + m^2 - 1 + W \cdot (1 + H_m(k))]; \quad (21)$$

$$G_m(k) \equiv \frac{k \cdot I'_m(k)}{I_m(k)}; \quad H_m(k) \equiv \frac{k \cdot K'_m(k)}{K_m(k)}; \quad W \equiv 4\pi \cdot \chi^2.$$

3с. Во втором порядке малости из системы (4)–(8) получим неоднородные уравнения для поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ (см. «Приложение А»). Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого (11) и первого (17), (20) порядков малости, после подстановки которых граничные и дополнительные условия (А.1)–(А.5) примут вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = \left[\frac{\partial \zeta^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \zeta^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) +$$

$$+i \left[X_1 \left(\left(\zeta^{(+)} \right)^2 \exp(i2m\varphi) + \left(\zeta^{(-)} \right)^2 \exp(-i2m\varphi) \right) + 2X_2 \zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + (\kappa.c.); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi \xi^{(2)} \right] + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} = \\ & = -i\omega \frac{1}{G_m(k)} \left[\frac{\partial \zeta^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \zeta^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + \\ & + \left[Y_1 \left(\left(\zeta^{(+)} \right)^2 \exp(i2m\varphi) + \left(\zeta^{(-)} \right)^2 \exp(-i2m\varphi) \right) + Y_2 \cdot 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + \\ & + Y_3 \cdot 2\zeta^{(+)} \cdot \overline{\zeta^{(-)}} \cdot \exp(i2m\varphi) + Y_4 \left(\left| \zeta^{(+)} \right|^2 + \left| \zeta^{(-)} \right|^2 \right) + (\kappa.c.); \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} - 4\pi\chi \xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)} + L \left\{ \left[\left(\zeta^{(+)} \right)^2 \exp(i2m\varphi) + \left(\zeta^{(-)} \right)^2 \exp(-i2m\varphi) + 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + \right. \\ \left. + 2\zeta^{(+)} \cdot \overline{\zeta^{(-)}} \cdot \exp(i2m\varphi) + \left(\left| \zeta^{(+)} \right|^2 + \left| \zeta^{(-)} \right|^2 \right) + (\kappa.c.) \right\}; \quad (24) \end{aligned}$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} d\varphi \cdot dz = -4\pi^2 \lambda \chi [k^2 + m^2 - 4H_m(k)] \cdot \left(\left| \zeta^{(+)} \right|^2 + \left| \zeta^{(-)} \right|^2 \right); \quad (25)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} d\varphi \cdot dz = -\pi\lambda \cdot \left(\left| \zeta^{(+)} \right|^2 + \left| \zeta^{(-)} \right|^2 \right). \quad (26)$$

Все недостающие обозначения приведены в «Приложении В». При записи уравнения (25) использовалось рекуррентное соотношение

$$K_m''(k) = \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) K_m(k) - \frac{1}{k} K_m'(k).$$

Зададимся целью найти частное решение задачи второго порядка малости, удовлетворяющее записанным для функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ уравнениям (2), (3) и системе уравнений (22) – (26). Вид

функций неоднородности в (22) – (24) подсказывает характер зависимости искомого решения от координаты φ и аргумента θ . На этом основании примем, что

$$\begin{aligned}\xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = & A_0 + [A_1^{(+)} \cdot \exp(im\varphi) + A_1^{(-)} \cdot \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + \\ & + [A_2 + A_2^{(+)} \cdot \exp(i2m\varphi) + A_2^{(-)} \cdot \exp(-i2m\varphi)] \cdot \exp(i2\theta) + A_3 \cdot \exp(i2m\varphi) + (k.c.); \quad (27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & B_0 \cdot F_0(r) + [B_1^{(+)} \cdot F_1^{(+)}(r) \cdot \exp(im\varphi) + B_1^{(-)} \cdot F_1^{(-)}(r) \cdot \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + \\ & + [B_2 \cdot F_2(r) + B_2^{(+)} \cdot F_2^{(+)}(r) \cdot \exp(i2m\varphi) + B_2^{(-)} \cdot F_2^{(-)}(r) \cdot \exp(-i2m\varphi)] \cdot \exp(i2\theta) + \\ & + B_3 \cdot F_3(r) \cdot \exp(i2m\varphi) + (k.c.); \quad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & D_0 \cdot C_0(r) + [D_1^{(+)} \cdot C_1^{(+)}(r) \cdot \exp(im\varphi) + D_1^{(-)} \cdot C_1^{(-)}(r) \cdot \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + \\ & + [D_2 \cdot C_2(r) + D_2^{(+)} \cdot C_2^{(+)}(r) \cdot \exp(i2m\varphi) + D_2^{(-)} \cdot C_2^{(-)}(r) \cdot \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) + \\ & + D_3 \cdot C_3(r) \cdot \exp(i2m\varphi) + (k.c.). \quad (29)\end{aligned}$$

Зависимости функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от координаты r определим из уравнений Лапласа. Подставляя (28), (29) в (2) и требуя обращения в нуль сумм коэффициентов при экспонентах с различными показателями, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для каждой из функций $F_j^{(\pm)}(r)$ и $C_j^{(\pm)}(r)$ $j=0,1,2,3$. Решения этих уравнений с учетом условий ограниченности (3) позволяют привести выражения (28), (29) для потенциалов $\Psi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$ к виду

$$\begin{aligned}\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & B_0 + [B_1^{(+)} \cdot \exp(im\varphi) + B_1^{(-)} \cdot \exp(-im\varphi)] \cdot I_m(kr) \cdot \exp(i\theta) + \\ & + [B_2 \cdot I_0(2kr) + (B_2^{(+)} \cdot \exp(i2m\varphi) + B_2^{(-)} \cdot \exp(-i2m\varphi)) \cdot I_{2m}(2kr)] \cdot \exp(i2\theta) + \\ & + B_3 \cdot r^{2m} \cdot \exp(i2m\varphi) + (k.c.); \quad (30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & D_0 \cdot \ln r + [D_1^{(+)} \cdot \exp(im\varphi) + D_1^{(-)} \cdot \exp(-im\varphi)] \cdot K_m(kr) \cdot \exp(i\theta) + \\
& + [D_2 \cdot K_0(2kr) + (D_2^{(+)} \cdot \exp(i2m\varphi) + D_2^{(-)} \cdot \exp(-i2m\varphi)) \cdot K_{2m}(2kr)] \exp(i2\theta) + \\
& + D_3 \cdot r^{-2m} \cdot \exp(i2m\varphi) + (k.c.)
\end{aligned} \tag{31}$$

Коэффициенты $A_j^{(\pm)}$, $B_j^{(\pm)}$ и $D_j^{(\pm)}$ определяются из системы уравнений (22) – (26). Заметим, что B_0 может быть функцией времени, выбранной в удобной для записи решения форме, поскольку никакого физического значения она не имеет.

Из условий сохранения объема (26) и заряда (25) несложно найти

$$A_0 = -\frac{1}{2} \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right); \quad D_0 = -2\pi\chi(k^2 + m^2) \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right). \tag{32}$$

Подставляя (27) и (30) в кинематическое граничное условие (22) и приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых экспонентах из левой и правой частей равенства, получим

$$k \cdot I'_m(k) \cdot B_1^{(\pm)} + i \cdot \omega_m(k) \cdot A_1^{(\pm)} = \frac{\partial \zeta^{(\pm)}}{\partial T_1};$$

$$2k \cdot I'_{2m}(2k) \cdot B_2^{(\pm)} + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot A_2^{(\pm)} = i \cdot X_1 \cdot \left(\zeta^{(\pm)} \right)^2;$$

$$2k \cdot I'_0(2k) \cdot B_2 + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot A_2 = i \cdot X_2 \cdot 2\zeta^{(+)} \cdot \zeta^{(-)}; \quad B_3 = 0. \tag{33}$$

Аналогичным образом, используя (27) и (31), из условия эквипотенциальности поверхности струи (24) получим следующую систему равенств:

$$K_m(k) \cdot D_1^{(\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_1^{(\pm)} = 0; \quad K_{2m}(2k) \cdot D_2^{(\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_2^{(\pm)} = L \left(\zeta^{(\pm)} \right)^2;$$

$$K_0(2k) \cdot D_2 - 4\pi\chi \cdot A_2 = L \cdot 2\zeta^{(+)}\zeta^{(-)}; \quad D_3 - 4\pi\chi \cdot A_3 = L \cdot 2\zeta_+ \overline{\zeta_-};$$

$$\Phi_s^{(2)} = 4\pi\chi(1 + H_m(k)) \cdot \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right). \quad (34)$$

Отметим, что при получении значения добавки второго порядка малости к потенциалу поверхности $\Phi_s^{(2)}$ были использованы выражения (32).

Наконец, подставляя (27), (30) и (31) в динамическое граничное условие (23), а также учитывая (32), найдем

$$\begin{aligned} & (1 - k^2 - m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_1^{(\pm)} + i \cdot \omega_m(k) \cdot I_m(k) \cdot B_1^{(\pm)} - \\ & - \chi \cdot k \cdot K'_m(k) \cdot D_1^{(\pm)} = -i \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \cdot \frac{\partial \zeta^{(\pm)}}{\partial T_1}; \\ & (1 - 4k^2 - 4m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_2^{(\pm)} + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot I_{2m}(2k) \cdot B_2^{(\pm)} - \\ & - \chi \cdot 2k \cdot K'_{2m}(2k) \cdot D_2 = Y_1 \cdot \left(\zeta^{(\pm)} \right)^2; \\ & (1 - 4k^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_2 + i \cdot 2\omega_m(k) \cdot I_0(2k) \cdot B_2 - \\ & - \chi \cdot 2k \cdot K'_0(2k) \cdot D_2^{(\pm)} = Y_2 \cdot 2\zeta_+ \cdot \zeta_-; \\ & (1 - 4m^2 - 4\pi\chi^2) \cdot A_3 + 2m\chi \cdot D_3 = Y_3 \cdot 2\zeta^{(+)} \cdot \overline{\zeta^{(-)}}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial T_0} = - \left[Y_4 + \frac{1}{2} - 2\pi\chi^2(k^2 + m^2 + 1) \right] \cdot \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right). \quad (35)$$

Выяснение вида функции B_0 (см. последнее из равенств (35)) имеет чисто академическое значение, поскольку потенциал определяется с точностью до произвольной аддитивной функции, зависящей только от времени [17].

Совместное решение систем равенств (33) – (35) позволяет определить искомые коэффициенты. Рассмотрим первые равен-

ства из выписанных систем. Выражая из (33) коэффициенты $B_1^{(\pm)}$, а из (34) – $D_1^{(\pm)}$ и подставляя их в (35), получим

$$\left[1 - k^2 - m^2 - 4\pi\chi^2 \cdot (1 + H_m(k)) + \frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} \right] A_1^{(\pm)} = -i \cdot 2 \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \cdot \frac{\partial \zeta^{(\pm)}}{\partial T_1}.$$

Несложно заметить, что в силу дисперсионного соотношения (21) квадратная скобка при $A_1^{(\pm)}$ обращается в ноль. В результате получаем

$$\frac{\partial \zeta^{(\pm)}}{\partial T_1} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) означает, что комплексные амплитуды $\zeta^{(\pm)}$ не зависят от временного масштаба T_1 и при решении рассматриваемой задачи с точностью до второго порядка малости являются константами.

Коэффициенты $A_1^{(\pm)}$ остались неопределенными. Их значения можно выяснить только из начальных условий. Поскольку мы поставили перед собой цель построить решение, имеющее наиболее простой вид, подбирая нужным образом начальные условия, то мы вправе выбрать их так, чтобы получить $A_1^{(\pm)} = 0$. При этом согласно (33) и (34) будем иметь $B_1^{(\pm)} = 0$ и $D_1^{(\pm)} = 0$.

Определяя из системы (33) – (35) все оставшиеся коэффициенты, запишем решение второго порядка малости в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = & -\frac{1}{2} \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right) + 2a_3 \cdot \zeta^{(+)} \cdot \overline{\zeta^{(-)}} \cdot \exp(i2\varphi) + \\ & + \left[a_1 \cdot \left((\zeta^{(+)})^2 \cdot \exp(i2m\varphi) + (\zeta^{(-)})^2 \cdot \exp(-i2m\varphi) \right) + 2a_2 \cdot \zeta^{(+)} \cdot \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + (k.c.); \end{aligned}$$

$$\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = -b_0 \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right) \cdot T_0 -$$

$$\begin{aligned}
& -i \left[b_1 \left(\left(\zeta^{(+)} \right)^2 \exp(i2m\varphi) + \left(\zeta^{(-)} \right)^2 \exp(-i2m\varphi) \right) \times \right. \\
& \times I_{2m}(2kr) + 2b_2 \zeta^{(+)} \zeta^{(-)} I_0(2kr) \left. \right] \exp(i2\theta) + (k.c.) \\
& \Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = -2\pi\chi(k^2 + m^2) \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right) \cdot \ln r + \\
& + \left[d_1 \left(\left(\zeta^{(+)} \right)^2 \exp(i2m\varphi) + \left(\zeta^{(-)} \right)^2 \exp(-i2m\varphi) \right) K_{2m}(2kr) + 2d_2 \zeta^{(+)} \zeta^{(-)} K_0(2kr) \right] \exp(i2\theta) + \\
& + 2d_3 \cdot \zeta^{(+)} \cdot \overline{\zeta^{(-)}} \exp(i \cdot 2\varphi) + (k.c.), \tag{37}
\end{aligned}$$

где все вновь введенные обозначения приведены в «Приложении С».

В итоге решение поставленной задачи с точностью до второго порядка малости определяется выражениями (1), (9), (11), (17), (20)-(21), (36)-(37).

4. Форма струи как функция времени определится выражением

$$r(z, \varphi, t) = 1 + \varepsilon \cos(m\varphi) \cos(\theta) - \frac{\varepsilon^2}{4} \cdot$$

$$\left[\frac{1}{2} - (a_1 \cdot \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\theta) - a_3 \cos(2\varphi) \right].$$

Расчеты по этому уравнению при $\varepsilon=0.3$ и докритических в смысле реализации неустойчивости струи по отношению к поверхностному заряду значениях параметра $W \equiv 4\pi \cdot \chi^2$ в пакете аналитических вычислений «Matematica» иллюстрируются рис. 1 – 5, где для первых пяти мод ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) приведены трехмерные изображения поверхности нелинейно осциллирующих струй при: а) $t = 0$; б) $t = 0.5T$, где T – период волн (критическое для фиксированного m значение W находится из требования обращения в ноль квадрата частоты в дисперсионном уравнении (21)).

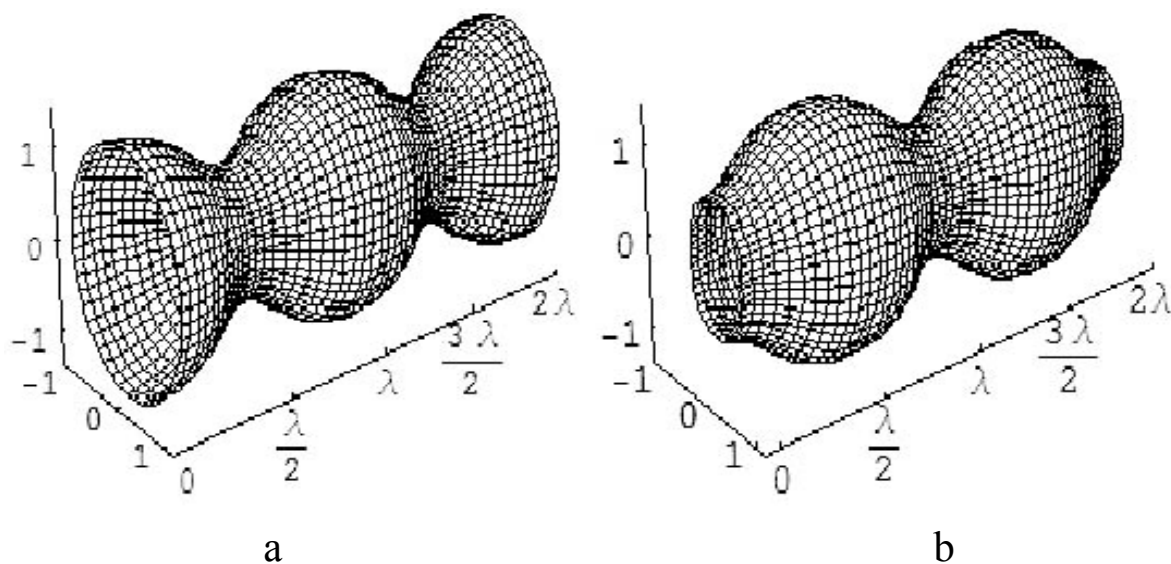


Рис. 1. Поверхность струи при $k = 2, m = 0, W = 0.5$

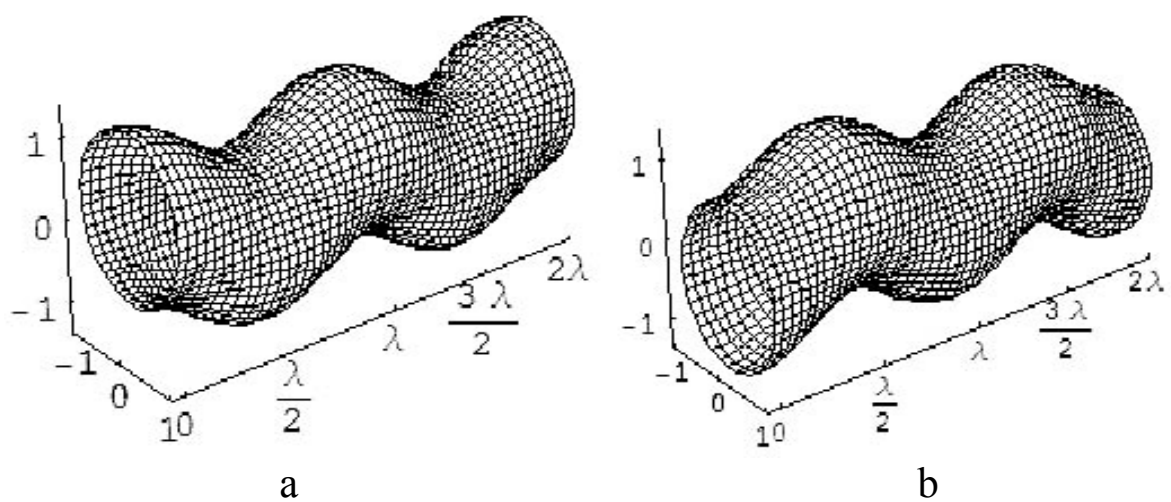


Рис. 2. Поверхность струи при $k = 2, m = 1, W = 1$

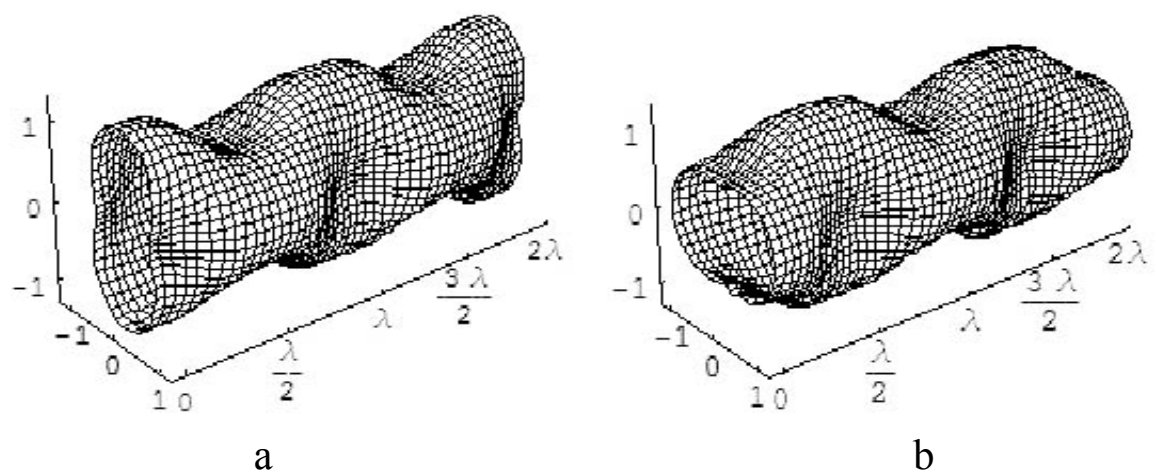


Рис. 3. Поверхность струи при $k = 2, m = 2, W = 1$

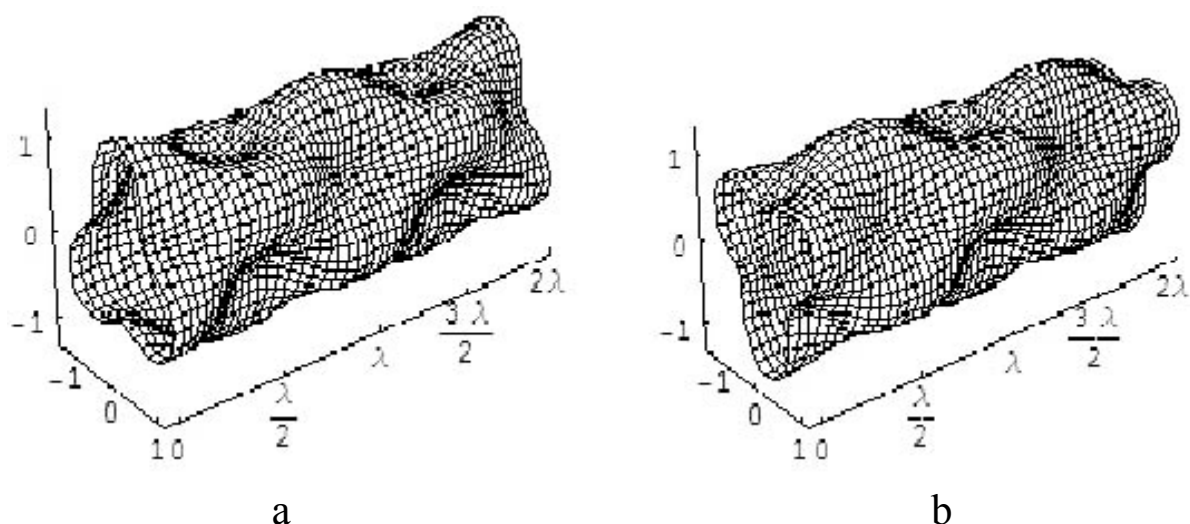


Рис. 4. Поверхность струи при $k = 2$, $m = 3$, $W = 1$

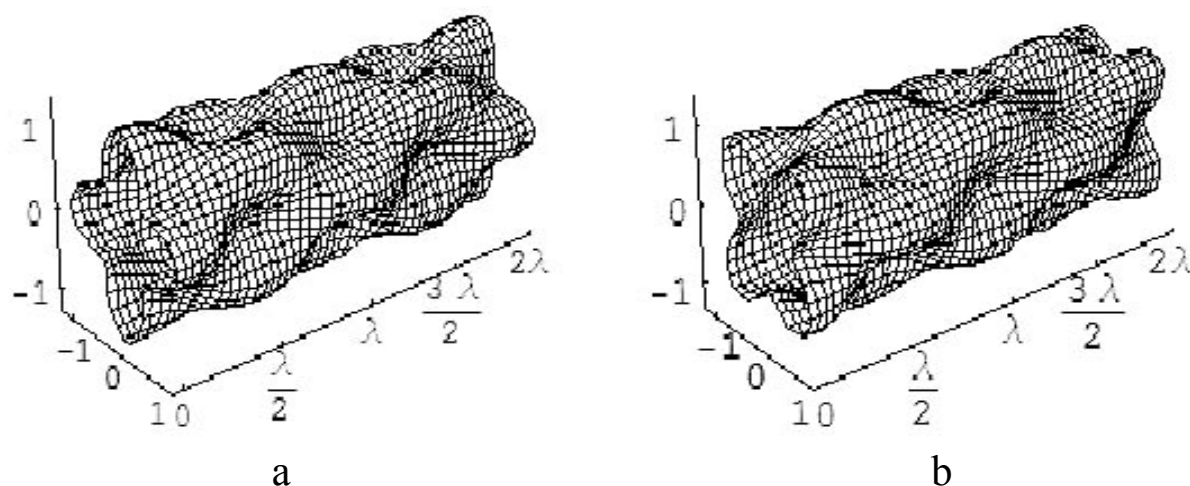


Рис. 5. Поверхность струи при $k = 2$, $m = 4$, $W = 1$

Из приведенных рисунков видно, что монодисперсный распад струй наиболее вероятен для осесимметричных ($m=0$) струй. Возбуждение же «хлыстообразного» движения струй вероятнее всего связано с неустойчивостью моды с $m=1$. При реализации неустойчивости неосесимметричных волн с $m \geq 2$ повышается вероятность полидисперсного распада струи, как это и наблюдается в естественных условиях при спонтанном распаде сильно заряженных (необходимое условие для обеспечения реализации неустойчивости неосесимметричных мод) струй. Влияние увеличения поверхностной плотности заряда на струе на ее форму иллюстрируется рис. 6 – 9, где при $t = 0.5 T$ приведены формы поверхности неосесимметричных струй с $m = 1, 2, 3, 4$, полученные при $\varepsilon=0.3$, когда плотность поверхностного заряда близка к кри-

тической для данной моды. Видно, что с увеличением поверхностной плотности электрического заряда амплитуды волн растут, а вероятность именно полидисперсного распада при $m \geq 2$ становится более очевидной. Использованное в расчетах для рис. 1 – 9 большое значение малого параметра $\varepsilon=0.3$ выбрано для наглядности.

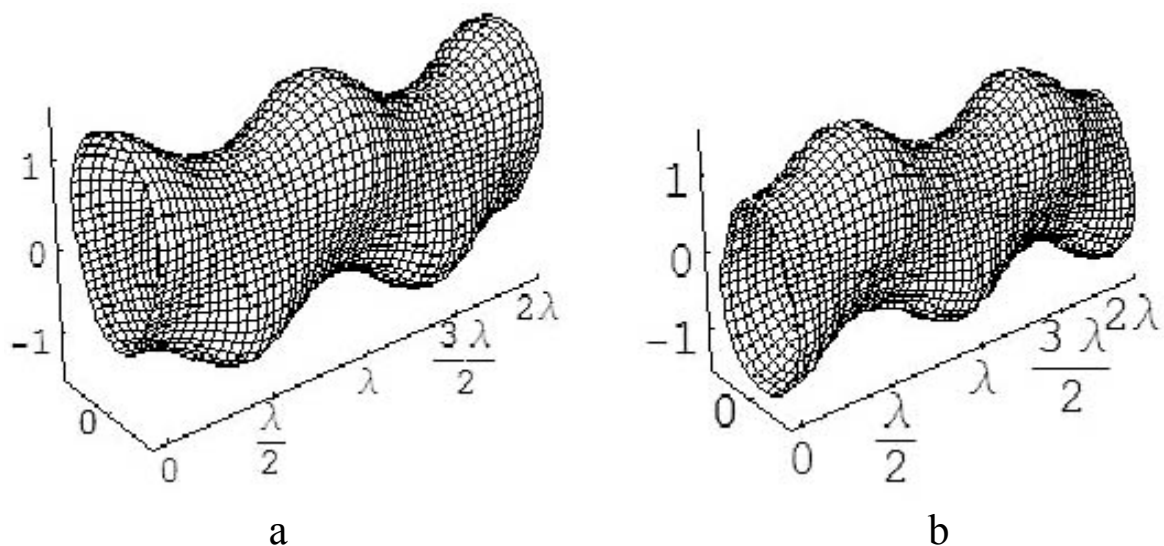


Рис. 6. Поверхность струи при $k = 2, m = 1, W = 2.456$

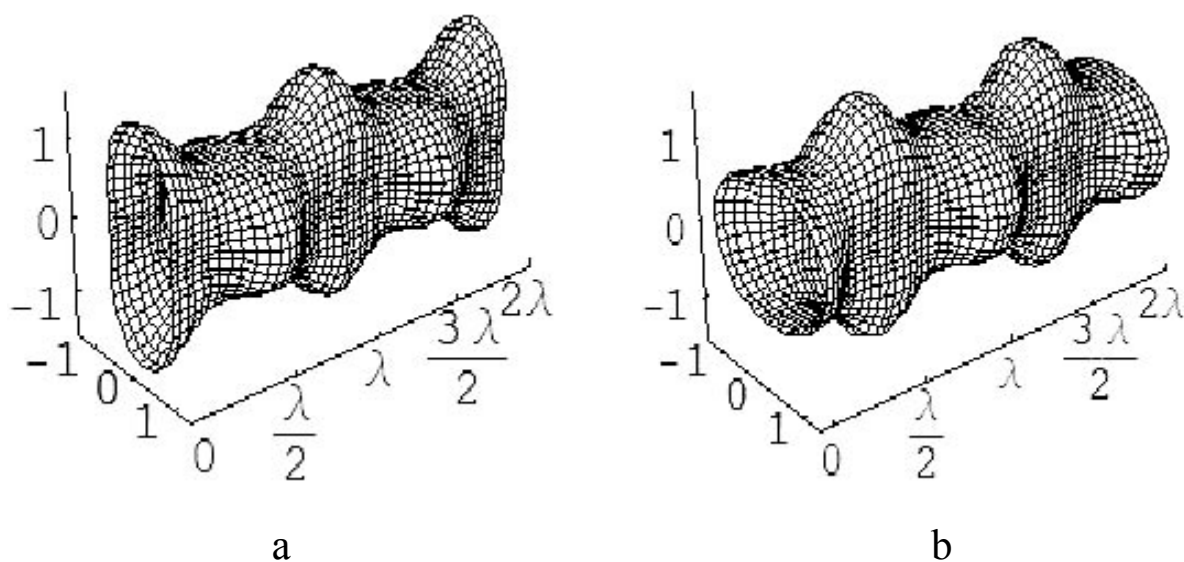


Рис. 7. Поверхность струи при $k = 2, m = 2, W = 3.33$

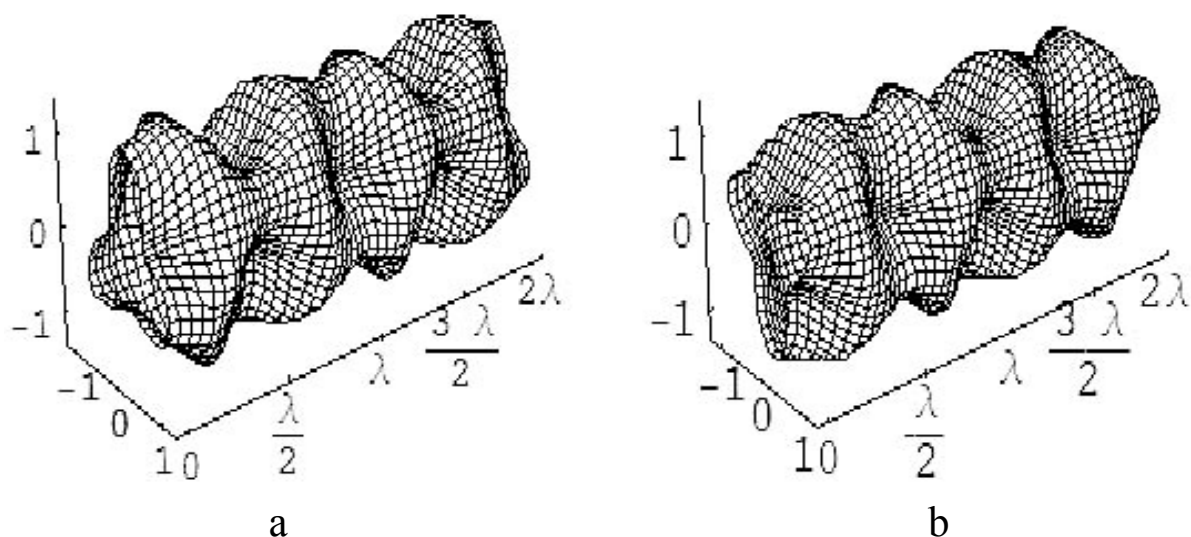


Рис. 8. Поверхность струи при $k = 2$, $m = 2$, $W = 3.88$

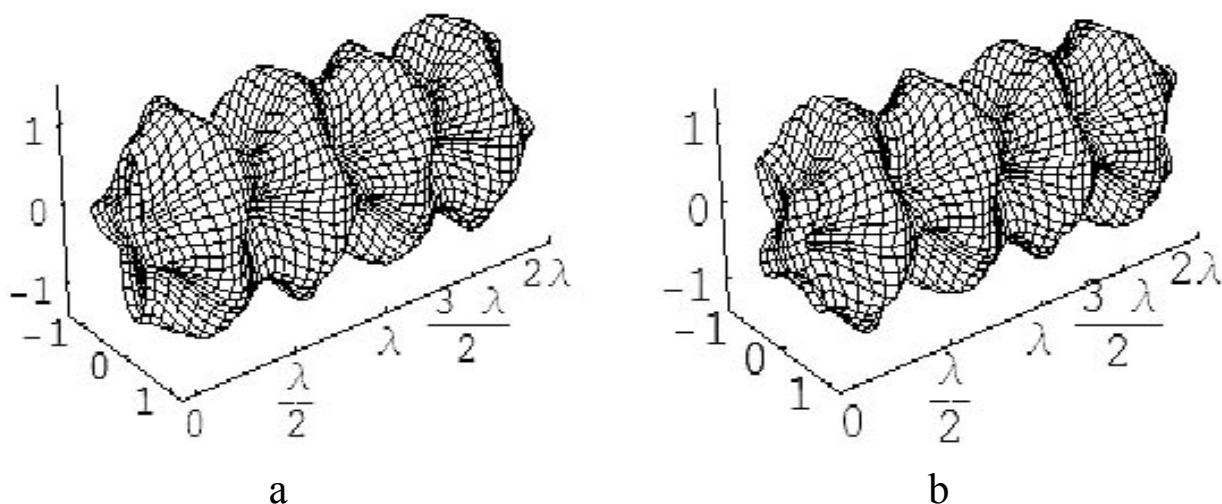


Рис. 9. Поверхность струи при $k = 2$, $m = 2$, $W = 5.25$

5. Из выписанного уравнения для формы струи несложно видеть, что кроме волны с волновым числом k , существующей в начальный момент времени, возбуждается также за счет нелинейного взаимодействия волна с удвоенным волновым числом $2k$. Между этими двумя волнами имеет место резонансное взаимодействие, определяющееся наличием у коэффициентов a_1 и a_2 знаменателей, которые при определенных условиях обращаются в нуль.

Изучение резонансного взаимодействия цилиндрических волн составляет предмет отдельного исследования, пока же интересно отметить, что при резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций капель и волн на плоской поверхности жидкости

возможен стопроцентный обмен энергий между ними. Кроме того, примечательно, что резонансно взаимодействуют волны с различными волновыми и азимутальными числами, т.е. с различной симметрией, как это видно из выражений для коэффициентов a_1 и a_2 . Влияние величины поверхностной плотности электрического заряда на струе χ на закономерности реализации резонансного взаимодействия сводится к изменению положения резонанса (к изменению волновых чисел и азимутальных параметров взаимодействующих волн при варьировании χ). Вдали от положений резонансов влияние электрического заряда, имеющегося на поверхности струи, сводится к появлению возможности развития неустойчивости неосесимметричных мод при достаточно больших плотностях заряда – при $4\pi\chi^2 \geq 1$. Напомним, что в отсутствие заряда (при $\chi=0$) все неосесимметричные моды устойчивы, это следует из дисперсионного уравнения (21). Влияние заряда (объемного либо поверхностного) на форму струи реализуется через зависимость от его плотности χ коэффициентов a_j , определяющих отклонение второго порядка малости формы струи от цилиндрической.

В проанализированном выше втором приближении по амплитуде волны поправок к частотам нет, они могут появиться лишь в следующем, третьем, приближении. Поэтому в настоящем рассмотрении критические условия реализации неустойчивости поверхности неосесимметричной струи в смысле разбиения ее на отдельные капли определяются из линейного приближения, как это описано в [146 – 148], условием перехода через нуль в область отрицательных значений квадрата частоты (21). Впрочем, следует отметить, что поправки к критическим условиям реализации неустойчивости, связанные с нелинейным взаимодействием волн, не могут быть значительными и привести к заметному изменению существующих представлений о развитии неустойчивости поверхности струи, поскольку имеют второй порядок малости.

Отметим, что при резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций и волн возможен стопроцентный обмен энергий между ними. Кроме того, примечательно, что резонансно взаимодействуют волны с различными волновыми и азимутальными

числами, т.е. с различной симметрией, как это видно из выражений для коэффициентов a_1 и a_2 .

На рис. 10 приведен график зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ при $m=0$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_1 , а также в коэффициенте a_2 при $m=0$) от величины волнового числа k и параметра W , пересеченной плоскостью $F=0$. На кривой $f_1(k, W) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$,

$$f_1(k, W) \equiv \frac{2k \cdot I_1(2k) \{1 - 4k^2 - W[1 - (2k \cdot K_1(2k))/K_0(2k)]\}}{I_0(2k)} - \\ - \frac{4k \cdot I_1(k) \{1 - k^2 - W[1 - (k \cdot K_1(k))/K_0(k)]\}}{I_0(k)},$$

по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между двумя осесимметричными модами ($m=0$) для волн с волновыми числами k и $2k$. Резонансный обмен энергией между двумя осесимметричными волнами разной длины (заданной в начальный момент времени с волновым числом k и волной с вдвое большим волновым числом $2k$, возбуждение которой происходит в результате нелинейного взаимодействия) на стадии дробления струи может привести к образованию «сателлитов» – капель с размерами, отличающимися от размеров капель, на которые разбивается струя при отсутствии возмущающих воздействий. Из рис. 10 можно видеть, что указанное взаимодействие имеет место только при $W \neq 0$.

Расчеты на основе соотношения $4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$ показывают, что резонансная перекачка энергии из заданной в начальный момент времени неосесимметричной моды с $m=1$ и волновым числом k в другую неосесимметричную моду с $m=2$ и с вдвое большим волновым числом может реализоваться только при достаточно больших значениях поверхностной плотности заряда на струе (при $W \geq 3$), как это видно из рис. 11.

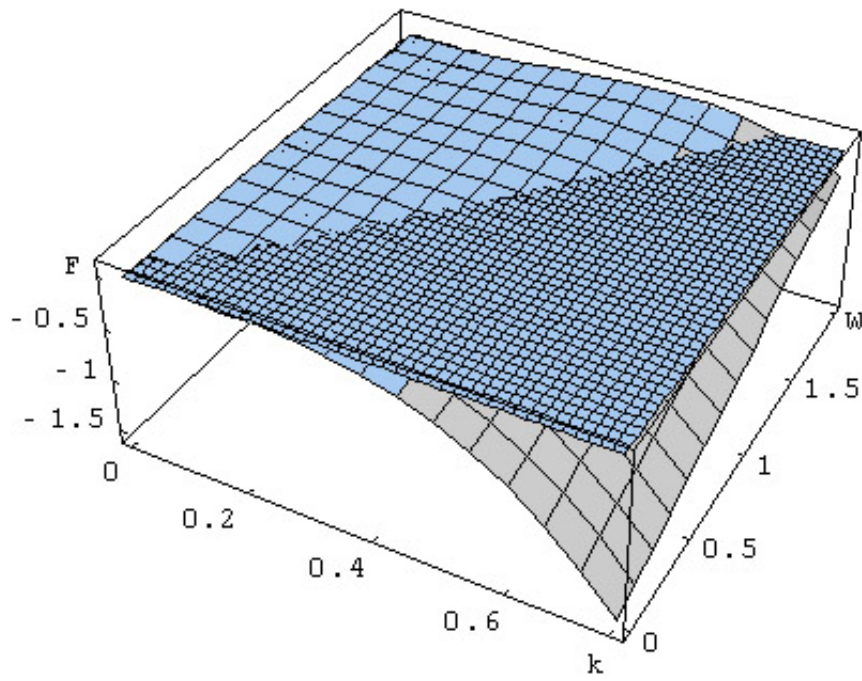


Рис. 10.

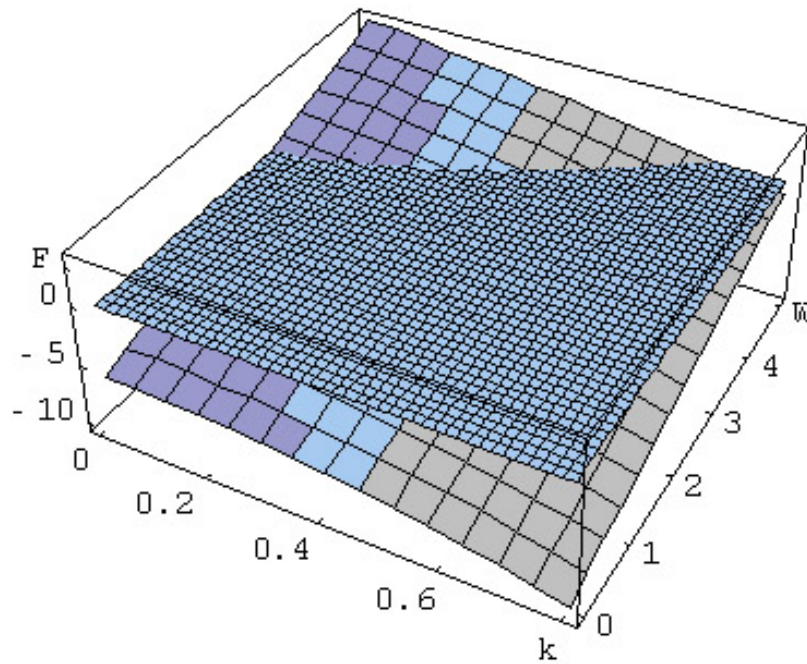


Рис. 11.

Из амплитудного коэффициента a_2 видно, что возможно резонансное взаимодействие между осесимметричной модой $m = 0$ и неосесимметричными модами с $m \neq 0$. На рис. 12 приведен

график зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$ при $m=1$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_2) от величины волнового числа k и параметра W , пересеченной плоскостью $F=0$. На кривой $f_0(k, W) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0$,

$$f_0(k, W) \equiv \frac{2k \cdot I_1(2k) \{1 - 4k^2 - W[1 - (2k \cdot K_1(2k))/K_0(2k)]\}}{I_0(2k)} + \\ + \frac{2k[I_0(k) + I_2(k)] \cdot \{k^2 + W[1 - (k[K_0(k) + K_2(k)]/2K_1(k))]\}}{I_1(k)},$$

по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между заданной в начальный момент времени неосесимметричной волной с $m=1$ и волновым числом k и осесимметричной волной $m=0$ с волновым числом $2k$. При таком взаимодействии энергия перекачивается из неосесимметричной моды с $m=1$ к осесимметричной моде с удвоенным волновым числом. Из рис. 12 видно, что такой резонансный обмен энергией может иметь место и при отсутствии на струе электрического заряда (при $W=0$).

Расчеты показывают, что резонансное взаимодействие с перекачкой энергии от неосесимметричной моды с $m=2$ осесимметричной возможно только при достаточно больших плотностях поверхностного заряда на струе: при $W \geq 3$.

Влияние величины поверхностной плотности электрического заряда на струе на закономерности реализации резонансного взаимодействия сводится к изменению положений резонансов (к изменению волновых чисел и азимутальных параметров взаимодействующих волн при варьировании χ). Вдали от положений резонансов влияние электрического заряда, имеющегося на поверхности струи, сводится к появлению возможности развития неустойчивости неосесимметричных мод при достаточно больших плотностях заряда: при $4\pi\chi^2 \geq 1$ [146, 148]. Напомним, что в отсутствие заряда (при $\chi=0$) все неосесимметричные моды устойчивы, что следует из дисперсионного уравнения. Влияние заряда (объемного либо поверхностного) на форму струи реализу-

ется через зависимость от его плотности χ коэффициентов a_j , определяющих отклонение второго порядка малости формы струи от цилиндрической.

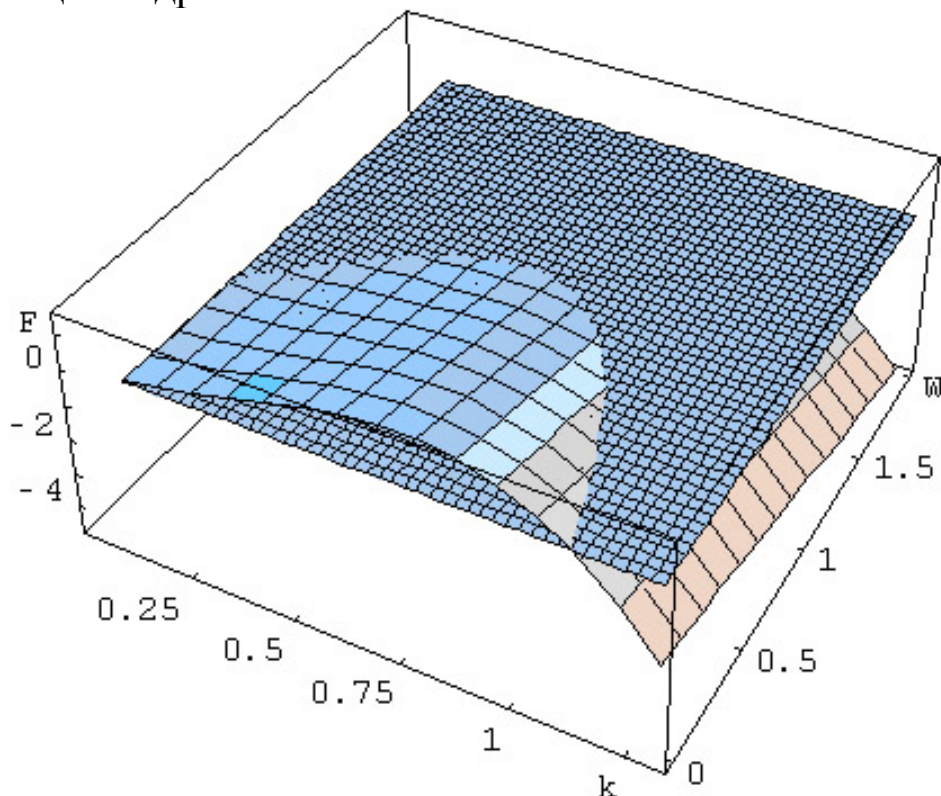


Рис. 12.

Следует также отметить, что в [259] для незаряженной струи нелинейное возбуждение осесимметричных мод с частотами, кратными возбужденной в начальный момент, исследовано экспериментально: во всяком случае в [259] показано, что нелинейное возбуждение мод, кратных изначально возбужденной, имеет место.

6. Решение задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной струи уже во втором порядке малости по амплитуде деформации невозмущенной цилиндрической струи позволяет обнаружить резонансное взаимодействие волны, определяющей начальную виртуальную деформацию, с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и поверхностной плотности электрического заряда на струе. В частности, осесимметричная мода может взаимодействовать с модой, ответственной за закручивание струи ($m=1$). При нелинейном резонансном взаи-

модействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из начально возбужденной моды с $m=1$ энергия может перекачиваться как в осесимметричную моду с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную с $m=2$ также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с $m \geq 2$ возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе.

Приложение А. Система граничных и дополнительных условий второго порядка малости.

$$r=1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z}; \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(2)} \right\} + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} = \\ & = \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right] \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] (\xi^{(1)})^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right\} + (\xi^{(1)})^2 + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + 2 \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)}(t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} (\xi^{(1)})^2; \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
& \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \cdot \xi^{(2)} \right] d\varphi \cdot dz = \\
& = - \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \cdot \xi^{(1)} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \cdot (\xi^{(1)})^2 - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \right] d\varphi \cdot dz; \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} d\varphi \cdot dz = -\frac{1}{2} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} (\xi^{(1)})^2 d\varphi \cdot dz. \quad (\text{A.5})$$

Приложение В. Выражения для коэффициентов в граничных и дополнительных условиях (22)-(26).

$$X_1 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2(k^2 + m^2) - G_m(k)]; \quad X_2 = \frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} [2k^2 - G_m(k)];$$

$$Y_1 = 1 + \frac{1}{2} (k^2 - 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 + m^2 - 3(G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_2 = 1 + \frac{1}{2} (k^2 - 3m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - 3(G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_3 = 1 - \frac{1}{2} (k^2 + 5m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 - m^2 - (G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2];$$

$$Y_4 = 1 - \frac{1}{2}(k^2 + 3m^2) + \frac{\omega_m^2(k)}{2(G_m(k))^2} [k^2 + m^2 - (G_m(k))^2] +$$

$$+ 2\pi\chi^2 [k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - (H_m(k))^2]; \quad L = -2\pi\chi [1 + 2H_m(k)].$$

Приложение С. Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости.

$$a_1 \equiv \frac{G_{2m}(2k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k)X_1}{4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)};$$

$$a_2 \equiv \frac{G_0(2k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + 2\omega_m(k)X_2}{4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)};$$

$$a_3 \equiv \frac{Y_3 - 2m\chi L}{(1 - 2m)(1 + 2m - 4\pi\chi^2)}; \quad b_0 \equiv Y_4 + \frac{1}{2} - 2\pi\chi^2(k^2 + m^2 + 1);$$

$$b_1 \equiv \frac{2\omega_m(k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + [4k^2 + 4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2(1 + H_{2m}(2k))]X_1}{I_{2m}(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)]};$$

$$b_2 \equiv \frac{2\omega_m(k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + [4k^2 - 1 + 4\pi\chi^2(1 + H_0(2k))]X_2}{I_0(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)]};$$

$$d_1 \equiv \frac{G_{2m}(2k) \cdot [4\pi\chi Y_1 - (4k^2 + 4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L] + 2\omega_m(k)[4\pi\chi X_1 + 2\omega_m(k)L]}{K_{2m}(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)]};$$

$$d_2 \equiv \frac{G_0(2k) \cdot [4\pi\chi Y_2 - (4k^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L] + 2\omega_m(k)[4\pi\chi X_2 + 2\omega_m(k)L]}{K_0(2k)[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)]};$$

$$d_3 \equiv \frac{4\pi\chi Y_3 - (4m^2 - 1 + 4\pi\chi^2)L}{(1 - 2m)(1 + 2m - 4\pi\chi^2)}.$$

5.2. Многомодовая начальная деформация

1. При исследовании закономерностей спонтанного распада струй жидкости, выбрасываемых при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, наиболее естественной является ситуация, когда поверхность струи подвержена деформации, обусловленной не одиночной волной, но суперпозицией набора волн, различающихся как волновыми, так и азимутальными числами. Поэтому, в отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем разделе, проанализируем теперь ситуацию, когда начальная деформация определяется суперпозицией нескольких волн на поверхности струи, что позволит выделить, кроме вырожденных, еще и вторичные комбинационные резонансы. Математическую формулировку задачи, во многом сходную с использованной в предыдущем разделе, и ход решения задачи воспроизведем полностью, чтобы облегчить восприятие материала.

2. Рассмотрим движущуюся с постоянной скоростью U_0 бесконечную струю постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности распределен заряд, поверхностная плотность которого в равновесном состоянии, т.е. в условиях отсутствия каких-либо возмущений цилиндрической формы струи, имеет величину χ .

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью U_0 , а ось OZ направлена вдоль оси симметрии струи по направлению ее движения: $n_z \parallel U_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Зададимся целью проследить эволюцию во времени движущегося по поверхности струи в положительном направлении оси OZ волнового пакета, представляющего собой суперпозицию из N осесимметричных и неосесимметричных волн с волновыми числами k_n , амплитуда которых мала по сравнению с радиусом струи.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, полагая $R = \rho = \sigma = 1$. В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1; \quad (1)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты, t – время, ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели потенциального течения математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи заданного в начальный момент времени будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи:

$$\Delta\Psi = 0, \quad \Delta\Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и на бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla\Psi| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla\Phi| \rightarrow 0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Psi \cdot \nabla F = 0; \quad F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)]; \quad (4)$$

$$r = 1 + \xi: \quad \Delta P - \frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi)^2 - \nabla \cdot \vec{n} = 0; \quad (5)$$

и условия экvipотенциальности поверхности струи:

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_s(t). \quad (6)$$

В выражении (5) ΔP – перепад давлений внутри и вне цилиндрической струи в равновесном состоянии; предпоследнее и последнее слагаемые – давления электрического поля и сил поверх-

ностного натяжения соответственно; \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности (1): $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$.

Краевую задачу (1) – (6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна некоторому характерному масштабу Λ , в который укладывается целое число длин всех волн, определяющих начальную деформацию:

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi \cdot \Lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \Lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dt = \pi \cdot \Lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \Lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2) – (8) необходимо задать еще начальные условия. Однако, в силу того что начальные условия произвольного вида могут привести к чрезмерной громоздкости получаемого решения, в нелинейных задачах о расчете волновых профилей и течений жидкости принято формулировать начальные условия по ходу решения так, чтобы решение принимало наиболее простой вид. Этот прием и будет использован в нижеследующих рассуждениях.

2. Будем искать решение задачи (2) – (8) в виде разложения по малому параметру ε , в качестве которого выберем отношение амплитуды волнового пакета к радиусу струи. Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до второго порядка малости включительно, представим искомые функции ξ , Ψ и Φ в виде рядов по степеням ε , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется двумя временными масштабами – основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon \cdot t$:

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Psi(\varphi, z, t) = \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(r, \varphi, z, t) = \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3). \quad (9)$$

Поскольку мы считаем, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ , то примем, что форма свободной поверхности жидкости

$$r = 1 + \varepsilon \sum_{n=1}^N h_n \cdot f_n(\varphi) \cdot \left(A_n(T_1) \cdot \exp(i\theta_n) + \overline{A_n(T_1)} \cdot \exp(-i\theta_n) \right) + O(\varepsilon^2),$$

где $\theta_n \equiv k_n z - \omega_n T_0$; ω_n – частота n -й волны; $f_n(\varphi)$ – действительная функция, описывающая форму поперечного сечения струи; $A_n(T_1)$ – пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленного времени T_1 ; h_n – парциальный вклад n -й волны в начальное возмущение равновесной формы струи $\sum_{n=1}^N h_n = 1$. Горизонтальная черта над символом означает комплексное сопряжение.

Очевидно, что $f_n(\varphi)$ – периодические функции с периодом 2π и, следовательно, могут быть разложены в ряд Фурье:

$$f_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(C_{mn} \cdot \exp(im_n \varphi) + \overline{C_{mn}} \cdot \exp(-im_n \varphi) \right);$$

$$C_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\varphi) \cdot \exp(im_n \varphi) \cdot d\varphi / 2\pi \left(1 + \delta_{m_n, 0} \right).$$

Для упрощения дальнейших выкладок ограничимся рассмотрением случая, когда для каждой n -й волны её зависимость от азимутального угла φ определяется какой-либо одной гармоникой с азимутальным числом m_n , т.е. примем, что

$$f_n(\varphi) = C_{mn} \cdot \exp(im_n \varphi) + \overline{C_{mn}} \cdot \exp(-im_n \varphi).$$

Вводя коэффициенты

$$\zeta_n^{(-)}(T_1) = \overline{C_{mn}} \cdot A(T_1); \quad \zeta_n^{(+)}(T_1) = C_{mn} \cdot A(T_1),$$

запишем выражение для свободной поверхности струи в виде

$$r=1+\varepsilon \sum_{n=1}^N h_n \left[\left(\zeta_n^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im_n \varphi) + \zeta_n^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im_n \varphi) \right) \cdot \exp(i\theta_n) \right] + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; $\theta_n \equiv k_n \cdot z - \omega_{mn}(k_n) \cdot T_0$, где $\omega_{mn}(k_n)$ – частота n -й волны с волновым числом k_n и азимутальным числом m_n .

Выражение (10) будем рассматривать как первое начальное условие, необходимое для замыкания краевой задачи (2) – (8), а второе будет задано ниже.

3. Подстановка разложений (9) в уравнения (2) – (8), использование оператора $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$ для вычисления производной по времени и разложение условий (4) – (8) в ряд Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r=1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε с приравниванием их нулю, позволяют получить задачи различных порядков малости.

3а. В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \cdot \ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю: $\Phi_s^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на поверхности струи $\Delta P = 1 - 2\pi\chi^2$.

3б. В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9), функции $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) в первом приближении являются решениями записанных для них уравнений, полностью аналогичных (2), (3).

Система граничных и дополнительных условий (4) – (8) в первом порядке малости принимает вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \right\} + \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} = 0; \quad (13)$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_s^{(1)}(t); \quad (14)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right] \Big|_{r=1} d\varphi \cdot dz = 0; \quad (15)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)} \cdot d\varphi \cdot dz = 0. \quad (16)$$

На основании (1), (9) и (10) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1)$ получим выражение

$$\xi^{(1)} = \sum_{n=1}^N h_n \left[\zeta_n^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im_n \varphi) + \zeta_n^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n). \quad (17)$$

Явный вид функций $\zeta_n^{+}(T_1)$ и $\zeta_n^{-}(T_1)$ может быть определен лишь при анализе задачи следующего порядка малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (17) удовлетворяет условию неизменности объема (16).

Принимая во внимание, что поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (12) и условием эквивалентности (14), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ методом разделения переменных, представив их в виде

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N \left[A_n(T_1) \cdot B_n(r) \cdot D_n(\varphi) \cdot \exp(i\theta_n) \right];$$

$$\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N \left[S_n(T_1) \cdot C_n(r) \cdot W_n(\varphi) \cdot \exp(i\theta_n) \right] + \Phi_S^{(1)}(t). \quad (18)$$

Подставляя (18), а также (17), (11) в (12), (14) и приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$A_n(T_1) \cdot D_n(\varphi) = -i\omega_{mn} \cdot h_n \left[\zeta_n^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im_n\varphi) + \zeta_n^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im_n\varphi) \right] / B'_n;$$

$$S_n(T_1) \cdot W_n(\varphi) = 4\pi\chi \cdot h_n \left[\zeta_n^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im_n\varphi) + \zeta_n^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im_n\varphi) \right] / C_n. \quad (19)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи.

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (2), которые после подстановки в них (18), (19) легко сводятся к имеющим одинаковый вид дифференциальным уравнениям относительно функций $B_n(r)$ и $C_n(r)$:

$$\frac{d^2 V_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dV_n(r)}{dr} - \left(k_n^2 + \frac{m_n^2}{r^2} \right) \cdot V_n(r) = 0,$$

где $V_n(r) \equiv B_n(r)$ или $V_n(r) \equiv C_n(r)$. Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя $I_{mn}(k_n r)$ и $K_{mn}(k_n r)$. Учитывая, что добавки к потенциалам $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ должны удовлетворять условиям ограниченности (3), можно записать $B_n(r) = I_{mn}(k_n r)$, $C_n(r) = K_{mn}(k_n r)$. В результате выражения для поправки к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и к электростатическому потенциалу $\Phi^{(1)}$ примут окончательный вид:

$$\Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N \left\{ -i\omega_n \frac{h_n \cdot I_{mn}(k_n r)}{k_n \cdot I'_{mn}(k_n)} \left[\zeta_n^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im_n\varphi) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta_n^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im_n \varphi) \exp(i\theta_n) \Big\}; \\
\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) = & 4\pi\chi \sum_{n=1}^N \left\{ h_n \frac{K_{mn}(k_n r)}{K_{mn}(k_n)} \left[\zeta_n^{(+)}(T_1) \exp(im_n \varphi) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \zeta_n^{(-)}(T_1) \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) \right\}. \quad (20)
\end{aligned}$$

При записи выражения для $\Phi^{(1)}$ учтено, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности равна нулю: $\Phi_s^{(1)}(t) = 0$.

Из системы граничных и дополнительных условий (12) – (16) осталось неиспользованным динамическое граничное условие (13). Подставляя в него решения (17), (20) и (11), получаем дисперсионное уравнение, связывающее волновое число k_n и азимутальное число m_n с частотой колебаний ω_{mn} :

$$\omega_{mn}^2(k_n) = G_{mn}(k_n) \left[k_n^2 + m_n^2 - 1 + 4\pi\chi^2 (1 + H_{mn}(k_n)) \right]; \quad (21)$$

$$G_{mn}(k_n) = k_n \cdot I'_{mn}(k_n) / I_{mn}(k_n); \quad H_{mn}(k_n) = k_n \cdot K'_{mn}(k_n) / K_{mn}(k_n).$$

3с. Во втором порядке малости из системы (4) – (8) получим неоднородные уравнения для поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ (см. [8]). Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого (11) и первого (17), (20) порядков малости, после подстановки которых граничные и дополнительные условия, получающиеся во втором порядке малости примут вид

$$\begin{aligned}
r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = & \sum_{n=1}^N h_n \left[\frac{\partial \zeta_n^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im_n \varphi) + \frac{\partial \zeta_n^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) + \\
& + i \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n h_l \left\{ \left[X_1^{nl} Q_{nl} + X_2^{nl} R_{nl} \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \left[X_3^{nl} S_{nl} + X_4^{nl} T_{nl} \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\}; \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi \cdot \xi^{(2)} \right] + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} = \\
& = -i \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\omega_{mn} h_n}{G_{mn}(k_n)} \left[\frac{\partial \zeta_n^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im_n \varphi) + \frac{\partial \zeta_n^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n h_l \left\{ \left[Y_1^{nl} Q_{nl} + Y_2^{nl} R_{nl} \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \left[Y_3^{nl} S_{nl} + Y_4^{nl} T_{nl} \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\}; \\
& \quad \quad \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)} - 4\pi\chi\xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)}(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n h_l \cdot L_n \left\{ (Q_{nl} + R_{nl}) \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + (S_{nl} + T_{nl}) \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\}. \quad (24)$$

$$r \leq 1: \quad \int_{z_0}^{z_0+\Lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} d\varphi \cdot dz = -4\pi^2 \chi \cdot \Lambda \sum_{n=1}^N h_n^2 \cdot (k_n^2 + m_n^2) \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right); \quad (25)$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\Lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} \cdot d\varphi \cdot dz = -\pi \cdot \Lambda \sum_{n=1}^N h_n^2 \cdot \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right), \quad (26)$$

где Q_{nl} , R_{nl} , S_{nl} и T_{nl} выражаются через $\zeta_n^{(\pm)}$, $\zeta_l^{(\pm)}$ следующим образом:

$$Q_{nl} \equiv \zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi];$$

$$R_{nl} \equiv \zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(-)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(+)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi];$$

$$S_{nl} \equiv \zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi];$$

$$T_{nl} \equiv \zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi].$$

Все недостающие обозначения приведены в «Приложении А».

Зададимся целью найти частное решение задачи второго порядка малости, удовлетворяющее записанным для функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ уравнениям (2), (3) и системе уравнений (22) – (26). Вид функций неоднородности в (22) – (24) подсказывает характер зависимости искомого решения от координаты φ и аргумента θ_n . На этом основании примем

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = & \sum_{n=1}^N \left\{ A_n^0 + \left[A_n^{(+)} \cdot \exp(im_n \varphi) + A_n^{(-)} \cdot \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left[A_{nl}^{(1+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + A_{nl}^{(1-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \right. \\ & + \left[A_{nl}^{(2+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + A_{nl}^{(2-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\ & + \left[A_{nl}^{(3+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + A_{nl}^{(3-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\ & \left. + \left[A_{nl}^{(4+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + A_{nl}^{(4-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\}; \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & \sum_{n=1}^N \left\{ B_n^0 F_n^0(r) + \left[B_n^{(+)} F_n^{(+)}(r) \exp(im_n \varphi) + B_n^{(-)} F_n^{(-)}(r) \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) \right\} + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left[B_{nl}^{(1+)} F_{nl}^{(1+)}(r) \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + B_{nl}^{(1-)} F_{nl}^{(1-)}(r) \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \right. \\ & + \left[B_{nl}^{(2+)} F_{nl}^{(2+)}(r) \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + B_{nl}^{(2-)} F_{nl}^{(2-)}(r) \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\ & + \left[B_{nl}^{(3+)} F_{nl}^{(3+)}(r) \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + B_{nl}^{(3-)} F_{nl}^{(3-)}(r) \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\ & \left. + \left[B_{nl}^{(4+)} F_{nl}^{(4+)}(r) \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + B_{nl}^{(4-)} F_{nl}^{(4-)}(r) \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\}; \quad (28) \end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = \sum_{n=1}^N \left\{ D_n^0 C_n^0(r) + \left[D_n^{(+)} C_n^{(+)}(r) \exp(im_n \varphi) + D_n^{(-)} C_n^{(-)}(r) \exp(-im_n \varphi) \right] \exp(i\theta_n) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left[D_{nl}^{(1+)} C_{nl}^{(1+)}(r) \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + D_{nl}^{(1-)} C_{nl}^{(1-)}(r) \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \right. \\
& + \left[D_{nl}^{(2+)} C_{nl}^{(2+)}(r) \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + D_{nl}^{(2-)} C_{nl}^{(2-)}(r) \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\
& + \left[D_{nl}^{(3+)} C_{nl}^{(3+)}(r) \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + D_{nl}^{(3-)} C_{nl}^{(3-)}(r) \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& \left. + \left[D_{nl}^{(4+)} C_{nl}^{(4+)}(r) \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + D_{nl}^{(4-)} C_{nl}^{(4-)}(r) \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\} + f(t).
\end{aligned} \tag{29}$$

Зависимости функций $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от координаты r определим из уравнений Лапласа, подставляя (28), (29) в (2) и требуя обращения в ноль сумм коэффициентов при экспонентах с различными показателями. В итоге получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $F_{nl}^{j(\pm)}(r)$ и $C_{nl}^{j(\pm)}(r)$, $j=0,1,2,3$. Их решения с учетом условий ограниченности (3) позволяют привести выражения (28), (29) для потенциалов $\Psi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$ к виду

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & \sum_{n=1}^N \left\{ B_n^0 + \left[B_n^{(+)} \exp(im_n \varphi) + B_n^{(-)} \exp(-im_n \varphi) \right] I_{m_n}(k_n r) \exp(i\theta_n) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left[B_{nl}^{(1+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + B_{nl}^{(1-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \times \right. \\
& \times I_{(m_n + m_l)}[(k_n + k_l)r] \cdot \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \left(\Omega \cdot I_{(m_n + m_l)}[|k_n - k_l|r] + \Xi \cdot r^{2m_n} \right) \times \\
& \times \left[B_{nl}^{(2+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + B_{nl}^{(2-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\
& + \left[B_{nl}^{(3+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + B_{nl}^{(3-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] I_{(m_n - m_l)}[(k_n + k_l)r] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& + \left[B_{nl}^{(4+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + B_{nl}^{(4-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \times \\
& \times I_{(m_n - m_l)}[|k_n - k_l|r] \cdot \Omega \cdot \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \left. \right\};
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & \sum_{n=1}^N \left\{ D_n^{(0)} \cdot \ln(r) + \left[D_n^{(+)} \exp(im_n \varphi) + D_n^{(-)} \exp(-im_n \varphi) \right] K_{m_n}(k_n r) \exp(i\theta_n) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N \left\{ \left[D_{nl}^{(1+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + D_{nl}^{(1-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] K_{(m_n+m_l)}[(k_n + k_l)r] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \right. \\
& \quad \left. + \left(\Omega \cdot K_{(m_n+m_l)}[|k_n - k_l| r] + \Xi \cdot r^{-2m_n} \right) \times \right. \\
& \quad \times \left[D_{nl}^{(2+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + D_{nl}^{(2-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\
& \quad + \left[D_{nl}^{(3+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + D_{nl}^{(3-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] K_{(m_n-m_l)}[(k_n + k_l)r] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& \quad \left. + \left[D_{nl}^{(4+)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + D_{nl}^{(4-)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \Omega \cdot K_{(m_n-m_l)}[|k_n - k_l| r] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \right\} + \\
& \quad + f(t), \tag{31}
\end{aligned}$$

где ступенчатые функции Ω и Ξ от аргумента $(n-l)$ определены следующим образом:

$$\Omega \equiv \Omega(n-l) = 1 \text{ при } n = l, \text{ и } \Omega(n-l) = 0 \text{ при } n \neq l;$$

$$\Xi \equiv \Xi(n-l) = 1 \text{ при } n = l, \text{ и } \Xi(n-l) = 0 \text{ при } n \neq l.$$

Коэффициенты $A_{nl}^{j(\pm)}$, $B_{nl}^{j(\pm)}$ и $D_{nl}^{j(\pm)}$ определяются из системы уравнений (22) – (26). Заметим, что B_n^0 является функцией времени, которая может быть выбрана в удобной для записи решения форме, в силу определения потенциала.

Из условий сохранения объема (26) и заряда (25) несложно найти

$$\begin{aligned}
A_n^0 + A_{nn}^{(4+)} + A_{nn}^{(4-)} = & -\frac{h_n^2}{2} \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right); \\
D_n^0 = & -2\pi\chi \cdot h_n^2 (k_n^2 + m_n^2) \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right). \tag{32}
\end{aligned}$$

Подставляя (27) и (30) в кинематическое граничное условие (22) и приравнивая друг к другу коэффициенты при одинаковых экспонентах из левой и правой частей равенства, получим

$$\begin{aligned}
& k_n \cdot I'_{m_n} (k_n) \cdot B_n^{(\pm)} + i \cdot \omega_{mn} \cdot A_n^{(\pm)} = h_n \frac{\partial \zeta_n^{(\pm)}}{\partial T_1} ; \\
& (k_n + k_l) \cdot I'_{(m_n+m_l)} (k_n + k_l) \cdot B_{nl}^{(1\pm)} + i \cdot (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot A_{nl}^{(1\pm)} = \\
& = i \cdot h_n \cdot h_l \cdot X_1^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\pm)} ; \\
& (\Omega \cdot |k_n - k_l| \cdot I'_{(m_n+m_l)} (|k_n - k_l|) + \Xi \cdot 2m_n) \cdot B_{nl}^{(2\pm)} + i \cdot (\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot A_{nl}^{(2\pm)} = \\
& = i \cdot h_n \cdot h_l \cdot X_4^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\mp)}} ; \\
& (k_n + k_l) \cdot I'_{(m_n-m_l)} (k_n + k_l) \cdot B_{nl}^{(3\pm)} + i \cdot (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot A_{nl}^{(3\pm)} = \\
& = i \cdot h_n \cdot h_l \cdot X_2^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\mp)} ; \\
& \Omega \cdot |k_n - k_l| \cdot I'_{(m_n-m_l)} (|k_n - k_l|) \cdot B_{nl}^{(4\pm)} + i \cdot (\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot A_{nl}^{(4\pm)} = \\
& = i \cdot h_n \cdot h_l \cdot X_3^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\pm)}} . \tag{33}
\end{aligned}$$

Аналогично, используя (27) и (31), из условия эквипотенциальности поверхности струи (24) получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
& K_{m_n} (k_n) \cdot D_n^{(\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_n^{(\pm)} = 0 ; \\
& K_{(m_n+m_l)} (k_n + k_l) \cdot D_{nl}^{(1\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_{nl}^{(1\pm)} = h_n \cdot h_l \cdot L_n \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\pm)} ;
\end{aligned}$$

$$[\Omega \cdot K_{(m_n+m_l)}(|k_n - k_l|) + \Xi] \cdot D_{nl}^{(2\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_{nl}^{(2\pm)} =$$

$$= h_n \cdot h_l \cdot L_n \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\mp)}};$$

$$K_{(m_n-m_l)}(k_n + k_l) \cdot D_{nl}^{(3\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_{nl}^{(3\pm)} = h_n \cdot h_l \cdot L_n \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\mp)};$$

$$\Omega \cdot [K_{(m_n-m_l)}(|k_n - k_l|) \cdot D_{nl}^{(4\pm)} - 4\pi\chi \cdot A_{nl}^{(4\pm)}] =$$

$$= \Omega \cdot h_n \cdot h_l \cdot L_n \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\pm)}};$$

$$f(t) - 4\pi\chi \sum_{n=1}^N (A_n^0 + A_{nn}^{(4+)} + A_{nn}^{(4-)}) =$$

$$= \Phi_S^{(2)}(t) + \sum_{n=1}^N h_n^2 L_n (|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2). \quad (34)$$

Отметим, что при получении добавки второго порядка малости к потенциалу поверхности $\Phi_S^{(2)}$ были использованы выражения (32).

Наконец, подставляя (27), (30) и (31) в динамическое граничное условие (23), а также учитывая (32), найдем

$$(1 - k_n^2 - m_n^2 - w) \cdot A_n^{(\pm)} + i \cdot \omega_{mn} \cdot I_{m_n}(k_n) \cdot B_n^{(\pm)} -$$

$$- \chi \cdot k_n \cdot K'_{m_n}(k_n) \cdot D_n^{(\pm)} = -i \frac{h_n \cdot \omega_{mn}}{G_{m_n}(k_n)} \cdot \frac{\partial \zeta_n^{(\pm)}}{\partial T_1}; \quad w \equiv 4\pi\chi^2;$$

$$[1 - (k_n + k_l)^2 - (m_n + m_l)^2 - w] \cdot A_{nl}^{(1\pm)} + i(\omega_{mn} + \omega_{ml}) \times$$

$$\times I_{(m_n+m_l)}(k_n + k_l) \cdot B_{nl}^{(1\pm)} - \chi \cdot (k_n + k_l) \cdot K'_{(m_n+m_l)}(k_n + k_l) \cdot D_{nl}^{(1\pm)}$$

$$\begin{aligned}
&= h_n \cdot h_l \cdot Y_1^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\pm)}; \\
&[1 - (k_n - k_l)^2 - (m_n + m_l)^2 - w] \cdot A_{nl}^{(2\pm)} + \\
&+ i(\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot [\Omega \cdot I_{(m_n+m_l)}(|k_n - k_l|) + \Xi] \cdot B_{nl}^{(2\pm)} - \\
&- \chi \cdot [\Omega \cdot |k_n - k_l| \cdot K'_{(m_n+m_l)}(|k_n - k_l|) - \Xi \cdot 2m_n] \cdot D_{nl}^{(2\pm)} = \\
&= h_n \cdot h_l \cdot Y_4^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\mp)}}; \\
&[1 - (k_n + k_l)^2 - (m_n - m_l)^2 - w] \cdot A_{nl}^{(3\pm)} + i(\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot I_{(m_n-m_l)}(k_n + k_l) \cdot B_{nl}^{(3\pm)} - \\
&- \chi \cdot (k_n + k_l) \cdot K'_{(m_n-m_l)}(k_n + k_l) \cdot D_{nl}^{(3\pm)} = h_n \cdot h_l \cdot Y_2^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \zeta_l^{(\mp)}; \\
&\left\{ [1 - (k_n - k_l)^2 - (m_n - m_l)^2 - w] \cdot A_{nl}^{(4\pm)} + i(\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot I_{(m_n-m_l)}(|k_n - k_l|) \cdot B_{nl}^{(4\pm)} - \right. \\
&- \chi \cdot |k_n - k_l| \cdot K'_{(m_n-m_l)}(|k_n - k_l|) \cdot D_{nl}^{(4\pm)} \left. \right\} \cdot \Omega = h_n \cdot h_l \cdot Y_3^{nl} \cdot \zeta_n^{(\pm)} \cdot \overline{\zeta_l^{(\pm)}} \cdot \Omega; \\
&-\frac{\partial B_n^0}{\partial T_0} - \chi \cdot D_n^0 + (1-w) \left(A_n^0 + A_{nn}^{(4+)} + A_{nn}^{(4-)} \right) = h_n \cdot h_l \cdot Y_3^{nn} \cdot \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right).
\end{aligned} \tag{35}$$

Выяснение вида функции B_0 (см. последнее из равенств (35)) имеет чисто академическое значение, поскольку потенциал определяется с точностью до произвольной аддитивной функции, зависящей только от времени.

Совместное решение систем (33) – (35) позволяет определить искомые коэффициенты. Рассмотрим первые равенства из выписанных систем. Выражая из (33) коэффициенты $B_n^{(\pm)}$, а из (34) – $D_n^{(\pm)}$ и подставляя их в (35), получим

$$\left[1 - k_n^2 - m_n^2 - w(1 + H_{mn}(k_n)) + \frac{\omega_{mn}^2}{G_{mn}(k_n)} \right] \cdot A_n^{(\pm)} = -i \cdot 2 \frac{\omega_{mn}}{G_{mn}(k_n)} \cdot \frac{\partial \zeta_n^{(\pm)}}{\partial T_1}.$$

Несложно заметить, что в силу дисперсионного соотношения (21) квадратная скобка обращается в нуль. В результате получаем

$$(\partial \zeta_n^{(\pm)} / \partial T_1) = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) означает, что комплексные амплитуды $\zeta_n^{(\pm)}$ не зависят от временного масштаба T_1 и при решении рассматриваемой задачи с точностью до второго порядка малости являются константами.

Коэффициенты $A_n^{(\pm)}$ остались неопределенными. Их значения можно выяснить только из начальных условий. Поскольку мы поставили перед собой цель построить решение, имеющее наиболее простой вид, подбирая нужным образом начальные условия, то мы вправе выбрать второе начальное условие в виде требования $A_n^{(\pm)} = 0$. При этом согласно (33) и (34) будем иметь $B_n^{(\pm)} = 0$ и $D_n^{(\pm)} = 0$. Определяя из системы (33) – (35) все оставшиеся коэффициенты, запишем решение второго порядка малости в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) = & -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N h_n^2 (|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2) + \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n \cdot h_l \{ \alpha_{nl}^{(1)} \cdot [\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi]] \times \\ & \times \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + (\Omega \cdot \alpha_{nl}^{(2)} + \Xi \cdot a_n^{(2)}) \times \\ & \times [\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi]] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\ & + \alpha_{nl}^{(3)} \cdot [\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(-)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(+)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi]] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\ & + \Omega \cdot \alpha_{nl}^{(4)} \cdot [\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi]] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & - \sum_{n=1}^N h_n^2 \cdot b_n^0 \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right) \cdot T_0 - \\
& - i \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n \cdot h_l \cdot \left\{ \beta_{nl}^{(1)} \cdot I_{(m_n+m_l)}[(k_n + k_l)r] \times \right. \\
& \times \left[\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& + \left[\Omega \cdot I_{(m_n+m_l)}(|k_n - k_l| r) \cdot \beta_{nl}^{(2)} + \Xi \cdot r^{2m_n} \cdot b_n^{(2)} \right] \times \\
& \times \left[\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\
& + \beta_{nl}^{(3)} \cdot I_{(m_n-m_l)}[(k_n + k_l)r] \times \\
& \times \left[\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(-)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(+)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& + \Omega \cdot \beta_{nl}^{(4)} \cdot I_{(m_n-m_l)}(|k_n - k_l| r) \times \\
& \times \left[\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \cdot \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \Big\}; \\
\Phi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) = & \sum_{n=1}^N h_n^2 \cdot \left[-2\pi\chi(k_n^2 + m_n^2) \cdot \ln r \right] \left(|\zeta_n^{(+)}|^2 + |\zeta_n^{(-)}|^2 \right) + \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^N h_n \cdot h_l \cdot \left\{ d_{nl}^{(1)} \cdot \left[\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(+)} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(-)} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \times \right. \\
& \times K_{(m_n+m_l)}[(k_n + k_l)r] \cdot \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& + \left[\Omega \cdot K_{(m_n+m_l)}(|k_n - k_l| r) \cdot d_{nl}^{(2)} + \Xi \cdot r^{-2m_n} \cdot d_n^{(2)} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[i(m_n + m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[-i(m_n + m_l)\varphi] \right] \cdot \exp[i(\theta_n - \theta_l)] + \\
& + d_{nl}^{(3)} \cdot \left[\zeta_n^{(+)} \zeta_l^{(-)} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \zeta_l^{(+)} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \times \\
& \times K_{(m_n - m_l)}[(k_n + k_l)r] \cdot \exp[i(\theta_n + \theta_l)] + \\
& + d_{nl}^{(4)} \cdot \left[\zeta_n^{(+)} \overline{\zeta_l^{(+)}} \exp[i(m_n - m_l)\varphi] + \zeta_n^{(-)} \overline{\zeta_l^{(-)}} \exp[-i(m_n - m_l)\varphi] \right] \times \\
& \times \Omega \cdot K_{(m_n - m_l)}(|k_n - k_l| r) \cdot \exp[i(\theta_n - \theta_l)] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\Phi_S^{(2)}(t) = 4\pi\chi \sum_{n=1}^N h_n^2 \cdot (1 + H_{mn}(k_n)), \quad (37)$$

где вновь введенные обозначения приведены в «Приложении В».

Решение поставленной задачи с точностью до второго порядка малости определяется выражениями (1), (9), (11), (17), (20), (21), (36), (37).

4. Форма струи для случая, когда ее начальная деформация определена суперпозицией двух волн с волновыми числами $k_1 = k$ и $k_l \equiv l \cdot k$ с азимутальными числами m_1 и m_l определяется выражением

$$\begin{aligned}
r(z, \varphi, t) = & 1 + \varepsilon \cdot [h_1 \cos(m_1 \varphi) \cos(\theta_1) + h_l \cos(m_l \varphi) \cos(\theta_l)] + \quad (38) \\
& + 0.25 \varepsilon^2 \cdot \left\{ [-0.5(h_1^2 + h_l^2) + h_1^2 a_1^{(2)} \cos(2m_1 \varphi) + h_l^2 a_l^{(2)} \cos(2m_l \varphi)] + \right. \\
& + h_1^2 [\alpha_{11}^{(1)} \cos(2m_1 \varphi) + \alpha_{11}^{(3)}] \cos(2\theta) + h_l^2 [\alpha_{ll}^{(1)} \cos(2m_l \varphi) + \alpha_{ll}^{(3)}] \cos(2\theta_l) + \\
& + h_1 \cdot h_l [(\alpha_{1l}^{(1)} + \alpha_{1l}^{(1)}) \cos[(m_1 + m_l)\varphi] + (\alpha_{1l}^{(3)} + \alpha_{1l}^{(3)}) \cos[(m_1 - m_l)\varphi]] \cos(\theta + \theta_l) + \\
& \left. + h_1 \cdot h_l [(\alpha_{1l}^{(2)} + \overline{\alpha_{1l}^{(2)}}) \cos[(m_1 + m_l)\varphi] + (\alpha_{1l}^{(4)} + \overline{\alpha_{1l}^{(4)}}) \cos[(m_1 - m_l)\varphi]] \cos(\theta - \theta_l) \right\};
\end{aligned}$$

где θ_l определено на стр. 4, а $\theta_l \equiv l \cdot k \cdot z - \omega_{ml} T_0$.

Из (38) видно, что за счет нелинейного взаимодействия волн во втором порядке малости возбуждаются волны как с удвоенными волновыми и азимутальными числами, так и волны с волновыми и азимутальными числами, получающимися в результате сложения и вычитания волновых и азимутальных чисел волн, определяющих начальную деформацию равновесной цилиндрической формы струи.

Выражения, аналогичные (38), легко выписать по выше полученным выражениям и для поля скоростей волнового течения жидкости в струе, и поля электростатического потенциала в ее окрестности. Из нелинейных поправок $\Phi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ и $\xi^{(2)}$ несложно видеть, что они имеют резонансный вид, определяющийся коэффициентами, которые при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами. Условия реализации резонансного взаимодействия имеют вид

$$(\omega_{mn}(k_n) \pm \omega_{ml}(k_l))^2 = \omega_{(mn \pm ml)}^2(k_n \pm k_l), \quad (39)$$

где $\omega_{mn}(k_n)$ и $\omega_{ml}(k_l)$ определяются (21), а $\omega_{(mn \pm ml)}(k_n \pm k_l)$ соотношением

$$\begin{aligned} \omega_{(mn \pm ml)}^2(k_n \pm k_l) = G_{(mn \pm ml)}(|k_n \pm k_l|) \{ (k_n \pm k_l)^2 + (m_n \pm m_l)^2 - \\ - 1 + w[1 + H_{(mn \pm ml)}(|k_n \pm k_l|)] \}. \end{aligned} \quad (40)$$

Исследование закономерностей резонансного обмена энергией между волнами требует отдельного рассмотрения, но из вида соотношений (21), (39) – (40) сразу можно сказать, что в реализующихся при многомодовой начальной деформации вторичных комбинационных резонансах возможен обмен энергией между длинными и короткими волнами в обоих направлениях (от коротких к длинным и обратно), а также между волнами с различной симметрией (различающимися значениями азимутальных чисел).

На рис. 1 приведены рассчитанные по (38) формы струи в ситуации, когда начальная деформация определена суперпозицией двух волн для различных комбинаций волновых и азимутальных чисел. Несложно видеть, что при достаточно больших амплитудах волн спонтанное дробление струи на отдельные капли будет иметь полидисперсный характер, что и отмечается в экспериментах.

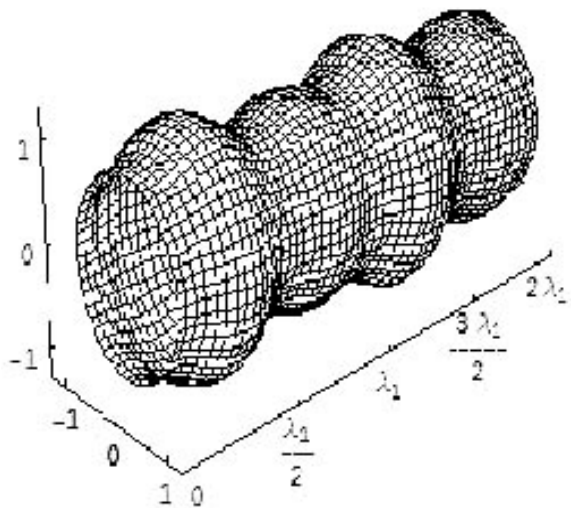


Рис. 1а

$$k_1 = 1.25, k_2 = 2.5, m_1 = 0, m_2 = 0.$$

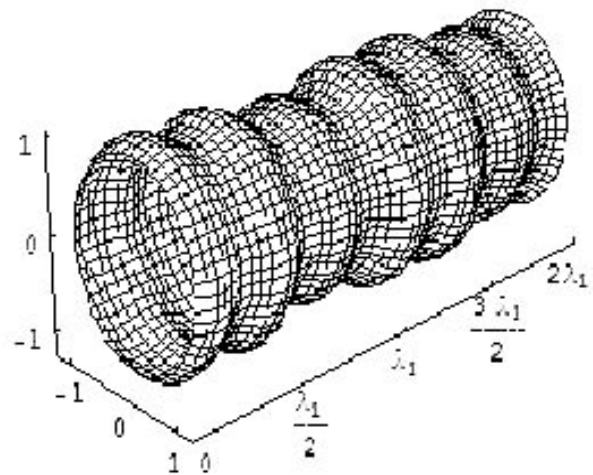


Рис. 1б

$$k_1 = 1.25, k_2 = 3.75, m_1 = 0, m_2 = 0.$$

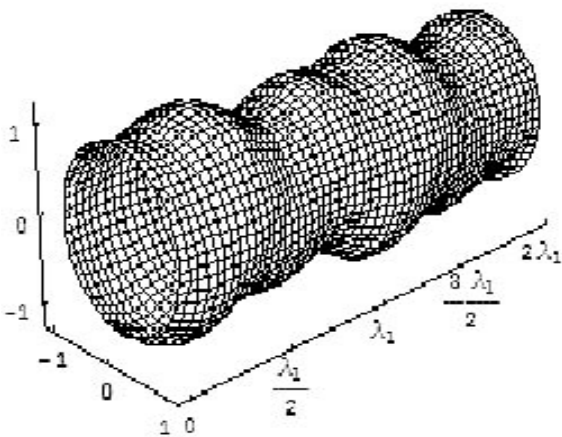


Рис. 1с

$$k_1 = 1.25, k_2 = 2.5, m_1 = 0, m_2 = 1.$$

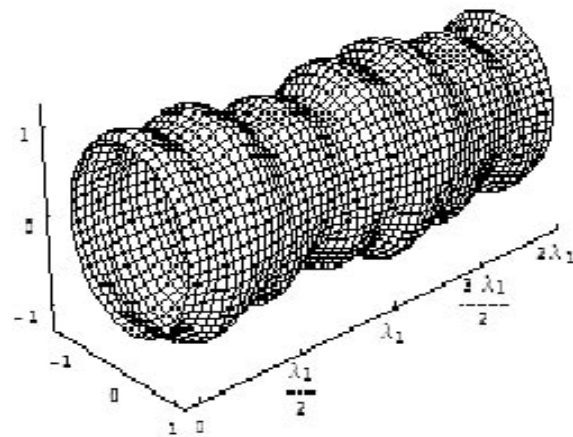


Рис. 1д

$$k_1 = 1.25, k_2 = 3.75, m_1 = 0, m_2 = 1.$$

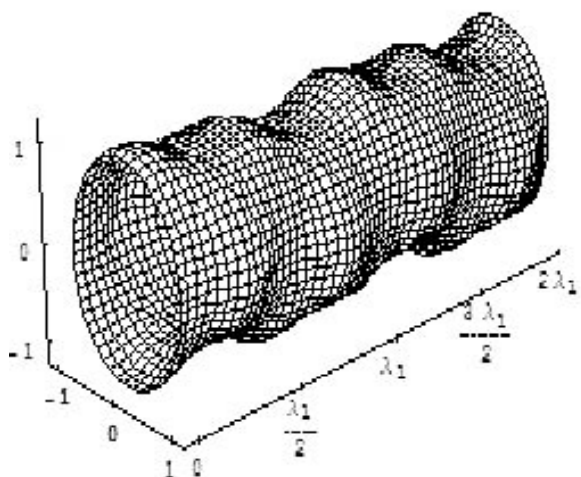


Рис. 1е

$$k_1 = 1.25, k_2 = 2.5, m_1 = 1, m_2 = 2.$$

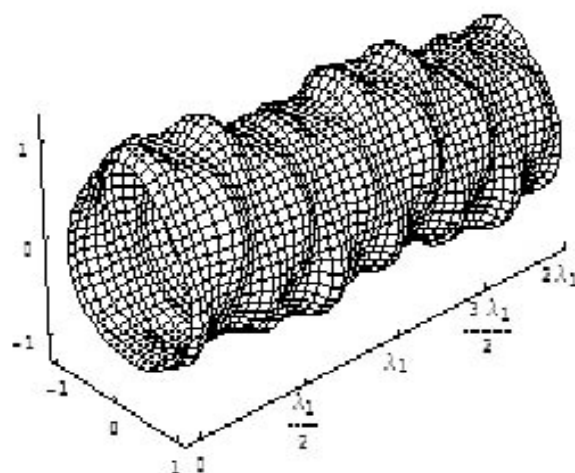


Рис. 1ф

$$k_1 = 1.25, k_2 = 3.75, m_1 = 1, m_2 = 3.$$

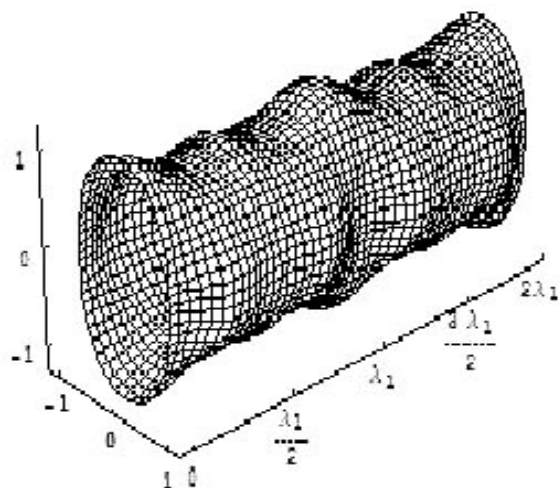


Рис. 1е

$$k_1 = 1.25, k_2 = 2.5, m_1 = 2, m_2 = 2.$$

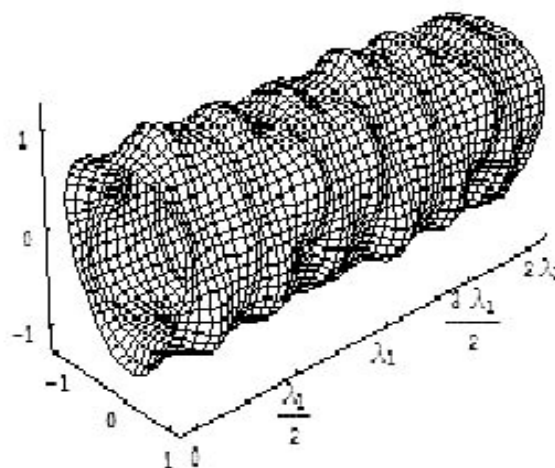


Рис. 1h

$$k_1 = 1.25, k_2 = 3.75, m_1 = 3, m_2 = 3.$$

Интересно отметить, что нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации:

$$r(z, \varphi) = 1 - 0.25\varepsilon^2 \left[\frac{1}{2}(h_1^2 + h_l^2) - h_1^2 a_1^2 \cos(2m_1 \varphi) - h_l^2 a_l^2 \cos(2m_l \varphi) \right].$$

Такой же феномен ранее был обнаружен для нелинейных осцилляций капель [260 – 261].

5. Сравнение полученных результатов с данными анализа, проведенного в предыдущем параграфе, показывают, что при многомодовой начальной деформации равновесной цилиндрической формы струи рельеф свободной поверхности струи усложняется, количество возможных внутренних нелинейных резонансов увеличивается, равно как и степень полидисперсности распада струи на отдельные капли при увеличении амплитуды волн.

Приложение А. Выражения для коэффициентов в граничных и дополнительных условиях (22) – (26).

$$X_1^{nl} = \omega_{mn} \cdot \left[-1 + (k_n^2 + m_n^2 + k_n k_l + m_n m_l) / G_{mn}(k_n) \right];$$

$$X_2^{nl} = \omega_{mn} \cdot \left[-1 + (k_n^2 + m_n^2 + k_n k_l - m_n m_l) / G_{mn}(k_n) \right];$$

$$X_3^{nl} = \omega_{mn} \cdot \left[-1 + (k_n^2 + m_n^2 - k_n k_l - m_n m_l) / G_{mn}(k_n) \right];$$

$$X_4^{nl} = \omega_{mn} \cdot \left[-1 + (k_n^2 + m_n^2 - k_n k_l + m_n m_l) / G_{mn}(k_n) \right];$$

$$Y_1^{nl} = P_n + 0.5 \{ [(k_n k_l - m_n m_l - \omega_{mn} \omega_{ml}) - w \cdot H_{mn}(k_n) \cdot H_{ml}(k_l)] + \\ + (\mu_{nl} + w)(k_n k_l + m_n m_l);$$

$$Y_2^{nl} = P_n + 0.5 \{ [(k_n k_l + m_n m_l - \omega_{mn} \omega_{ml}) - \\ - w \cdot H_{mn}(k_n) \cdot H_{ml}(k_l)] + (\mu_{nl} + w)(k_n k_l - m_n m_l);$$

$$Y_3^{nl} = P_n + 0.5 \{ [(k_n k_l - m_n m_l - \omega_{mn} \omega_{ml}) - \\ - w \cdot H_{mn}(k_n) \cdot H_{ml}(k_l)] + (\mu_{nl} - w)(k_n k_l + m_n m_l);$$

$$\begin{aligned}
Y_4^{nl} &= P_n + 0.5\{[(k_n k_l + m_n m_l - \omega_{mn} \omega_{ml}) - \\
&- w \cdot H_{mn}(k_n) \cdot H_{ml}(k_l)] + (\mu_{nl} - w)(k_n k_l - m_n m_l)\}; \\
P_n &= 1 - 1.5w - (2m_n^2 + \omega_{mn}^2) + w \cdot (k_n^2 + m_n^2 - 2H_{mn}(k_n)); \\
L_n &= -2\pi\chi \cdot [1 + 2H_{mn}(k_n)]; \quad \mu_{nl} \equiv [\omega_{mn} \omega_{ml} / G_{mn}(k_n) \cdot G_{ml}(k_l)] + w.
\end{aligned}$$

Приложение В. Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости.

$$\alpha_{nl}^{(1)} \equiv N_1 / M_1; \quad M_1 \equiv (\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(k_n + k_l);$$

$$N_1 \equiv G_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot [Y_1^{nl} + H_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot \chi L_n] + (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot X_1^{nl};$$

$$\alpha_{nl}^{(2)} \equiv N_2 / M_2, \quad n \neq l; \quad M_2 \equiv (\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(|k_n - k_l|);$$

$$N_2 \equiv G_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot [Y_4^{nl} + H_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \chi L_n] + (\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot X_4^{nl};$$

$$a_n^{(2)} \equiv \frac{Y_4^{nn} - 2m_n \cdot \chi L_n}{(1 - 2m_n)(1 + 2m_n - w)}; \quad \alpha_{nl}^{(3)} \equiv N_3 / M_3;$$

$$M_3 \equiv (\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(k_n + k_l);$$

$$N_3 \equiv G_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot [Y_2^{nl} + H_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot \chi L_n] + (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot X_2^{nl};$$

$$\alpha_{nl}^{(4)} \equiv N_4 / M_4, \quad n \neq l; \quad M_4 \equiv (\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(|k_n - k_l|);$$

$$N_4 \equiv G_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot [Y_3^{nl} + H_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \chi L_n] + (\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot X_3^{nl};$$

$$b_n^0 \equiv Y_3^{nn} + 0.5[1 - w \cdot (1 + k_n^2 + m_n^2)]; \quad \beta_{nl}^{(1)} \equiv R_1 / Q_1 ;$$

$$Q_1 \equiv (k_n + k_l) \cdot I'_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(k_n + k_l) \right];$$

$$R_1 \equiv (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot G_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[Y_1^{nl} + H_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot \chi L_n \right] + \\ + \omega_{(mn+ml)}^2(k_n + k_l) \cdot X_1^{nl}; \quad \beta_{nl}^{(2)} \equiv R_2 / Q_2, \quad n \neq l;$$

$$Q_2 \equiv |k_n - k_l| \cdot I'_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(|k_n - k_l|) \right];$$

$$R_2 \equiv (\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot G_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[Y_4^{nl} + H_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \chi \cdot L_n \right] + \\ + \omega_{(mn+ml)}^2(|k_n - k_l|) \cdot X_4^{nl}; \quad b_n^{(2)} \equiv X_1^{nn} / 2m_n; \quad \beta_{nl}^{(3)} \equiv R_3 / Q_3 ;$$

$$Q_3 \equiv (k_n + k_l) \cdot I'_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(k_n + k_l) \right];$$

$$R_3 \equiv (\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot G_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[Y_2^{nl} + H_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot \chi L_n \right] + \\ + \omega_{(mn-ml)}^2(k_n + k_l) \cdot X_2^{nl}; \quad \beta_{nl}^{(4)} \equiv R_4 / Q_4, \quad n \neq l;$$

$$Q_4 \equiv |k_n - k_l| \cdot I'_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(|k_n - k_l|) \right];$$

$$R_4 \equiv (\omega_{mn} - \omega_{ml}) G_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[Y_3^{nl} + H_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \chi L_n \right] + \\ + \omega_{(mn-ml)}^2(|k_n - k_l|) \cdot X_3^{nl}; \quad d_{nl}^{(1)} \equiv W_1 / S_1 ;$$

$$S_1 \equiv K_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(k_n + k_l) \right];$$

$$W_1 \equiv 4\pi \cdot \left[(\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot X_1^{nl} + G_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot Y_1^{nl} \right] +$$

$$+ \left[(\omega_{mn} + \omega_{ml})^2 + G_{(mn+ml)}(k_n + k_l) \cdot (1 - w - (k_n + k_l)^2 - (m_n + m_l)^2) \right] \cdot \chi L_n ;$$

$$d_{nl}^{(2)} \equiv W_2 / S_2 , \quad n \neq l ;$$

$$S_2 \equiv K_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn+ml)}^2(|k_n - k_l|) \right] ;$$

$$W_2 \equiv 4\pi \cdot \left[(\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot X_4^{nl} + G_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot Y_4^{nl} \right] +$$

$$+ \left[(\omega_{mn} - \omega_{ml})^2 + G_{(mn+ml)}(|k_n - k_l|) \cdot (1 - w - (k_n - k_l)^2 - (m_n + m_l)^2) \right] \cdot \chi L_n ;$$

$$d_n^{(2)} \equiv \frac{4\pi \cdot Y_4^{nn} + (1 - 4m_n^2 - w) \cdot \chi L_n}{(1 - 2m_n)(1 + 2m_n - w)} ; \quad d_{nl}^{(3)} \equiv W_3 / S_3 ;$$

$$S_3 \equiv K_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) + \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(k_n + k_l) \right] ;$$

$$W_3 \equiv 4\pi \cdot \left[(\omega_{mn} + \omega_{ml}) \cdot X_2^{nl} + G_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot Y_2^{nl} \right] +$$

$$+ \left[(\omega_{mn} + \omega_{ml})^2 + G_{(mn-ml)}(k_n + k_l) \cdot (1 - w - (k_n + k_l)^2 - (m_n - m_l)^2) \right] \cdot \chi L_n ;$$

$$d_{nl}^{(4)} \equiv W_4 / S_4 , \quad n \neq l ;$$

$$S_4 \equiv K_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot \left[(\omega_{mn}(k_n) - \omega_{ml}(k_l))^2 - \omega_{(mn-ml)}^2(|k_n - k_l|) \right] ;$$

$$W_4 \equiv 4\pi \cdot \left[(\omega_{mn} - \omega_{ml}) \cdot X_3^{nl} + G_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot Y_3^{nl} \right] +$$

$$+ \left[(\omega_{mn} - \omega_{ml})^2 + G_{(mn-ml)}(|k_n - k_l|) \cdot (1 - w - (k_n - k_l)^2 - (m_n - m_l)^2) \right] \cdot \chi L_n .$$

5.3. Аналитический расчет нелинейной поправки к частоте волны конечной амплитуды на поверхности заряженной струи

1. В настоящем параграфе в третьем порядке малости по амплитуде осцилляций поверхностно однородно заряженной струи идеальной несжимаемой проводящей жидкости, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности, определяется аналитическое асимптотическое выражение для формы струи как функции времени, когда начальная деформация равновесной поверхности определяется одной модой, которая может быть как осесимметричной, так и неосесимметричной. Выводится аналитическое выражение для нелинейной поправки к частоте и определяются положения внутренних нелинейных вырожденных трехмодовых и четырехмодовых резонансов, характерных для нелинейных поправок к аналитическим выражениям для формы струи, потенциалам поля скоростей течения жидкости в струе, электростатического поля в окрестности струи, а также для нелинейной поправки к частоте.

2. **Постановка задачи.** Пусть имеется движущаяся с постоянной скоростью \vec{U} бесконечная цилиндрическая струя постоянного радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внешняя среда отсутствует, однако в окружающем струю пространстве создано электростатическое поле, перпендикулярное оси струи. Вследствие этого на поверхности струи распределен заряд, поверхностная плотность χ которого в равновесном состоянии, т.е. в условиях отсутствия каких-либо возмущений равновесной цилиндрической формы струи, постоянна. Влиянием поля сил тяжести будем пренебрегать.

Рассмотрение проведем в инерциальной системе отсчета, неподвижной относительно поверхности струи, в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью \vec{U} , а ось OZ направлена вдоль оси симметрии струи по направлению ее движения: $\vec{n}_z \parallel \vec{U}$. Будем полагать, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе определится капиллярными колебаниями ее поверхности, обусловленными начальной деформацией, которую для удобства выберем наиболее

простой. Примем, что начальная деформация волновая и определяется одной гармоникой с волновым числом k и азимутальным числом m :

$$t = 0: \quad r(\varphi, z, t) = R + a \cdot \cos[(kz - m\varphi) - \omega_m t],$$

которая может быть как осесимметричной при $m = 0$, так и неосесимметричной при $m \neq 0$; радиус струи много больше амплитуды осцилляций: $R \gg a$. Зададимся целью проследить эволюцию во времени подобной начальной деформации равновесной цилиндрической струи.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным, полагая $R = \rho = \sigma = 1$. Тогда уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll 1, \quad (1)$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты, t – время, ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи.

В рамках модели идеальной несжимаемой жидкости математическая формулировка задачи о расчете временной эволюции виртуального волнового возмущения поверхности струи, заданного в начальный момент времени, будет состоять из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей течения жидкости в струе Ψ и электростатического потенциала Φ в окрестности струи:

$$\Delta \Psi = 0; \quad \Delta \Phi = 0; \quad (2)$$

условий ограниченности решений на оси струи и на бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad |\nabla \Psi| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0; \quad (3)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \Psi \cdot \nabla F = 0; \quad F(r, \varphi, z, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)] = 0; \quad (4)$$

$$\Delta P - \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \Psi)^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla \Phi)^2 - \operatorname{div} \vec{n} = 0; \quad (5)$$

$$\Phi = \Phi_s(t). \quad (6)$$

В выражении (5) ΔP – перепад давлений внутри и вне цилиндрической струи в равновесном состоянии; предпоследнее и последнее слагаемые – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно; \vec{n} – вектор внешней нормали к поверхности (1): $\vec{n} = \nabla F / |\nabla F|$.

Краевую задачу (1) – (6) следует дополнить условиями сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \nabla \Phi) r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi\chi \cdot \lambda; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda; \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dt = \pi \cdot \lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (8)$$

Для полного замыкания системы уравнений (2) – (8) необходимо задать еще начальные условия, первое из которых представляет собой начальное возмущение поверхности струи, которое запишем в виде

$$r(\varphi, z, 0) = 1 + \varepsilon \cdot [\zeta^{(+)}(0) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(0) \cdot \exp(-im\varphi)] \cdot \exp(ikz).$$

ε – малый параметр, равный отношению амплитуды волны к радиусу струи: $\varepsilon \equiv a/R$. Второе начальное условие, как это принято в аналитических расчетах нелинейных волн, зададим на финальной стадии решения задачи таким образом, чтобы получающееся аналитическое выражение имело наименее громоздкий вид.

3. Описание асимптотической процедуры. Будем искать решение задачи (2) – (8) в виде асимптотического разложения по малому параметру ε . Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до третьего порядка малости включительно, представим искомые функции ξ , Ψ и Φ в виде рядов по степеням ε , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется тремя временными масштабами – основным $T_0 = t$ и более медленными $T_1 = \varepsilon \cdot t$ и $T_2 = \varepsilon^2 \cdot t$:

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^3 \cdot \xi^{(3)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^4);$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(\vec{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3 \cdot \Psi^{(3)}(\vec{r}, T_0) + O(\varepsilon^4);$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) = & \Phi^{(0)}(\vec{r}) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(\vec{r}, T_0, T_1) + \\ & + \varepsilon^3 \cdot \Phi^{(3)}(\vec{r}, T_0) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (9)$$

Примем, что форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени имеет вид

$$r = 1 + \varepsilon \left[\zeta^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; $\theta \equiv k \cdot z - \omega_m \cdot T_0$, где $\omega_m(k)$ – частота волны, $\zeta^{(\pm)}(T_1, T_2)$ – пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленных времен T_1 и T_2 .

Чтобы отыскать асимптотическое решение сформулированной задачи, подставим разложения (9) в уравнения (2) – (8), пользуясь для вычисления производной по времени оператором

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2}$$

и раскладывая с учетом (10) граничные условия (4) – (8) в асимптотические ряды в окрестности равновесной цилиндрической

поверхности $r = 1$. Затем в каждом из уравнений и граничных условий задачи (2) – (8) выделим, просуммируем и приравняем к нулю слагаемые при одинаковых степенях ε . В итоге получим набор линейных (в общем случае неоднородных) краевых задач для отыскания нелинейных поправок различных порядков малости к линейному решению.

4. Решения задач различных порядков малости

4а. Задача нулевого порядка малости. В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Электрическое поле в окрестности невозмущенного однородно заряженного цилиндрического столба определяется потенциалом

$$\Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \cdot \ln(r). \quad (11)$$

При записи (11) принято, что потенциал невозмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи равен нулю: $\Phi_s^{(0)} = 0$. Динамическое граничное условие в нулевом приближении позволяет определить равновесный перепад давлений на цилиндрической поверхности струи: $\Delta P = 1 - 2\pi\chi^2$.

4б. Задача первого порядка малости. В силу линейности уравнений (2), условий ограниченности (3) и разложений (9), функции $\Psi^{(j)}$ и $\Phi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) в первом приближении являются решениями уравнений Лапласа. Система граничных и дополнительных условий (4) – (8) в первом порядке малости принимает вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0;$$

$$-\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(1)} \right\} + \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} = 0;$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_s^{(1)}(t);$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right] d\varphi \cdot dz = 0 ;$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)} \cdot d\varphi \cdot dz = 0 .$$

Решение задачи первого порядка малости для профиля волны $\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1, T_2)$ имеет вид

$$\xi^{(1)} = \left[\zeta^{(+)}(T_1, T_2) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1, T_2) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + k.c.. \quad (12)$$

Аббревиатура «*k.c.*» означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

Явный вид функций $\zeta^{(\pm)}(T_1, T_2)$ может быть определен лишь из решений задач более высоких порядков малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (12) удовлетворяет условию неизменности объема (8).

Принимая во внимание, что потенциал поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатический потенциал $\Phi^{(1)}$, определяемые в первом порядке малости, связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (4) и условием эквивалентности (6), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2)$ и $\Phi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2)$ в виде

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\vec{r}, t) &= I_m(kr) \left[B^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + B^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + k.c.; \\ \Phi^{(1)}(\vec{r}, t) &= K_m(kr) \left[D^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + D^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + \Phi_s^{(1)}(t) + k.c., \end{aligned} \quad (13)$$

где зависимость потенциалов $\Psi^{(1)}$ и $\Phi^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (2), которые при заданной зависимости от угла φ сводятся к уравнениям Бесселя. При этом она должна удовлетворять условиям ограниченности (3), а потому выражается через модифицированные функции Бесселя $I_m(kr)$ и

$K_m(kr)$. Учитывая сказанное выше, найдем связь между коэффициентами решений (12) и (13):

$$B^{(\pm)}(T_1, T_2) = \frac{-i\omega_m \cdot \zeta^{(\pm)}(T_1, T_2)}{k \cdot I'_m(k)}; \quad D^{(\pm)}(T_1, T_2) = \frac{4\pi\chi \cdot \zeta^{(\pm)}(T_1, T_2)}{K_m(k)}. \quad (14)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по аргументу, взятую на невозмущенной поверхности струи. В результате выражения для потенциалов $\Psi^{(1)}(\vec{r})$ и $\Phi^{(1)}(\vec{r})$ примут окончательный вид:

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2) = & -i\omega_m \frac{I_m(kr)}{k \cdot I'_m(k)} \left[\zeta^{(+)}(T_1, T_2) \cdot \exp(im\varphi) + \right. \\ & \left. + \zeta^{(-)}(T_1, T_2) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta); \\ \Phi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1, T_2) = & 4\pi\chi \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} \left[\zeta^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + \right. \\ & \left. + \zeta^{(-)}(T_1, T_2) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + k.c.. \end{aligned} \quad (15)$$

При записи выражения для $\Phi^{(1)}(\vec{r})$ учтено, что добавка первого порядка к значению электростатического потенциала на поверхности электропроводной струи равна нулю $\Phi_s^{(1)}(t) = 0$.

Подставляя в динамическое граничное условие решения (15) и (12), найдем дисперсионное уравнение, связывающее волновое k и азимутальное m числа с частотой волны $\omega_m(k)$:

$$\omega_m^2(k) = G_m(k) \cdot \left[k^2 + m^2 - 1 + W(1 + H_m(k)) \right]; \quad (16)$$

$$W \equiv 4\pi\chi^2; \quad G_m(k) = k \cdot I'_m(k) / I_m(k); \quad H_m(k) = k \cdot K'_m(k) / K_m(k).$$

4с. Задача второго порядка малости. Во втором порядке малости из системы (2) – (8) получим неоднородную краевую за-

дачу для отыскания поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}(\vec{r}, t)$, $\Psi^{(2)}(\vec{r}, t)$ и $\Phi^{(2)}(\vec{r}, t)$. Функции $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ в силу линейности проектов асимптотических решений (9) во втором порядке малости являются решениями уравнений Лапласа с неоднородными граничными условиями, в которых правые части (играющие роль функций неоднородности) выражаются через решения нулевого (11) и первого (12), (15) порядков малости.

Система граничных и дополнительных условий во втором порядке малости имеет вид

$$r = 1: \quad \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} = \left[\frac{\partial \zeta^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \zeta^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) +$$

$$+ i \left[X_1 \cdot \left((\zeta^{(+)})^2 \cdot \exp(i2m\varphi) + (\zeta^{(-)})^2 \cdot \exp(-i2m\varphi) \right) + X_2 \cdot 2\zeta^{(+)} \cdot \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) + (\kappa.c.);$$

$$- \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} - \chi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + 4\pi\chi\xi^{(2)} \right] + \xi^{(2)} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial z^2} =$$

$$= -i\omega_m \frac{1}{G_m(k)} \left[\frac{\partial \zeta^{(+)}}{\partial T_1} \exp(im\varphi) + \frac{\partial \zeta^{(-)}}{\partial T_1} \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) +$$

$$+ \left[Y_1 \left((\zeta^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\zeta^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) \right) + Y_2 \cdot 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \right] \exp(i2\theta) +$$

$$+ Y_3 \cdot 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \exp(i2m\varphi) + Y_4 \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right) + (\kappa.c.);$$

$$\Phi^{(2)} - 4\pi\chi\xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)} + L \left\{ (\zeta^{(+)})^2 \exp(i2m\varphi) + (\zeta^{(-)})^2 \exp(-i2m\varphi) + 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \right\} \exp(i\theta) +$$

$$+ 2\zeta^{(+)} \zeta^{(-)} \exp(i2m\varphi) + \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right) + (\kappa.c.) \Big\};$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} d\varphi \cdot dz = -4\pi^2 \lambda \chi [k^2 + m^2 - 4H_m(k)] \cdot \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right);$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(2)} \cdot d\varphi \cdot dz = -\pi\lambda \cdot \left(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2 \right).$$

Выражения для неопределенных коэффициентов приведены в «Приложении А».

Аналитические выражения для искомых поправок второго порядка малости, получаемые в результате решения задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} = & \left[A_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + A_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi) + A_{02} \right] \exp(i2\theta) + A_{00}(T_1, T_2) + \\ & + \left[A_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + A_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + A_{20}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi); \\ \Psi^{(2)} = & I_{2m}(2kr) \left[B_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + B_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi) \right] \exp(i2\theta) + \\ & + I_0(2kr) B_{02}(T_1, T_2) \exp(i2\theta) + r^{2m} B_{20}(T_1) \exp(i2m\varphi) + 2B_{00}(T_1, T_2) + \\ & + I_m(kr) \left[B_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + B_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + f_1(t); \\ \Phi^{(2)} = & K_{2m}(2kr) \left[D_{22}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + D_{22}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-i2m\varphi) \right] \exp(i2\theta) + \\ & + K_0(2kr) D_{02}(T_1, T_2) \exp(i2\theta) + r^{-2m} \cdot D_{20}(T_1, T_2) \exp(i2m\varphi) + D_{00}(T_1, T_2) + \\ & + K_m(kr) \left[D_{11}^{(+)}(T_1, T_2) \exp(im\varphi) + D_{11}^{(-)}(T_1, T_2) \exp(-im\varphi) \right] \exp(i\theta) + f_2(t) + k.c. \end{aligned} \quad (17)$$

Зависимости поправок второго порядка малости $\Psi^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$ от координаты r , использованные при записи (17), также как и в задаче первого порядка малости, несложно получить из уравнений Лапласа с заданными условиями ограниченности на оси и на бесконечности.

Подставляя (17) в граничные условия и приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

систему уравнений относительно коэффициентов $A_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$, $B_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ и $D_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$, $n, l = \{0, 1, 2\}$, отыскивая решение которой, находим связь $A_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$, $B_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$, $D_{nl}^{(\pm)}(T_1, T_2)$ между собой и с комплексными амплитудами $\zeta^{(\pm)}$, а также дифференциальное уравнение для отыскания амплитуд $\zeta^{(\pm)}$:

$$\partial \zeta^{(\pm)} / \partial T_1 = 0; \quad (18)$$

$$A_{22}^{(\pm)} = a_1 \cdot (\zeta^{(\pm)})^2; \quad A_{02} = a_2 \cdot 2\zeta^{(+)}\zeta^{(-)}; \quad A_{20} = a_3 \cdot 2\zeta^{(+)}\overline{\zeta^{(-)}};$$

$$A_{00} = -(|\zeta^{(+)}|^2 + |\zeta^{(-)}|^2)/2; \quad A_{11}^{(\pm)} = 0; \quad (19)$$

$$B_{22}^{(\pm)} \equiv \frac{-i}{2k \cdot I'_{2m}(2k)} \cdot (2\omega_m \cdot A_{22}^{(\pm)} - X_1 \cdot (\zeta^{(\pm)})^2) \equiv -ib_1 \cdot (\zeta^{(\pm)})^2; \quad B_{11}^{(\pm)} = B_{20} = 0;$$

$$B_{02} \equiv \frac{-i}{2k \cdot I'_0(2k)} \cdot (2\omega_m \cdot A_{02} - X_2 \cdot \zeta^{(+)}\zeta^{(-)}) \equiv -ib_2 \cdot 2\zeta^{(+)}\zeta^{(-)};$$

$$f_1(t) = b_0 \cdot T_0;$$

$$D_{22}^{(\pm)} = (4\pi\chi \cdot A_{22}^{(\pm)} + L \cdot (\zeta^{(\pm)})^2) / K_{2m}(2k) \equiv d_1 \cdot (\zeta^{(\pm)})^2;$$

$$f_2 = (2\pi\chi - L)A_{00};$$

$$D_{20} = 4\pi\chi \cdot A_{20} + L \cdot \zeta^{(+)}\overline{\zeta^{(-)}} \equiv d_3 \cdot 2\zeta^{(+)}\overline{\zeta^{(-)}};$$

$$D_{00} = 4\pi\chi \cdot (k^2 + m^2) \cdot A_{00};$$

$$D_{02} = (4\pi\chi \cdot A_{02} + L \cdot \zeta^{(+)}\zeta^{(-)}) / K_0(2k) \equiv d_2 \cdot 2\zeta^{(+)}\zeta^{(-)}; \quad D_{11}^{(\pm)} = 0, \quad (20)$$

где черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Выражения для коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 приведены в «Приложении А».

Из соотношений (18) – (20) видно, что комплексные амплитуды $\zeta^{(\pm)}$ и коэффициенты $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$ не зависят от временного масштаба T_1 . Все вновь введенные обозначения приведены в «Приложении А».

4d. Задача третьего порядка малости. Поправки $\Psi^{(3)}$ и $\Phi^{(3)}$ третьего порядка малости будут решениями уравнений Лапласа. Система неоднородных граничных и дополнительных условий к задаче в третьем порядке малости имеет громоздкий вид и вынесена в «Приложение В». В третьем порядке малости, помимо поправок $\xi^{(3)}$, $\Psi^{(3)}$ и $\Phi^{(3)}$, можно получить зависимость комплексных амплитуд от более медленного временного масштаба T_2 и нелинейную (зависящую от квадрата амплитуды волны) поправку к частоте волны.

Повторяя те же шаги, что и в задаче второго порядка малости, для поправок третьего порядка малости $\xi^{(3)}(\vec{r}, T_0)$, $\Psi^{(3)}(\vec{r}, T_0)$ и $\Phi^{(3)}(\vec{r}, T_0)$ можно найти аналитические выражения:

$$\begin{aligned} \xi^{(3)} = & \left[\left(A_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + A_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right) + \left(A_2^{(+)} \exp(im\varphi) + A_2^{(-)} \exp(-im\varphi) \right) \right] \times \\ & \times \exp(i3\theta) + \left[A_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + A_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + \\ & + \left[A_4^{(+)} \exp(im\varphi) + A_4^{(-)} \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + A_5 + (k.c.); \\ \Psi^{(3)} = & I_{3m}(3kr) \cdot \left[B_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + B_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right] \cdot \exp(i3\theta) + \\ & + I_m(3kr) \cdot \left[B_2^{(+)} \exp(im\varphi) + B_2^{(-)} \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i3\theta) + \\ & + I_{3m}(kr) \cdot \left[B_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + B_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +I_m(kr) \cdot \left[B_4^{(+)} \exp(im\varphi) + B_4^{(-)} \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + (k.c.); \\
\Phi^{(3)} = & f_3(t) + K_{3m}(3kr) \cdot \left[D_1^{(+)} \exp(i3m\varphi) + D_1^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right] \cdot \exp(i3\theta) + \\
& +K_m(3kr) \cdot \left[D_2^{(+)} \exp(im\varphi) + D_2^{(-)} \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i3\theta) + \\
& +K_{3m}(kr) \cdot \left[D_3^{(+)} \exp(i3m\varphi) + D_3^{(-)} \exp(-i3m\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + \\
& +K_m(kr) \cdot \left[D_4^{(+)} \exp(im\varphi) + D_4^{(-)} \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\theta) + D_5 \ln r + (k.c.), \\
\end{aligned} \tag{21}$$

определив зависимость $\Psi^{(3)}$ и $\Phi^{(3)}$ от координаты r , подставив их в уравнения Лапласа (2) с условиями ограниченности (3).

Подставляя выражения (21) для поправок третьего порядка малости в дополнительные условия сохранения заряда и объема участка струи, длина которого равна длине волны λ (8), (9), найдем, что коэффициенты A_5 и D_5 равны нулю. После подстановки выражений (21) в кинематическое (4) и динамическое (5) граничные условия, а также в условие эквипотенциальности поверхности струи (6) из требования равенства коэффициентов при одинаковых экспонентах определяется система уравнений для нахождения коэффициентов $A_j^{(\pm)}$, $B_j^{(\pm)}$ и $D_j^{(\pm)}$; $j = \{1, \dots, 5\}$. Кроме выражений, определяющих коэффициенты в решении третьего порядка малости, получаем дифференциальное уравнение относительно $\zeta^{(\pm)}$, из которого можно найти коэффициент $g^{(\pm)}$ определяющий поправку к частоте волны:

$$\frac{\partial \zeta^{(\pm)}}{\partial T_2} = -i \frac{g^{(\pm)}(k)}{\omega_m(k)} \zeta^{(\pm)} + i \frac{G_m(k)}{2\omega_m(k)} \left[\frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} + 1 - k^2 - m^2 - W(1 + H_m(k)) \right] A_4^{(\pm)}; \tag{22}$$

$$g^{(\pm)} \equiv \frac{G_m(k)}{2} \left\{ \left(\frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \Gamma_4 + \Upsilon_4 + \chi \cdot H_m(k) \cdot \Lambda_4 \right) |\zeta^{(\pm)}|^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega_m(k)}{G_m(k)} \Gamma_5 + \Upsilon_5 + \chi \cdot H_m(k) \cdot \Lambda_5 \right) |\zeta^{(\mp)}|^2 \right\}. \quad (23)$$

Выражения для коэффициентов Γ_j , Υ_j и Λ_j приведены в «Приложении С».

Отметим сразу, что сама по себе нелинейная поправка к частоте в асимптотическом анализе означает лишь расплывание нелинейной волны со временем за счет различия в фазовых скоростях поправок различных порядков малости, но тем не менее она оказывает существенное влияние на закономерности реализации неустойчивости волны (на закономерности разбиения волны на отдельные капли).

Квадратная скобка в уравнении (22) равна нулю согласно (16). Поскольку у нас не использовано второе начальное условие, сформулируем его в виде требования, чтобы коэффициент $A_4^{(\pm)}$ был равен нулю. Тогда из уравнения (22) зависимость комплексных амплитуд $\zeta^{(\pm)}$ от временного масштаба T_2 определится в виде

$$\zeta^{(\pm)} = C \cdot \exp(-i \frac{g^{(\pm)}(k)}{\omega_m(k)} T_2).$$

Поскольку $g^{(+)}$ и $g^{(-)}$ характеризуют поправку к одной и той же частоте $\omega_m(k)$, очевидно, что они должны быть равны, что говорит об эквивалентности $\zeta^{(+)}$ и $\zeta^{(-)}$. Таким образом, для $\zeta = \zeta(T_2)$ можно записать окончательное выражение:

$$\zeta(T_2) = C \cdot \exp(-i \frac{g(k)}{\omega_m(k)} T_2), \quad (24)$$

где C – постоянная интегрирования. Учитывая, что $\zeta^{(+)} = \zeta^{(-)}$, приведем соотношение для определения коэффициентов A_j :

$$A_j = \alpha_j C^3, \quad j = \{1, 2, 3\};$$

$$\alpha_j = \left[\omega_j \Gamma_j + G_{m_j}(k_j) \cdot (\Upsilon_j + \chi \cdot \Lambda_j H_{m_j}(k_j)) \right] / [\omega_j^2 - (\omega_{m_j}(k_j))^2]; \quad (25)$$

$$\omega_j \equiv \{3\omega_m(k_j), 3\omega_m(k_j), \omega_m(k_j)\}, \quad k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}.$$

Поскольку потенциал поля скоростей $\Psi(\vec{r}, t)$ и электростатический потенциал $\Phi(\vec{r}, t)$ связаны с функцией $\xi(\vec{r}, t)$ граничными условиями (4)-(5) и условием (6), то коэффициенты B_j и D_j несложно найти, зная A_j :

$$B_j \equiv \left(-i/[k_j \cdot I'_{m_j}(k_j)] \right) (\omega_j A_j - \Gamma_j C^3);$$

$$D_j \equiv \left(1/K_{m_j}(k_j) \right) (4\pi\chi \cdot A_j + \Lambda_j C^3), \quad j = \{1, 2, 3\}. \quad (26)$$

Из первого начального условия следует, что $C = 1$.

5. Финальное выражение для формы струи. Обсуждение полученных результатов. Собирая вместе поправки всех порядков малости, получим, что форма свободной поверхности жидкости струи в произвольный момент времени с учетом выражения (24) будет описываться уравнением

$$\begin{aligned} r(\varphi, z, t) = & 1 + \varepsilon \cdot \cos(m\varphi) \cos(\theta - \varepsilon^2 \frac{g(k)}{\omega_m(k)} t) - \\ & - 0.25 \cdot \varepsilon^2 [0.5 - (a_1 \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\theta) - a_3 \cos(2m\varphi)] + \\ & + (\varepsilon^3/16) \{ [\alpha_1 \cos(3m\varphi) + \alpha_2 \cos(m\varphi)] \cos(3\theta) + \alpha_3 \cos(3m\varphi) \cos(\theta) \}. \end{aligned} \quad (27)$$

Условие реализации неустойчивости струи по отношению к действию сил поверхностного натяжения и давлению электрического поля заключается в прохождении квадрата частоты через ноль в область отрицательных значений. С учетом наличия нели-

нейной поправки к частоте в третьем порядке малости это условие приведет к соотношению

$$\left(\omega_m + \varepsilon^2 \frac{g}{\omega_m} \right)^2 \approx \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 g = 0.$$

Несложно видеть, что влияние нелинейной поправки на критическую для начала реализации неустойчивости струи длину волны k и критическое значение параметра W будет различным при $g > 0$ и при $g < 0$.

Из вида нелинейных поправок третьего порядка малости $\Phi^{(3)}(\vec{r}, t)$, $\Psi^{(3)}(\vec{r}, t)$ и $\xi^{(3)}(\vec{r}, t)$ понятно, что они имеют резонансный характер, определяющийся видом коэффициентов, которые при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами. Положения резонансов определяются требованием стремления к бесконечности коэффициентов α_j , через которые определяются амплитудные множители A_j , B_j , D_j при нелинейных поправках третьего порядка малости. Согласно (25) условия реализации вырожденного четырехмодового резонансного взаимодействия волн на поверхности струи имеют вид

$$\omega_j^2 - \left(\omega_{m_j}(k_j) \right)^2 = 0, \quad (28)$$

где ω_j – частота моды, в которую энергия перекачивается, определяется (16), а $\omega_{m_j}(k_j)$ – частота моды, определяющей форму начальной деформации, от которой энергия отбирается, задается соотношением

$$\left(\omega_{m_j}(k_j) \right)^2 \equiv G_{m_j}(k_j) \cdot \{k_j^2 + m_j^2 - 1 + W \cdot [1 + H_{m_j}(k_j)]\};$$

$$\omega_{m_j} \equiv \{3\omega_m(k), 3\omega_m(k), \omega_m(k)\}, \quad k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}. \quad (29)$$

В нелинейных поправках третьего порядка малости $\Phi^{(3)}(\vec{r}, t)$, $\Psi^{(3)}(\vec{r}, t)$ и $\xi^{(3)}(\vec{r}, t)$ сохраняются и вырожденные трехмодовые резонансы, характерные для квадратичного приближения. Их положения определяются требованием стремления к бесконечности коэффициентов a_j , входящих в определение амплитудных коэффициентов второго и третьего порядков малости. Условия реализации трехмодовых резонансов записываются в виде

$$4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0; \quad 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0.$$

Исследование закономерностей резонансного обмена энергией между волнами требует отдельного рассмотрения, но из вида соотношений (16), (28) – (29) сразу можно сказать, что в реализующихся вырожденных резонансах перенос энергии между длинными и короткими волнами идет лишь в одном направлении – от длинных волн к коротким независимо от симметрии взаимодействующих волн.

На рис. 1 приведены рассчитанные по (23) для различных значений азимутального числа m графики зависимости величины нелинейной поправки к частоте $g^* \equiv \varepsilon^2 g$ от параметра W , характеризующего поверхностную плотность заряда на струе, и безразмерного волнового числа k (а) $m=0$; б) $m=1$; в) $m=2$; д) $m=3$). Из рис. 1 видно, что величина и знак (а следовательно, и влияние на критические условия неустойчивости струи в зависимости от знака устойчивость струи либо повышается, либо снижается) нелинейной поправки к частоте зависят не только от поверхностной плотности электрического заряда на струе и от волнового числа, но и от азимутального числа m . Видно также, что нелинейная поправка к частоте имеет резонансный вид, поэтому при ее использовании в окрестностях резонансов следует обращать внимание на выполнение требования асимптотичности разложения (иными словами, необходимо следить, чтобы малая поправка к частоте оставалась малой по сравнению с частотой).

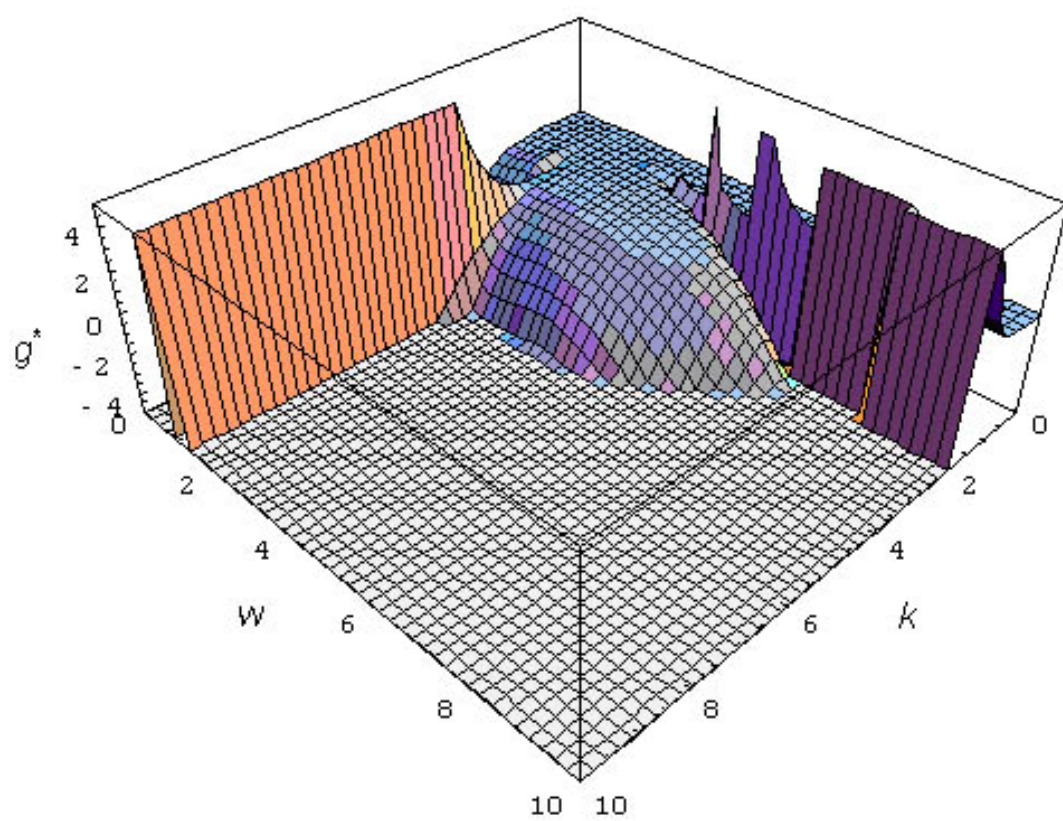


Рис. 1а

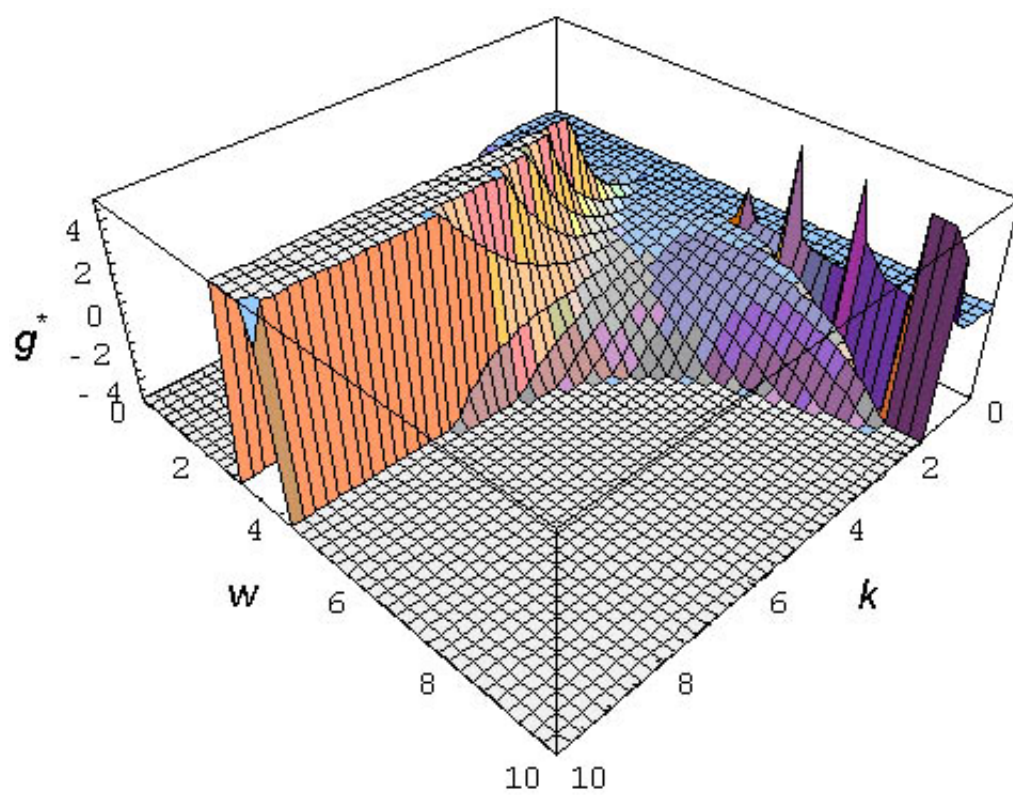


Рис. 1б

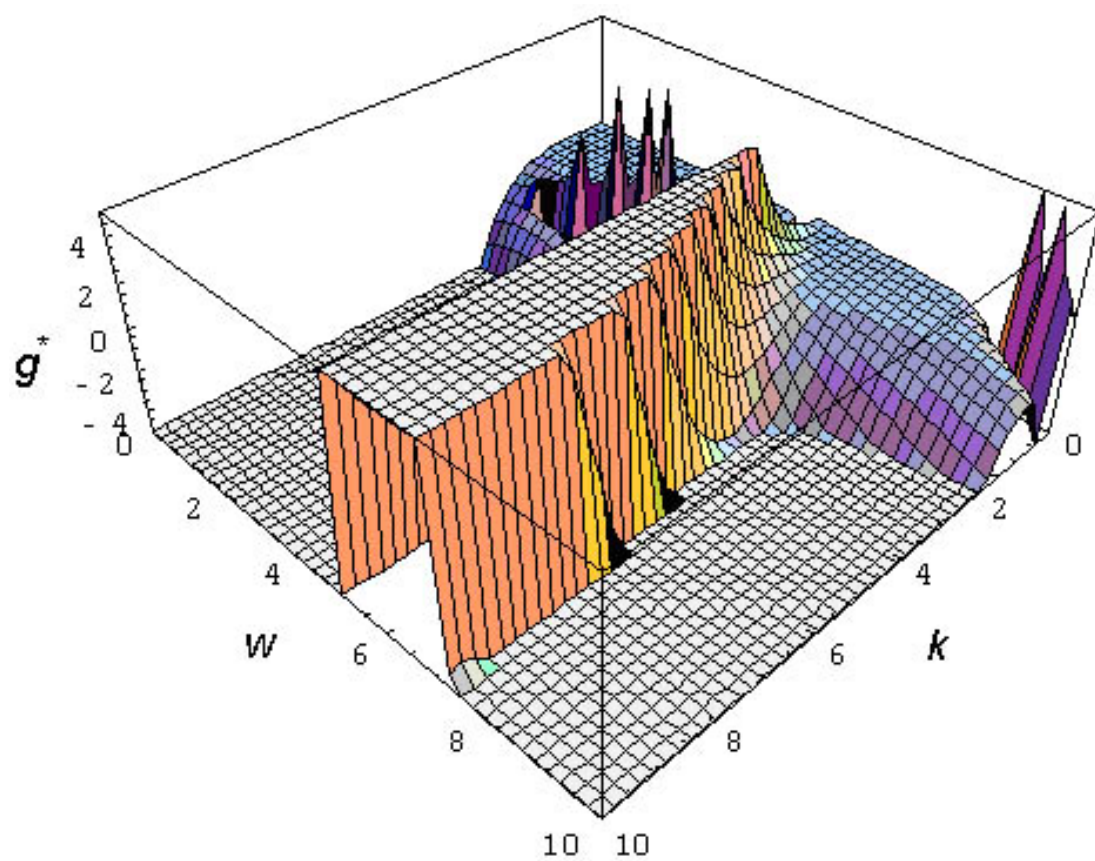


Рис. 1с

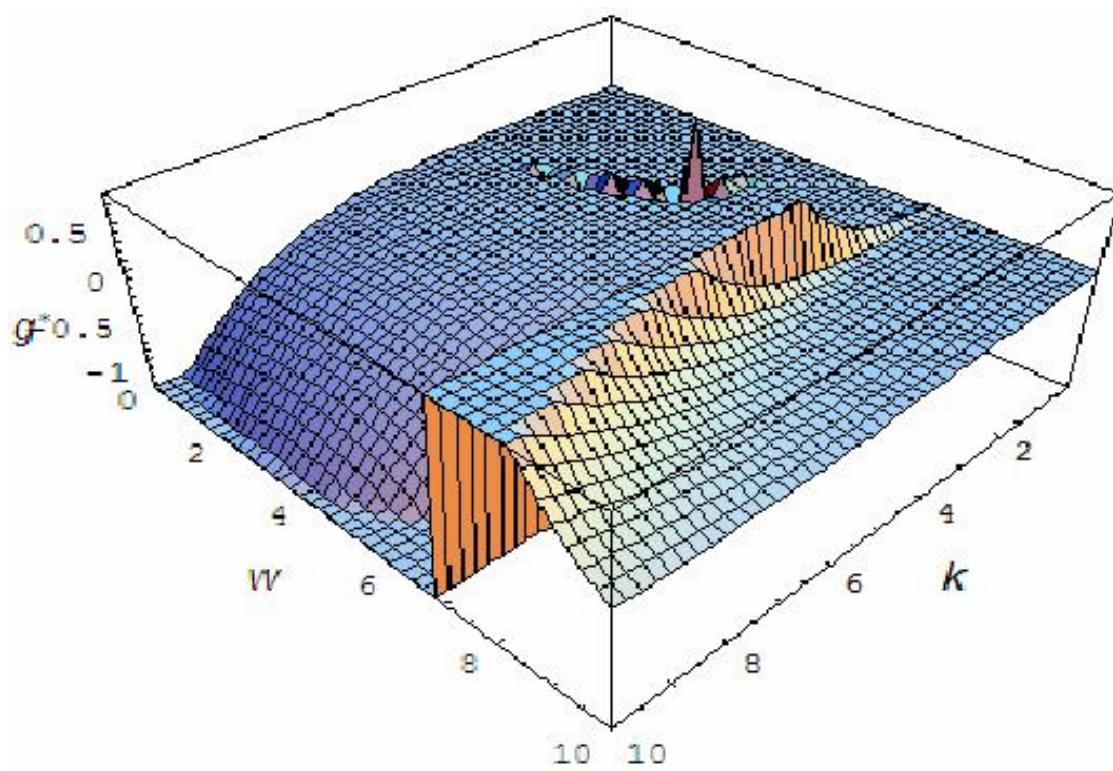


Рис. 1д

Интересно отметить, что нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности струи с формой, зависящей от вида начальной деформации:

$$r(z, \varphi) = 1 - 0.25\varepsilon^2 [0.5 - a_3 \cos(2m\varphi)].$$

Такой же феномен ранее был обнаружен для нелинейно-осциллирующих капель со сферической равновесной формой [260 – 261].

6. В асимптотических расчетах нелинейных осцилляций струи третьего порядка малости появляются нелинейные поправки к частотам, квадратичные по амплитуде, зависящие от вида начальной деформации струи, имеющие резонансный вид и оказывающие влияние на критические условия реализации неустойчивости струи. Сами нелинейные осцилляции струи происходят не в окрестности равновесной цилиндрической формы, а в окрестности поверхности, форма которой зависит от вида начальной деформации, и в общем случае не осесимметрична.

Приложение А. Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости.

$$a_1 \equiv M_1/N_1; \quad a_2 \equiv M_2/N_2;$$

$$M_1 = G_{2m}(2k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k) \cdot X_1;$$

$$N_1 = 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k);$$

$$M_2 = G_0(2k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + 2\omega_m(k) \cdot X_2;$$

$$N_2 = 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k); \quad a_3 \equiv (Y_3 - 2m\chi L) / [(1 - 2m)(1 + 2m - W)];$$

$$b_0 \equiv Y_4 + 0.5 - 0.5W(k^2 + m^2 + 1);$$

$$X_1 = \omega_m(k) [2(k^2 + m^2) - G_m(k)] / G_m(k);$$

$$X_2 = \omega_m(k) \left[2k^2 - G_m(k) \right] / G_m(k); \quad L = -2\pi\chi \left[1 + 2H_m(k) \right];$$

$$Y_1 = 1 + 0.5(k^2 - 5m^2) + \omega_m^2(k) \left[k^2 + m^2 - 3G_m^2(k) \right] / 2G_m^2(k) + \\ + 0.5W \left[3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k) \right];$$

$$Y_2 = 1 + 0.5(k^2 - 3m^2) + \omega_m^2(k) \left[k^2 - m^2 - 3G_m^2(k) \right] / 2G_m^2(k) + \\ + 0.5W \left[3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k) \right];$$

$$Y_3 = 1 - 0.5(k^2 + 5m^2) + \omega_m^2(k) \left[k^2 - m^2 - G_m^2(k) \right] / 2G_m^2(k) + \\ + 0.5W \left[k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k) \right];$$

$$Y_4 = 1 - 0.5(k^2 + 3m^2) + \omega_m^2(k) \left[k^2 + m^2 - G_m^2(k) \right] / 2G_m^2(k) + \\ + 0.5W \left[k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k) \right];$$

Приложение В. Система граничных и дополнительных условий третьего порядка малости.

$$r=1: \quad \frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial r} - \frac{\partial \xi^{(3)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_2} - \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \\ + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(2)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}}{\partial r^3} \left(\xi^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial \varphi \cdot \partial r} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial z \cdot \partial r} \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z}; \\
& -\frac{\partial \Psi^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{1}{8\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \right] \xi^{(3)} \right\} + \xi^{(3)} + \frac{\partial^2 \xi^{(3)}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi^{(3)}}{\partial z^2} = \\
& = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial T_0 \partial r} \xi^{(2)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi^{(1)}}{\partial T_0 \partial r^2} \left(\xi^{(1)} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Psi^{(2)}}{\partial T_0 \partial r} \xi^{(1)} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial T_1 \partial r} \xi^{(1)} + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \xi^{(1)} - \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \xi^{(1)} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} + \\
& + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{8\pi} \cdot \left\{ \xi^{(1)} \xi^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{6} \left(\xi^{(1)} \right)^3 \frac{\partial^3}{\partial r^3} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right)^2 \left. \right\} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(2)} - \\
& - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial r^3} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} \right) \left(\xi^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \left(\xi^{(1)} \right)^2 - \\
& - \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right] \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 - 3 \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \xi^{(1)} - \\
& - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \xi^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + 2 \left(\xi^{(1)} \frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \xi^{(2)} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right) + \\
& + 2 \xi^{(1)} \xi^{(2)} - \left(\xi^{(1)} \right)^3 - 3 \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left(\xi^{(1)} \right)^2 + 2 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi \cdot \partial z} + \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial z^2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(3)} + \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \xi^{(3)} &= \Phi_s^{(3)}(t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \xi^{(2)} - \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \xi^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \left(\xi^{(1)} \right)^2 - \\
& - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} \xi^{(2)} - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} \left(\xi^{(1)} \right)^3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(3)} \right] \Big|_{r=1} d\varphi \cdot dz = \\
& = \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \xi^{(2)} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \xi^{(2)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \left(\xi^{(1)} \right)^3 - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \right) \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \right) \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \left(\xi^{(1)} \right)^2 - \\
& -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \right)^2 \right) \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) \xi^{(1)} \right] - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \varphi} - \\
& - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} \Bigg]_{r=1} d\varphi \cdot dz.
\end{aligned}$$

Приложение С. Выражения для величин Γ_j , Υ_j и Λ_j , $j = \{1, \dots, 5\}$, использующихся при записи решения третьего порядка малости.

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 = & b_1 \cdot I_{2m}(2k) \left(k^2 + m^2 - G_{2m}(2k) \right) + a_1 \cdot \omega_m \left(3k^2 + 3m^2 - G_m(k) \right) / G_m(k) - \\
& - \omega_m \left[k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k) \right] / 2G_m(k);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 = & b_1 \cdot I_{2m}(2k) \left(6k^2 + 2m^2 - G_{2m}(2k) \right) + a_1 \cdot \omega_m \left(3k^2 - m^2 - G_m(k) \right) / G_m(k) + \\
& + 2b_2 \cdot I_0(2k) \left(6k^2 - G_0(2k) \right) + 2a_2 \cdot \omega_m \left(3k^2 + m^2 - G_m(k) \right) / G_m(k) - \\
& - \omega_m \left[3k^2 + 5m^2 - (9k^2 + m^2 + 6)G_m(k) \right] / 2G_m(k);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 = & b_1 \cdot I_{2m}(2k) \left(2k^2 + 6m^2 - G_{2m}(2k) \right) + a_1 \cdot \omega_m \left(k^2 - 3m^2 + G_m(k) \right) / G_m(k) + \\
& + \omega_m \left[k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k) \right] / 2G_m(k);
\end{aligned}$$

$$\Gamma_4 = b_1 \cdot I_{2m}(2k) \left(2k^2 + 2m^2 - G_{2m}(2k) \right) + a_1 \cdot \omega_m \left(k^2 + m^2 + G_m(k) \right) / G_m(k) +$$

$$+\omega_m \left[k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k) \right] / 2G_m(k);$$

$$\Gamma_5 = 2b_2 \cdot I_0(2k) \left(2k^2 - G_0(2k) \right) + 2a_2 \cdot \omega_m \left(k^2 - m^2 + G_m(k) \right) / G_m(k) + \\ + \omega_m \left[k^2 - m^2 - (3k^2 - m^2 + 2)G_m(k) \right] / G_m(k);$$

$$\Upsilon_1 = a_1 \cdot \left[-\omega_m^2 + 2k^2 - 12m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k)) \right] + 1.5\omega_m^2 + \\ + b_1 \cdot \omega_m I_{2m}(2k) \left[2(k^2 + m^2) / G_m(k) - 3G_{2m}(2k) \right] + d_1 \cdot \chi K_{2m}(2k) \left[6k^2 + \right. \\ \left. + 6m^2 - (2 + H_m(k)) \cdot H_{2m}(2k) \right] - \omega_m^2(k) \left[(k^2 + m^2)G_m(k) + 2m^2 \right] / 2G_m^2(k) + \\ + 0.5W \left[4 - 3k^2 - 7m^2 + (k^2 + m^2 + 6 + 2H_m(k)) \cdot H_m(k) \right] - \\ - 1 - 0.5k^2 + 4.5m^2 + 3k^2m^2 + 1.5(k^4 + m^4);$$

$$\Upsilon_2 = (a_1 + 2a_2) \left[-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k)) \right] + 2a_1(k^2 - 4m^2) + \\ + 4a_2(k^2 - m^2) + 4.5\omega_m^2 + b_1 \cdot \omega_m I_{2m}(2k) \left[2(k^2 - m^2) / G_m(k) - 3G_{2m}(2k) \right] + \\ + b_2 \cdot 2\omega_m I_0(2k) \left[2k^2 / G_m(k) - 3G_0(2k) \right] + d_1 \cdot \chi K_{2m}(2k) \left[6k^2 + 6m^2 - \right. \\ \left. - (2 + H_m(k)) \cdot H_{2m}(2k) \right] + d_2 \cdot 2\chi K_0(2k) \left[6k^2 - (2 + H_m(k)) \cdot H_0(2k) \right] - \\ - \omega_m^2(k) \left[(3k^2 + 11m^2)G_m(k) - 2m^2 \right] / 2G_m^2(k) - 3 - 1.5k^2 + 7.5m^2 - k^2m^2 + \\ + 0.5W \left[12 - 9k^2 - 13m^2 + (3k^2 - 5m^2 + 18 + 6H_m(k)) \cdot H_m(k) \right] + 1.5(3k^4 - m^4);$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = & (a_1 + 2a_3) \left[-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k)) \right] - 2a_1(k^2 + 6m^2) - \\
& -a_3 24m^2 + 0.5\omega_m^2 + b_1 \cdot \omega_m I_{2m}(2k) \left[2(k^2 - m^2)/G_m(k) - G_{2m}(2k) \right] + \\
& + d_1 \chi K_{2m}(2k) \left[2k^2 + 6m^2 - (2 + H_m(k))H_{2m}(2k) \right] + d_3 4\chi m[3m + 2 + H_m(k)] - \\
& -\omega_m^2(k) \left[(-5k^2 + 3m^2)G_m(k) + 2m^2 \right] / 2G_m^2(k) - 3 + 1.5k^2 + 13.5m^2 - k^2m^2 + \\
& + 0.5W \left[12 - 9k^2 - 21m^2 + (-5k^2 + 3m^2 + 18 + 6H_m(k)) \cdot H_m(k) \right] - 1.5(k^4 - 3m^4); \\
Y_4 = & a_1 \cdot \left[-\omega_m^2 - 2k^2 - 8m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k)) \right] + 1.5\omega_m^2 + \\
& + b_1 \cdot \omega_m I_{2m}(2k) \left[2(k^2 + m^2)/G_m(k) - G_{2m}(2k) \right] + d_1 \cdot \chi K_{2m}(2k) \left[2k^2 + \right. \\
& + 2m^2 - (2 + H_m(k)) \cdot H_{2m}(2k) \left. \right] + \omega_m^2(k) \left[5(k^2 + m^2)G_m(k) - 6m^2 \right] / 2G_m^2(k) + \\
& + 0.5W \left[18 - 7k^2 - 11m^2 + (-3k^2 - 3m^2 + 22 + 6H_m(k)) \cdot H_m(k) \right] - \\
& - 5 + 0.5k^2 + 9.5m^2 - 3k^2m^2 - 1.5(k^4 + m^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_5 = & 2(a_2 + a_3) \left[-\omega_m^2 + 2 + W(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k)) \right] - 4a_2(k^2 + m^2) - \\
& -a_3 16m^2 + 2\omega_m^2 + 2b_2 \cdot \omega_m I_0(2k) \left[2k^2/G_m(k) - G_0(2k) \right] + \\
& + d_2 \cdot 2\chi K_0(2k) \left[2k^2 - (2 + H_m(k))H_0(2k) \right] + d_3 \cdot 4\chi m(m + 2 + H_m(k)) + \\
& + \omega_m^2(k) \left[(5k^2 - 3m^2)G_m(k) + 2m^2 \right] / G_m^2(k) - 8 + k^2 - 17m^2 + 2k^2m^2 +
\end{aligned}$$

$$+W\left[15-8k^2-12m^2-(4k^2+4m^2-20-6H_m(k))\cdot H_m(k)\right]-3(k^4+m^4);$$

$$\Lambda_1 = -4\pi\chi a_1(1+H_m(k)) + 2\pi\chi\left[(2/3)-k^2-m^2+H_m(k)\right] - d_1 2k \cdot K'_{2m}(2k);$$

$$\Lambda_2 = -4\pi\chi(a_1+2a_2)(1+H_m(k)) + 6\pi\chi\left[(2/3)-k^2-m^2+H_m(k)\right] - \\ -2k[d_1 \cdot K'_{2m}(2k) + 2d_2 \cdot K'_0(2k)];$$

$$\Lambda_3 = -4\pi\chi(a_1+2a_3)(1+H_m(k)) + 6\pi\chi\left[(2/3)-k^2-m^2+H_m(k)\right] - \\ -d_1 2k \cdot K'_{2m}(2k) + d_3 \cdot 4m;$$

$$\Lambda_4 = -4\pi\chi a_1(1+H_m(k)) + 2\pi\chi\left[4-k^2-m^2+5H_m(k)\right] - d_1 2k \cdot K'_{2m}(2k);$$

$$\Lambda_5 = -8\pi\chi(a_2+a_3)(1+H_m(k)) + 4\pi\chi\left[3-2k^2-2m^2+4H_m(k)\right] - \\ -4d_2 k \cdot K'_0(2k) + d_3 \cdot 4m.$$

6. Аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях толстой заряженной струи вязкой жидкости

1. Из множества возможных причин многообразия экспериментально реализующихся режимов электродиспергирования жидкостей можно указать на многообразие начальных условий, способствующих возбуждению неосесимметричных мод осцилляций, закономерности реализации неустойчивости которых изучены пока недостаточно полно. Согласно результатам исследований, обсужденных в двух предыдущих главах, инкременты неустойчивости неосесимметричных мод в зависимости от вязкости и электропроводности жидкости могут превышать инкременты неустойчивости осесимметричных мод и определяют картину полидисперсного распада струи. Закономерности переноса энергии между резонансно взаимодействующими модами указывают на наличие определенной асимметрии в направлении переноса энергии между осесимметричными и неосесимметричными модами. Нелинейные поправки к частотам осцилляций неосесимметричных мод на разных участках реальной струи с формой, отличающейся от цилиндрической и имеющей на различных участках различную плотность поверхностного заряда, могут иметь разный знак и будут по-разному влиять на устойчивость различных участков струи. Эффект релаксации заряда на поверхности осциллирующей струи, приводящий к появлению колебательной неустойчивости заряженной поверхности жидкости, по-разному реализуется для мод с различной симметрией, а его корректное теоретическое исследование для струи пока не проведено. Более того, все проведенные к настоящему времени аналитические исследования нелинейных осцилляций струй вязкой жидкости выполнены для приближения «тонкой струи», когда радиальное распределение поля скоростей течения жидкости в струе, связанное с ее осцилляциями, считается однородным (не зависящим от радиальной переменной). В таком приближении радиальная компонента поля скоростей течения жидкости равна нулю и уравнение баланса заряда на поверхности струи не может быть выписано строго. В связи со сказанным в настоящем рассмотрении проводится строгий нелинейный асимптотический анализ нелиней-

ных осцилляций струи, когда пренебрегать неоднородностью радиального распределения поля скоростей нельзя. Весь анализ будет проведен по схеме, использованной ранее при аналитическом расчете нелинейных осцилляций заряженной сферической капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости [262].

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную, движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью \vec{U}_0 цилиндрическую струю радиуса R вязкой несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ , поддерживаемую при постоянном электрическом потенциале. Будем считать, что жидкость является идеально проводящей и электрический заряд распределен по цилиндрической в отсутствие возмущений поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда χ . Найдем критические условия неустойчивости капиллярных колебаний поверхности струи.

Рассмотрение проведем в цилиндрической системе координат, начало которой движется со скоростью \vec{U}_0 , а ось OZ направлена вдоль оси симметрии невозмущенной струи по направлению ее движения: $\vec{n}_z \parallel \vec{U}_0$. Очевидно, что в такой системе координат поле скоростей движения жидкости в струе будет полностью определяться капиллярными колебаниями ее поверхности.

Зададимся целью проследить эволюцию во времени распространяющейся по поверхности струи в положительном направлении оси OZ осесимметричной волны с волновым числом k_0 , амплитуда которой мала по сравнению с ее длиной.

Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, приняв в качестве основных единиц R, ρ, σ (т.е., полагая, $R = \rho = \sigma = 1$). В этом случае уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, в произвольный момент времени t запишется в виде

$$r = 1 + \xi(z, t); \quad |\xi| \ll 1, \quad (1)$$

где r, z – цилиндрические координаты, t – время, ξ – функция, описывающая искажение равновесной цилиндрической формы струи, а начальная деформация струи определится выражением

$$\xi(z, t=0) = \varepsilon \zeta \exp(ik_0 z) + (к.с.); \quad \varepsilon \ll 1; \quad |\zeta| \ll O(1), \quad (2)$$

где ε – малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; здесь и далее аббревиатура (к.с.) обозначает слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \nu \Delta \vec{U}; \quad \text{div} \vec{U} = 0; \quad \Delta \Phi = 0, \quad (3)$$

условий ограниченности для поля скоростей на оси струи и для напряженности электрического поля струи на бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad |\vec{U}| < \infty; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi| \rightarrow 0, \quad (4)$$

граничных условий на свободной поверхности (1):
кинематического:

$$r = 1 + \xi: \quad \partial_t F + \vec{U} \cdot \nabla F = 0; \quad F(r, z, t) \equiv r - [1 + \xi(z, t)], \quad (5)$$

динамических:

$$r = 1 + \xi: \quad \vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{U} = 0; \quad (6)$$

$$-(P - P_{atm}) + 2\nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} - P_\Phi + P_\sigma = 0, \quad (7)$$

условия эквипотенциальности поверхности струи:

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi = \Phi_s(t), \quad (8)$$

где ∂_t означает частную производную по переменной t , \vec{n} и $\vec{\tau}$ – орты нормали и касательной к поверхности (1), P – давление жидкости внутри струи, P_{atm} – атмосферное давление, P_Φ и P_σ – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения соответственно, Φ – электростатический потенциал в окрестности струи, $\Phi_s(t)$ – потенциал поверхности струи.

Для полного замыкания системы уравнений (3) – (8) необходимо задать еще два начальных условия. В качестве одного из них естественно выбрать форму струи в начальный момент времени (2). В качестве второго примем нулевое значение начального поля скоростей волнового движения

$$t = 0; \quad \vec{U} = 0. \quad (9)$$

3. Решение нелинейной системы уравнений (2) – (9) будем искать в виде прямого разложения по малому параметру ε , который по смыслу является отношением амплитуды волны к радиусу струи. Ограничиваясь точностью до второго порядка малости включительно, представим все искомые функции в виде асимптотических разложений по степеням ε :

$$\xi(z, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(z, t) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(z, t) + O(\varepsilon^3)$$

$$\vec{U}(r, z, t) = [\varepsilon U_r^{(1)}(r, z, t) + \varepsilon^2 U_r^{(2)}(r, z, t)] \vec{e}_r +$$

$$+ [\varepsilon U_z^{(1)}(r, z, t) + \varepsilon^2 U_z^{(2)}(r, z, t)] \vec{e}_z + O(\varepsilon^3);$$

$$P(r, z, t) = P^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon P^{(1)}(r, z, t) + \varepsilon^2 P^{(2)}(r, z, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(r, z, t) = \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi^{(1)}(r, z) + \varepsilon^2 \cdot \Phi^{(2)}(r, z) + O(\varepsilon^3), \quad (10)$$

где \vec{e}_r, \vec{e}_z – орты цилиндрической системы координат.

В виде аналогичных разложений представим давления P_Φ, P_σ и потенциал поверхности струи

$$P_\Phi(r, z, t) = P_\Phi^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon P_\Phi^{(1)}(r, z, t) + \varepsilon^2 P_\Phi^{(2)}(r, z, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$P_\sigma(r, z, t) = P_\sigma^{(0)}(r, z, t) + \varepsilon P_\sigma^{(1)}(r, z, t) + \varepsilon^2 P_\sigma^{(2)}(r, z, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi_s(t) = \Phi_s^{(0)} + \varepsilon \cdot \Phi_s^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \cdot \Phi_s^{(2)}(t) + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя данные разложения в выписанную систему уравнений, учитывая векторные тождества

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nabla \left(\frac{1}{2} U^2 \right) - \vec{U} \times \text{rot} \vec{U}, \quad \Delta \vec{U} = \text{grad}(\text{div} \vec{U}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{U})$$

и приравнявая коэффициенты при различных степенях малого параметра ε , разделим исходную нелинейную задачу на совокупность связанных между собой линейных неоднородных задач.

3а. В нулевом порядке малости получим задачу, описывающую равновесное состояние системы

$$\Delta \Phi^{(0)} = 0; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \Phi^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \Phi^{(0)} = \Phi_s^{(0)}; \quad -(P^{(0)} - P_{atm}) - P_\Phi^{(0)} + P_\sigma^{(0)} = 0,$$

решение которой легко получить в виде

$$\Phi^{(0)} = -4\pi\chi \ln(r); \quad P^{(0)} = P_{atm} - 2\pi\chi^2 + 1. \quad (11)$$

Если учесть выражение, связывающее равновесный электростатический потенциал в окрестности струи с равновесной поверхностной плотностью заряда, то несложно найти $(\nabla \Phi^{(0)})|_{r=1} = -4\pi\chi$.

3б. Собирая слагаемые, содержащие малый параметр в первой степени, выделим задачу первого порядка малости:

$$\partial_t U_r^{(1)} = -\partial_r P^{(1)} + \nu \left(\Delta U_r^{(1)} - \frac{1}{r^2} U_r^{(1)} \right); \quad \partial_t U_z^{(1)} = -\partial_z P^{(1)} + \nu \Delta U_z^{(1)};$$

$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{1}{r} U_r^{(1)} + \partial_z U_z^{(1)} = 0; \quad \Delta \Phi^{(1)} = 0;$$

$$t = 0: \quad \bar{U}^{(1)} = 0; \quad \xi^{(1)} = \zeta \exp(-ik_0 z) + (\text{к.с.});$$

$$r \rightarrow 0: \quad |U_r^{(1)}|, |U_z^{(1)}| < \infty; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \Phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned}
r=1: \quad \partial_t \xi^{(1)} &= U_r^{(1)}; \quad \partial_r U_z^{(1)} + \partial_z U_r^{(1)} = 0; \quad \Phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_r \Phi^{(0)} = \Phi_s^{(1)}(t); \\
-P^{(1)} + 2\nu \partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \partial_r \Phi^{(0)} (\partial_r \Phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_{rr} \Phi^{(0)}) - (\xi^{(1)} + \partial_{zz} \xi^{(1)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

3с. Собирая слагаемые, содержащие малый параметр во второй степени, выделим задачу второго порядка малости:

$$\partial_t U_r^{(2)} + \partial_r P^{(2)} - \nu \left(\Delta U_r^{(2)} - \frac{1}{r^2} U_r^{(2)} \right) = -(\vec{U}^{(1)} \cdot \nabla) U_r^{(1)};$$

$$\partial_t U_z^{(2)} + \partial_z P^{(2)} - \nu \Delta U_z^{(2)} = -(\vec{U}^{(1)} \cdot \nabla) U_z^{(1)};$$

$$\partial_r U_r^{(2)} + \frac{1}{r} U_r^{(2)} + \partial_z U_z^{(2)} = 0; \quad \Delta \Phi^{(2)} = 0;$$

$$t=0: \quad \vec{U}^{(2)} = 0; \quad \xi^{(2)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad |U_r^{(2)}|, |U_z^{(2)}| < \infty; \quad r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \Phi^{(2)} \rightarrow 0;$$

$$r=1: \quad \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_r \Phi^{(0)} = \Phi_s^{(2)}(t) - \xi^{(1)} \partial_r \Phi^{(1)} - \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{rr} \Phi^{(0)};$$

$$U_r^{(2)} - \partial_t \xi^{(2)} = U_z^{(1)} \partial_z \xi^{(1)} - \partial_r U_r^{(1)} \xi^{(1)};$$

$$\partial_z U_r^{(2)} + \partial_r U_z^{(2)} = -\xi^{(1)} \partial_r (\partial_r U_z^{(1)} + \partial_z U_r^{(1)}) - 2\partial_z \xi^{(1)} (\partial_r U_r^{(1)} - \partial_z U_z^{(1)});$$

$$-P^{(2)} + 2\nu \partial_r U_r^{(2)} - \frac{1}{4\pi} \partial_r \Phi^{(0)} (\partial_r \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_{rr} \Phi^{(0)}) - (\xi^{(2)} + \partial_{zz} \xi^{(2)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \xi^{(1)} \partial_r P^{(1)} - 2\nu \left[\xi^{(1)} \partial_{rr} U_r^{(1)} - \partial_z \xi^{(1)} (\partial_z U_r^{(1)} + \partial_r U_z^{(1)}) \right] + \\
&+ \frac{1}{8\pi} \left[(\partial_r \Phi^{(1)})^2 + (\partial_z \Phi^{(1)})^2 + 2\xi^{(1)} (\partial_{rr} \Phi^{(0)} \partial_r \Phi^{(1)} + \partial_r \Phi^{(0)} \partial_{rr} \Phi^{(1)}) + \right. \\
&\left. + (\xi^{(1)})^2 \left((\partial_{rr} \Phi^{(0)})^2 + \partial_r \Phi^{(0)} \partial_{rrr} \Phi^{(0)} \right) \right] - \left((\xi^{(1)})^2 - \frac{1}{2} (\partial_z \xi^{(1)})^2 \right). \quad (13)
\end{aligned}$$

4. Для решения задачи первого порядка выполним в системе (12) преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по переменной z :

$$f(k, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(z, t) \exp(-St) dt \right) \exp(ikz) dz, \quad (14)$$

то есть от функций

$$\xi^{(1)}(z, t), U_r^{(1)}(r, z, t), U_z^{(1)}(r, z, t), P^{(1)}(r, z, t), \Phi^{(1)}(r, z, t), \Phi_S^{(1)}(t)$$

перейдем к их изображениям, сохранив прежние обозначения:

$$\xi^{(1)}(k, S), U_r^{(1)}(r, k, S), U_z^{(1)}(r, k, S), P^{(1)}(r, k, S), \Phi^{(1)}(r, k, S), \Phi_S^{(1)}(S).$$

и пользуясь теоремами о дифференцировании по переменным t и z :

$$\partial_t f(r, z, t) \rightarrow S f(r, k, S) - f(r, k, t=0); \quad \partial_z f(r, z, t) \rightarrow -ik f(r, k, S),$$

при получении изображений для производных $\partial_t \xi^{(1)}$, $\partial_t U_r^{(1)}$, $\partial_t U_z^{(1)}$ учтём начальные условия.

В результате система (12) примет вид

$$S U_r^{(1)} = -\partial_r P^{(1)} + \nu \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r U_r^{(1)}) - k^2 U_r^{(1)} - \frac{1}{r^2} U_r^{(1)} \right); \quad (15)$$

$$S U_z^{(1)} = i k P^{(1)} + \nu \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r U_z^{(1)}) - k^2 U_z^{(1)} \right); \quad (16)$$

$$\partial_r U_r^{(1)} + \frac{1}{r} U_r^{(1)} - i k U_z^{(1)} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Phi^{(1)}) - k^2 \Phi^{(1)} = 0; \quad (18)$$

$$r \rightarrow 0: \quad |U_r^{(1)}| < \infty; \quad |U_z^{(1)}| < \infty; \quad (19)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad |\Phi^{(1)}| \rightarrow 0; \quad (20)$$

$$r = 1: \quad U_r^{(1)} - S \xi^{(1)} + \sqrt{2\pi} \delta(k - k_0) = 0; \quad (21)$$

$$\partial_r U_z^{(1)} - i k U_r^{(1)} = 0; \quad (22)$$

$$-P^{(1)} + 2\nu \partial_r U_r^{(1)} - \frac{1}{4\pi} \partial_r \Phi^{(0)} (\partial_r \Phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_{rr} \Phi^{(0)}) - (1 - k^2) \xi^{(1)} = 0; \quad (23)$$

$$\Phi^{(1)} + \xi^{(1)} \partial_r \Phi^{(0)} = \Phi_s^{(1)} \delta(k), \quad (24)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция.

Электростатическая часть выписанной системы, состоящая из уравнений (18), (20), (24), легко решается и определяет значение электрического потенциала в первом порядке малости:

$$\Phi^{(1)}(r, k, S) = 4\pi \chi \xi^{(1)}(k, S) \frac{K_0(kr)}{K_0(k)}; \quad \Phi_s^{(1)}(S) = 0, \quad (25)$$

где $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя порядка n .

Для того чтобы найти поля скоростей жидкости и давления в струе из уравнения неразрывности (17) выразим $U_z^{(1)}(r, k, S)$

$$U_z^{(1)} = -\frac{i}{k} \left(\partial_r U_r^{(1)} + \frac{1}{r} U_r^{(1)} \right), \quad (26)$$

а из уравнения (16) $P^{(1)}(r, k, S)$

$$P^{(1)} = -\frac{i}{k} \left[S U_z^{(1)} - \nu \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r U_z^{(1)}) - k^2 U_z^{(1)} \right) \right]. \quad (27)$$

После подстановки выражений (26) и (27) в (15) его можно привести к виду

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right) \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{S}{\nu} \right) U_z^{(1)} = 0. \quad (28)$$

Решение уравнения (28), удовлетворяющее условию ограниченности (19), имеет вид

$$U_r^{(1)}(r, k, S) = A(k, S) I_1(kr) + B(k, S) I_1(lr); \quad l^2 \equiv k^2 + \frac{S}{\nu}, \quad (29)$$

где $A(k, S)$, $B(k, S)$ – неопределённые постоянные, $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя порядка n .

Подставляя (29) в (26) в (27), найдем $U_z^{(1)}(r, k, S)$ и $P^{(1)}(r, k, S)$:

$$U_z^{(1)}(r, k, S) = -i \left(A(k, S) I_0(kr) + \frac{l}{k} B(k, S) I_0(lr) \right); \quad (30)$$

$$P^{(1)}(r, k, S) = -\frac{S}{k} A(k, S) I_0(kr). \quad (31)$$

Используя (29), (30) и граничные условия (21) – (22), выразим неопределённые пока величины $A(k, S)$, $B(k, S)$ через функцию $\xi^{(1)}(k, S)$:

$$A(k, S) = \frac{(l^2 + k^2)}{I_1(k)} \frac{\nu}{S} \left(S \xi^{(1)} - \sqrt{2\pi} \zeta \delta(k - k_0) \right);$$

$$B(k, S) = -\frac{2k^2}{I_1(l)} \frac{\nu}{S} \left(S \xi^{(1)} - \sqrt{2\pi} \zeta \delta(k - k_0) \right). \quad (32)$$

Из последнего динамического граничного условия (23), учитывая решения (11), (25), выражения (29) – (32), получим искомую зависимость $\xi^{(1)}(k, S)$:

$$\xi^{(1)}(k, S) = \delta(k - k_0) \sqrt{2\pi} \zeta \frac{(D(k, S) - \omega^2(k))}{S D(k, S)}; \quad (33)$$

$$D(k, S) \equiv S^2 - 2\nu \left[S G(k) - 2k^2 (S + \nu k^2) \left(1 - \frac{G(k)}{G(l)} \right) \right] + \omega^2(k);$$

$$\omega^2(k) \equiv G(k) [k^2 - 1 + 4\pi \chi^2 (1 - H(k))];$$

$$G(x) \equiv \frac{x I_1(x)}{I_0(x)}; \quad H(x) \equiv \frac{x K_1(x)}{K_0(x)},$$

используя которую для $U_r^{(1)}(r, k, S)$, $U_z^{(1)}(r, k, S)$, $P^{(1)}(r, k, S)$ получим

$$U_r^{(1)}(r, k, S) = \delta(k - k_0) \frac{\sqrt{2\pi} \zeta \omega^2(k)}{S D(k, S)} \left[2\nu k^2 \frac{I_1(lr)}{I_1(l)} - (S + 2\nu k^2) \frac{I_1(kr)}{I_1(k)} \right];$$

$$U_z^{(1)}(r, k, S) = -i \delta(k - k_0) \frac{\sqrt{2\pi} \zeta \omega^2(k)}{S D(k, S)} \left[2\nu k l \frac{I_0(lr)}{I_1(l)} - (S + 2\nu k^2) \frac{I_0(kr)}{I_1(k)} \right]$$

$$P^{(1)}(r, k, S) = \delta(k - k_0) \sqrt{2\pi} \zeta \frac{\omega^2(k)}{S D(k, S)} (S + 2\nu k^2) \frac{I_0(kr)}{k I_1(k)}. \quad (34)$$

Из выражений (33), (34) видно, что все найденные функции имеют общую структуру: $f(r, k, S) = \delta(k - k_0) \sqrt{2\pi} \tilde{f}(r, k, S)$, поэтому обратное преобразование Фурье приведёт к результату

$$\begin{aligned} f(r, z, S) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, k, S) e^{-ikz} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k - k_0) \sqrt{2\pi} \tilde{f}(r, k, S) e^{-ikz} dk = \tilde{f}(r, k_0, S) e^{-ik_0 z}. \end{aligned} \quad (35)$$

Кроме того, из вида выражений (33), (34) видно, что они имеют особую точку $S = 0$ и особые точки, положение которых определяется условием $D(k, S_k^{(n)}) = 0$. Уравнение $D(k, S_k^{(n)}) = 0$ представляет собой дисперсионное уравнение задачи и имеет бесконечное число решений. В каждой из особых точек функция $1/(S D(k, S))$ имеет полюс первого порядка. Поскольку каждое из выражений (33), (34) при $S \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то в формуле обратного преобразования Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(S) \exp(S t) dS$$

интеграл вдоль прямой $\text{Re } S = \gamma$ можно заменить контурным интегралом, охватывающим всю левую часть комплексной плоскости и применить к этому интегралу теорему о вычетах. В результате формула обращения примет вид

$$f(r, z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Выч} [f(r, z, S) \cdot \exp(S t), S_n]. \quad (36)$$

Применяя формулы обращения (35), (36) к выражениям (33), (34), найдем решения первого порядка малости для отклонения поверхности струи от равновесной цилиндрической и полей давления и скорости капиллярных колебаний жидкости в струе в окончательном виде:

$$\xi^{(1)}(z, t) = \zeta \xi_{k_0}^{(1)}(t) \exp(-i k_0 z) + (\kappa.c.);$$

$$U_r^{(1)}(r, z, t) = \zeta U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \exp(-i k_0 z) + (\kappa.c.);$$

$$U_z^{(1)}(r, z, t) = i \zeta U_{zk_0}^{(1)}(r, t) \exp(-i k_0 z) + (\kappa.c.);$$

$$P^{(1)}(r, z, t) = \zeta P_{k_0}^{(1)}(r, t) \exp(-i k_0 z) + (\kappa.c.);$$

$$\Phi^{(1)}(r, z, t) = 4\pi \chi \xi^{(1)}(z, t) \frac{K_0(k_0 r)}{K_0(k_0)}, \quad (37)$$

где

$$\xi_{k_0}^{(1)}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\xi}^{(n)} \exp(S_{k_0}^{(n)} t); \quad a_{\xi}^{(n)} = \frac{(D(k_0, S_{k_0}^{(n)}) - \omega^2(k_0))}{S_{k_0}^{(n)} \partial_S D(k_0, S_{k_0}^{(n)})};$$

$$U_{rk_0}^{(1)}(r, t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{(n)} \frac{I_1(k_0 r)}{I_1(k_0)} - b^{(n)} \frac{I_1(l_n r)}{I_1(l_n)} \right) \exp(S_{k_0}^{(n)} t);$$

$$U_{zk_0}^{(1)}(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{(n)} \frac{I_0(k_0 r)}{I_1(k_0)} - b^{(n)} \frac{l_n}{k_0} \frac{I_0(l_n r)}{I_1(l_n)} \right) \exp(S_{k_0}^{(n)} t);$$

$$P_{k_0}^{(1)}(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{(n)} \frac{S_{k_0}^{(n)}}{k_0} \frac{I_0(k_0 r)}{I_1(k_0)} \exp(S_n^{(k)} t);$$

$$l_n \equiv l_{k_0}^{(n)} \equiv \sqrt{k_0^2 + S_{k_0}^{(n)} \nu^{-1}};$$

$$a^{(n)} = \frac{(S_{k_0}^{(n)} + 2\nu k_0^2) \omega^2(k_0)}{S_{k_0}^{(n)} \partial_S D(k_0, S_{k_0}^{(n)})}; \quad b^{(n)} = \frac{2\nu k_0^2 \omega^2(k_0)}{S_{k_0}^{(n)} \partial_S D(k_0, S_{k_0}^{(n)})}. \quad (38)$$

Отметим, что в выражениях (38), определяющих коэффициенты разложений (37) $\xi_{k_0}^{(1)}(t)$, $U_{rk_0}^{(1)}(r, t)$, $U_{zk_0}^{(1)}(r, t)$, $P_{k_0}^{(1)}(r, t)$, суммирование ведется по бесконечному набору корней уравнения $D(k_0, S_{k_0}^{(n)}) = 0$, а $\partial_S D(k_0, S_{k_0}^{(n)})$ – это значение производной по переменной S от функции $D(k, S)$ (см. (33)), вычисленное при $k = k_0$ и $S = S_{k_0}^{(n)}$.

5. Краевая задача второго порядка малости (13) после подстановки в неё решений нулевого (11) и первого (37) порядков малости примет вид системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно величин $U_r^{(2)}$, $U_z^{(2)}$, $P^{(2)}$, $\xi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$.

Аналогично тому, как это делалось при решении задачи первого порядка, применим к полученной системе интегральное преобразование Фурье по пространственной переменной z и преобразование Лапласа по времени t (14). В целях упрощения записи для обозначения Лаплас-образов функций неоднородности будем использовать следующее выражение:

$$f(S) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-St) dt \equiv \mathfrak{F}[f(t)].$$

В результате в системе (13) от функций

$$\xi^{(2)}(z, t), U_r^{(2)}(r, z, t), U_z^{(2)}(r, z, t), P^{(2)}(r, z, t), \Phi^{(2)}(r, z, t), \Phi_S^{(2)}(t)$$

перейдем к их изображениям, сохранив прежние буквенные обозначения:

$$\xi^{(2)}(k, S), U_r^{(2)}(r, k, S), U_z^{(2)}(r, k, S),$$

$$P^{(2)}(r, k, S), \Phi^{(2)}(r, k, S), \Phi_S^{(2)}(S).$$

Учтем, что в первом порядке проекции поля скоростей жидкости $U_r^{(1)}(r, z, t)$ и $U_z^{(1)}(r, z, t)$ связаны уравнением неразрывности и, используя (37), получим

$$U_z^{(1)}(r, z, t) = -\frac{i}{k_0} \zeta \left(\partial_r U_{rk_0}^{(1)}(r, t) + \frac{1}{r} U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \right) \cdot \exp(-ik_0 z) + (к.с.).$$

Тогда систему (13) можно привести к виду

$$S U_r^{(2)} + \partial_r P^{(2)} - \nu \left[\partial_{rr} U_r^{(2)} + \frac{1}{r} \partial_r U_r^{(2)} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) U_r^{(2)} \right] = f_1(r, k, S); \quad (39)$$

$$S U_z^{(2)} - ik P^{(2)} - \nu \left[\partial_{rr} U_z^{(2)} + \frac{1}{r} \partial_r U_z^{(2)} - k^2 U_z^{(2)} \right] = i f_2(r, k, S); \quad (40)$$

$$\partial_r U_r^{(2)} + \frac{1}{r} U_r^{(2)} - ik U_z^{(2)} = 0; \quad (41)$$

$$\partial_{rr} \Phi^{(2)} + \frac{1}{r} \partial_r \Phi^{(2)} - k^2 \Phi^{(2)} = 0; \quad (42)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \left| U_r^{(2)} \right| < \infty; \quad \left| U_z^{(2)} \right| < \infty; \quad (43)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \left| \Phi^{(2)} \right| \rightarrow 0; \quad (44)$$

$$r = 1: \quad U_r^{(2)} - S \xi^{(2)} = f_3(k, S); \quad (45)$$

$$\partial_r U_z^{(2)} - ik U_z^{(2)} = i f_4(k, S); \quad (46)$$

$$-P^{(2)} + 2\nu \partial_r U_r^{(2)} + \frac{\chi}{r} \left(\partial_r \Phi^{(2)} + \frac{4\pi\chi}{r^2} \xi^{(2)} \right) - (1 - k^2) \xi^{(2)} = f_5(k, S); \quad (47)$$

$$\Phi^{(2)} - \frac{4\pi\chi}{r} \xi^{(2)} = \Phi_s^{(2)}(S) \delta(k) + f_6(k, S), \quad (48)$$

где функции неоднородности определяются выражениями

$$\begin{aligned}
f_1(r, k, S) &\equiv \sqrt{2\pi} \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \frac{1}{r} \Im \left[\left(U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \right)^2 \right] - \right. \\
&\quad \left. - \delta(k) |\zeta|^2 \Im \left[U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \left(2\partial_r \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) + \frac{1}{r} \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) \right) \right] \right\}; \\
f_2(r, k, S) &\equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{k_0} \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \left(\Im \left[U_{rk_0}^{(1)}(r, t) (r, t) \left(\partial_{rr} - \frac{1}{r} \partial_r - \frac{2}{r^2} \right) U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Im \left[\left(\partial_r U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \right)^2 \right] \right) - \delta(k) |\zeta|^2 \Im \left[U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r \right) \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) \right] \right\}; \\
f_3(k, S) &\equiv -\sqrt{2\pi} \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) (2\partial_r + 1) U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \Big|_{r=1} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \delta(k) |\zeta|^2 \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) \Big|_{r=1} \right] \right\}; \\
f_4(k, S) &\equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{k_0} \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) (\partial_{rrr} + \partial_{rr} + (5k_0^2 - 2)\partial_r + 2(k_0^2 + 1)) U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \Big|_{r=1} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \delta(k) |\zeta|^2 \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) (\partial_{rrr} + \partial_{rr} - (3k_0^2 + 2)\partial_r - 2(k_0^2 - 1)) \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) \Big|_{r=1} \right] \right\}; \\
f_5(k, S) &\equiv \sqrt{2\pi} \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \left(-2\nu \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) (2\partial_{rr} + \partial_r + (k_0^2 - 1)) U_{rk_0}^{(1)}(r, t) \Big|_{r=1} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(2\pi\chi^2 (H(k_0)^2 - 4H(k_0) - 3k_0^2 + 2) - \frac{1}{2}(2 + k_0^2) \right) \Im \left[\left(\xi_{k_0}^{(1)} \right)^2 \right] + \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)} \partial_r P_{k_0}^{(1)}(r, t) \Big|_{r=1} \right] \right) + \\
&\quad \left. + \delta(k) |\zeta|^2 \left(2\nu \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)}(t) (\partial_r + (k_0^2 - 1)) \overline{U_{rk_0}^{(1)}}(r, t) \Big|_{r=1} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left(2\pi\chi^2 \left(H(k_0)^2 - 4H(k_0) - k_0^2 + 2 \right) - \frac{1}{2}(2 - k_0^2) \right) \Im \left[\left| \xi_{k_0}^{(1)} \right|^2 \right] + \Im \left[\xi_{k_0}^{(1)} \partial_r \overline{P_{k_0}^{(1)}}(r, t) \Big|_{r=1} \right] \Bigg\}$$

$$f_6(k, S) \equiv \sqrt{2\pi} 2\pi\chi (2H(k_0) - 1) \left\{ \delta(k - 2k_0) \zeta^2 \Im \left[\left(\xi_{k_0}^{(1)} \right)^2 \right] + \delta(k) |\zeta|^2 \Im \left[\left| \xi_{k_0}^{(1)} \right|^2 \right] \right\}; \quad (49)$$

Решение системы (39) – (48) начнем с электрической части задачи (42), (44), (48), определяющей потенциал поверхности и потенциал электростатического поля в окрестности струи:

$$\Phi_S^{(2)}(S) = -4\pi\chi \sqrt{2\pi} |\zeta|^2 (H(k_0) - 1) \Im \left[\left| \xi_{k_0}^{(1)}(t) \right|^2 \right]; \quad (50)$$

$$\Phi^{(2)}(r, k, S) = (1 - \delta(k)) \left(4\pi\chi \xi^{(2)}(k, S) + f_6(k, S) \right) \frac{K_0(kr)}{K_0(k)}; \quad (51)$$

Из уравнения неразрывности (41) выразим проекцию скорости $U_z^{(2)}(r, k, S)$

$$U_z^{(2)} = -\frac{i}{k} \left(\partial_r U_r^{(2)} + \frac{1}{r} U_r^{(2)} \right); \quad (52)$$

подставим в (40), откуда для $P^{(2)}(r, k, S)$ получим

$$P^{(2)} = -\frac{1}{k} f_2 - \frac{S}{k^2} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r^{(2)} +$$

$$+ \frac{\nu}{k^2} \left(\partial_{rrr} + \frac{2}{r} \partial_{rr} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \partial_r - \frac{1}{r} \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right) U_r^{(2)}. \quad (53)$$

Наконец, подставляя выражения для $U_z^{(2)}(r, k, S)$ и $P^{(2)}(r, k, S)$ в уравнение (39), получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка для отыскания функции $U_r^{(2)}(r, k, S)$:

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r - \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right)\right)\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r - \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{S}{\nu}\right)U_r^{(2)} = \frac{k^2}{\nu}\left(f_1 + \frac{1}{k}\partial_r f_2\right); \quad (54)$$

Однородное уравнение (54) имеет четыре линейно независимых решения:

$$U_r^{(2)} = I_1(kr); \quad U_r^{(2)} = K_1(kr);$$

$$U_r^{(2)} = I_1(lr); \quad U_r^{(2)} = K_1(lr), \quad (55)$$

где $l^2 \equiv k^2 + S\nu^{-1}$; $I_1(x)$ и $K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Определитель Вронского системы (55) записывается компактно

$$W(I_1(kr), K_1(kr), I_1(lr), K_1(lr)) = \frac{S^2}{r^2 \nu^2},$$

а частное решение уравнения (54), удовлетворяющее нулевым граничным условиям, можно выписать в виде

$$U_r^{(2)*}(r, k, S) = -\frac{k^2}{S} \int_0^r [I_1(kr)K_1(k\tau) - K_1(kr)I_1(k\tau) +$$

$$+ I_1(lr)K_1(l\tau) - K_1(lr)I_1(l\tau)] \left(f_1(\tau, k, S) + \frac{1}{k} \partial_r f_2(\tau, k, S) \right) \tau d\tau. \quad (56)$$

Таким образом, общее решение уравнения (54) с учетом условий ограниченности (43) будет иметь вид

$$U_r^{(2)}(r, k, S) = A(k, S) I_1(kr) + B(k, S) K_1(kr) + U_r^{(2)*}(r, k, S), \quad (57)$$

где $A(k, S)$, $B(k, S)$ – произвольные постоянные.

Подставляя (57) в (52) и (53), найдем неизвестные функции $U_z^{(2)}(r, k, S)$ и $P^{(2)}(r, k, S)$:

$$U_z^{(2)} = -\frac{i}{k} \left(A(k, S) k I_0(k) + B(k, S) l I_0(l) \right) + \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) U_r^{(2)*}; \quad (58)$$

$$P^{(2)}(r, k, S) = -A(S) \frac{S}{k} I_0(kr) + \\ + \frac{\nu}{k^2} \left(\partial_{rrr} + \frac{2}{r} \partial_{rr} - \left(l^2 + \frac{1}{r^2} \right) \partial_r - \frac{1}{r} \left(l^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right) U_r^{(2)*} - \frac{1}{k} f_2. \quad (59)$$

Граничные условия (45) – (47) после подстановки в них решений (51), (57) – (59) переписутся в виде

$$A(k, S) I_1(k) + B(k, S) I_1(l) - S \xi^{(2)}(k, S) = f_3(k, S) - U_r^{(2)*}(r, k, S) \Big|_{r=1} \quad (60)$$

$$A(k, S) 2k^2 I_1(k) + B(k, S) (l^2 + k^2) I_1(l) = -k f_4(k, S) - \\ - \left(\partial_{rr} + \partial_r + (k^2 - 1) \right) U_r^{(2)*}(r, k, S) \Big|_{r=1}; \quad (61)$$

$$A(k, S) \left(\frac{1}{k} (S + 2\nu k^2) I_0(k) - 2\nu I_1(k) \right) + B(k, S) 2\nu (l I_0(l) - I_1(l)) + \\ + \xi^{(2)}(k, S) (4\pi\chi^2 (1 - H(k)) + k^2 - 1) = \\ = f_5(k, S) + \chi H(k) f_6(k, S) - \frac{1}{k} f_2(r, k, S) \Big|_{r=1} + \\ + \frac{\nu}{k^2} \left(\partial_{rrr} + 2\partial_{rr} - (l^2 + 2k^2 + 1) \partial_r - (l^2 - 1) \right) U_r^{(2)*}(r, k, S) \Big|_{r=1}. \quad (62)$$

Система уравнений (60) – (62) представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно величин $A(k, S)$, $B(k, S)$, $\xi^{(2)}(k, S)$. Подставляя в эту систему решение задачи первого порядка малости (37), (38), после громоздких вычислений найдем выражение для коэффициента $\xi^{(2)}(k, S)$ в виде

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}(k, S) &= \delta(k - 2k_0) \sqrt{2\pi} \zeta^2 \xi_1^{(2)}(k, S) - \delta(k) \sqrt{2\pi} |\zeta|^2 \xi_2^{(2)}(k, S) = \\ &= \delta(k - 2k_0) \sqrt{2\pi} \zeta^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\beta_{nm}^{(1)}(k, S)}{(S - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)}) S^2 D(k, S)} - \\ &\quad - \delta(k) \sqrt{2\pi} |\zeta|^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \frac{\beta_{nm}^{(2)}(k, S)}{(S - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)}) S^2 D(k, S)}; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \beta_{nm}^{(1)}(k, S) &= \int_0^1 F_{nm}^{(1)}(r, k) \{ [T_1(k, S|k) I_0(k) - T_2(k, S|k) I_1(k)] K_1(kr) + \\ &\quad + [T_1(k, S|k) K_0(k) + T_2(k, S|k) K_1(k)] I_1(kr) - \\ &\quad - [T_1(k, S|l) I_0(l) - T_2(k, S|l) I_1(l)] K_1(lr) - \\ &\quad - [T_1(k, S|l) K_0(l) + T_2(k, S|l) K_1(l)] I_1(lr) \} r dr - \\ &- a_{\xi}^{(n)} \left[a^{(m)} (Y_1(k, S|k_0) - S^2 S_{k_0}^{(m)} G(k)) - b^{(m)} Y_1(k, S|l_m) \right] + a_{\xi}^{(n)} a_{\xi}^{(m)} Y_2(k) - \\ &- a^{(n)} a^{(m)} Y_3(k, S|k_0, k_0, 0, 0) + a^{(n)} b^{(m)} Y_3(k, S|l_m, k_0, \eta_m, 0) + \\ &+ a^{(m)} b^{(n)} Y_3(k, S|k_0, l_n, 0, \eta_n) - b^{(n)} b^{(m)} Y_3(k, S|l_m, l_n, \eta_m, \eta_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{nm}^{(2)}(k, S) = & \int_0^1 F_{nm}^{(2)}(r, k) \{ [T_1(k, S|k)I_0(k) - T_2(k, S|k)I_1(k)] K_1(kr) + \\
& + [T_1(k, S|k)K_0(k) + T_2(k, S|k)K_1(k)] I_1(kr) - \\
& - [T_1(k, S|l)I_0(l) - T_2(k, S|l)I_1(l)] K_1(lr) - \\
& - [T_1(k, S|l)K_0(l) + T_2(k, S|l)K_1(l)] I_1(lr) \} r dr + \\
& + a_{\xi}^{(n)} \left[\overline{a^{(m)}} \left(V_1(k, S|k_0) - S^2 \overline{S_{k_0}^{(m)}} G(k) \right) - \overline{b^{(m)}} V_1(k, S|\overline{l_m}) \right] - a_{\xi}^{(n)} \overline{a_{\xi}^{(m)}} V_2(k) - \\
& - a^{(n)} \overline{a^{(m)}} V_3(k, S|k_0, k_0, 0) + a^{(n)} \overline{b^{(m)}} V_3(k, S|\overline{l_m}, k_0, \overline{\eta_m}) + \\
& + b^{(n)} \overline{a^{(m)}} V_3(k, S|k_0, l_n, \eta_n) - b^{(n)} \overline{b^{(m)}} V_3(k, S|\overline{l_m}, l_n, \overline{\eta_m} + \eta_n); \\
F_{nm}^{(1)}(r, k) \equiv & I_1(k_0 r) \frac{a^{(n)}}{I_1(k_0)} \left[\frac{a^{(m)}}{I_1(k_0)} k_0 (k - 2k_0) \frac{1}{r} I_1(k_0 r) - \right. \\
& \left. - \frac{b^{(m)}}{I_1(l_m)} \left(l_m \eta_m I_0(l_m r) - (3\eta_m - k_0(k - 2k_0)) \frac{1}{r} I_1(l_m r) \right) \right] + \\
& + I_1(l_n r) \frac{b^{(n)}}{I_1(l_n)} \left[\frac{a^{(m)}}{I_1(k_0)} \left(k_0 \eta_n I_0(k_0 r) - (\eta_n + k_0(k - 2k_0)) \frac{1}{r} I_1(k_0 r) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{b^{(m)}}{I_1(l_m)} \left(l_m (\eta_n - \eta_m) I_0(l_m r) - (\eta_n - 3\eta_m + k_0(k - 2k_0)) \frac{1}{r} I_1(l_m r) \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{nm}^{(2)}(r, k) \equiv & I_1(k_0 r) \frac{a^{(n)}}{I_1(k_0)} \left[\frac{\overline{a^{(m)}}}{I_1(k_0)} \left(2k_0 \left(k_0(k + k_0) + \frac{1}{r^2} \right) I_0(k_0 r) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(k_0(k + 2k_0) + \frac{4}{r^2} \right) \frac{1}{r} I_1(k_0 r) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{b^{(m)}}}{I_1(\overline{l}_m)} \left(\overline{l}_m \left(\overline{\eta}_m + 2k_0(k + k_0) + \frac{2}{r^2} \right) I_0(\overline{l}_m r) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\overline{\eta}_m + k_0(k + 2k_0) + \frac{4}{r^2} \right) \frac{1}{r} I_1(\overline{l}_m r) \right) \right] - \\
& - I_1(l_n r) \frac{b^{(n)}}{I_1(l_n)} \left[\frac{\overline{a^{(m)}}}{I_1(k_0)} \left(k_0 \left(\eta_n + 2k_0(k + k_0) + \frac{2}{r^2} \right) I_0(k_0 r) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\eta_n + k_0(k + 2k_0) + \frac{4}{r^2} \right) \frac{1}{r} I_1(k_0 r) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{b^{(m)}}}{I_1(\overline{l}_m)} \left(\overline{l}_m \left(\eta_n + \overline{\eta}_m + 2k_0(k + k_0) + \frac{2}{r^2} \right) I_0(\overline{l}_m r) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\eta_n + \overline{\eta}_m + k_0(k + 2k_0) + \frac{4}{r^2} \right) \frac{1}{r} I_1(\overline{l}_m r) \right) \right]; \quad \eta_n \equiv S_{k_0}^{(n)} / \nu;
\end{aligned}$$

$$T_1(k, S|x) \equiv x S \left[S + 3\nu(k^2 + 1) - \nu(3 + x^2) G(k) \right];$$

$$T_2(k, S|x) \equiv g_1(k, S) + (2 + x^2) g_2(k, S) - 2(3 + x^2) \nu S G(k);$$

$$g_1(k, S) \equiv S^2(k^2 + 1 - G(k)) + \nu S \left[k^4 + k^2 + 1 - (3k^2 - 1)G(k) \right] + \\ + 2\nu k^2(k^2 + 2)(S + \nu k^2)(1 - G(k)G(l)^{-1});$$

$$g_2(k, S) \equiv \nu S(k^2 + 2) - 2\nu k^2(S + \nu k^2)(1 - G(k)G(l)^{-1});$$

$$Y_1(k, S|x) \equiv \frac{S}{k_0^2} \frac{x^2}{G(x)} \left[2S^2 k_0 + \nu S(k(x^2 + 5k_0^2 - 2) - 2k_0 G(k)) - \right. \\ \left. - 2\nu k(x^2 + 5k_0^2 - 2 - 4kk_0)(S + \nu k^2)(1 - G(k)G(l)^{-1}) \right] + \\ + \frac{1}{k_0} \left[S^2 k_0 + \nu S(k(x^2 + 3k_0^2 - 4) + 2k_0(2x^2 + k_0^2 + 1)G(k)) - \right. \\ \left. - 2\nu k(x^2 + 3k_0^2 - 2kk_0 - 4)(S + \nu k^2)(1 - G(k)G(l)^{-1}) \right];$$

$$Y_2(k) \equiv \frac{1}{2} S^2 G(k) \left[4\pi \chi^2 (H(k_0)(H(k_0) - 4) + H(k)(2H(k_0) - 1) - 3k_0^2 + 2) - (2 + k_0^2) \right]$$

$$Y_3(k, S|x, y, z, w) \equiv \frac{1}{k k_0 G(x) G(y)} \left\{ S^2 (x^2 G(y)(G(x) - 1) + y^2 (G(x) - x^2)) + \right. \\ \left. + \left[(\nu S G(k) y^2 + g_2(k, S) G(y)) \left(x^2 (z - w) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - G(x) (3z - w + 2k_0^2 - k k_0) \right) \right] - \nu S G(k) G(y) \left(x^2 (5z - 3w + 2k_0^2 - k k_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - G(x) (3z - w + 2k_0^2 - k k_0) \right) \right\}$$

$$-G(x)\left(z(12+x^2)-w(4+x^2)+4(2k_0^2-kk_0)\right)\Bigg]J(k,l)\Bigg\};$$

$$\begin{aligned} V_1(k,S|x) \equiv & \frac{\nu S}{k_0} \frac{x^2}{G(x)} \left[2Sk_0 G(k) - k(x^2 - 3k_0^2 - 2) \left(S - 2(S + \nu k^2) (1 - G(k)G(l)^{-1}) \right) \right] + \\ & + \frac{1}{k_0} \left[S^2 k_0 - \nu S \left(2k_0 (k_0^2 - 1) G(k) + k(x^2 - k_0^2 - 4) \right) + \right. \\ & \left. + 2\nu k (x^2 - k_0^2 + 2kk_0 - 4) (S + \nu k^2) (1 - G(k)G(l)^{-1}) \right]; \end{aligned}$$

$$V_2(k) \equiv \frac{1}{2} S^2 G(k) \left[4\pi \chi^2 (H(k_0)(H(k_0) - 4) + H(k)(2H(k_0) - 1) - k_0^2 + 2) - (2 - k_0^2) \right]$$

$$\begin{aligned} V_3(k, S|x, y, z) \equiv & \frac{1}{k k_0 G(x) G(y)} \left\{ S^2 G(k) (x^2 + 1) G(x) G(y) + \right. \\ & + \left[(\nu S G(k) y^2 + g_2(k, S) G(y)) (x^2 (z + 2k_0^2 + 2kk_0 + 2) - \right. \\ & - G(x) (z + 2k_0^2 + kk_0 + 4)) - \nu S G(k) G(y) (x^2 (3z + 6k_0^2 + 5kk_0 + 12) - \\ & \left. \left. - G(x) (z(4 + z^2) + 2(x^2(k_0^2 + 1) + 4k_0^2) + 2kk_0(2 + x^2) + 24) \right) \right] J(k, l) \Bigg\}; \end{aligned}$$

$$J(k, l) \equiv k(I_0(k)K_1(k) + I_1(k)K_0(k)) - l(I_0(l)K_1(l) + I_1(l)K_0(l));$$

Обратное преобразование Фурье для выражения (63) приведёт к результату

$$\xi^{(2)}(z, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{(2)}(k, S) e^{-ikz} dk =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(k-2k_0) \sqrt{2\pi} \zeta^2 \xi_1^{(2)}(k, S) - \delta(k) \sqrt{2\pi} |\zeta|^2 \xi_2^{(2)}(k, S) \right] e^{-ikz} dk = \\
&= \zeta^2 \xi_1^{(2)}(2k_0, S) e^{-i2k_0 z} - |\zeta|^2 \xi_2^{(2)}(k=0, S). \quad (64)
\end{aligned}$$

Из вида выражения (63) с учётом (64) видно, что функция $\xi_1^{(2)}(2k_0, S)$ имеет особую точку $S=0$, являющуюся полюсом второго порядка, бесконечное счетное число особых точек, которые определяются из условий $D(2k_0, S)=0$, $S - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)} = 0$. Функция $\xi_2^{(2)}(k=0, S)$ имеет бесконечное счетное число особых точек, определяющихся из условия и $S - S_{k_0}^{(n)} - \overline{S_{k_0}^{(m)}} = 0$ и являющихся простыми полюсами, а точка $S=0$ является для $\xi_2^{(2)}(k=0, S)$ полюсом четвёртого порядка (т.к. $D(k=0, S) = S^2$). Поскольку при $S \rightarrow \infty$ выражение (63) стремится к нулю, то в выражении для обратного преобразования Лапласа можно воспользоваться леммой Жордана для левой полуплоскости и теоремой о вычетах. Тогда формула обращения примет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \tilde{f}(S) \exp(S \cdot t) dS = \sum_{j=1}^{+\infty} \text{res} \left(\tilde{f}(S_n^{(j)}) \cdot \exp(S_n^{(j)} t) \right), \quad (65)$$

где суммирование ведется по корням уравнений $D(2k_0, S)=0$, $S - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)} = 0$, $S - S_{k_0}^{(n)} - \overline{S_{k_0}^{(m)}} = 0$ и $S=0$.

Применяя формулу (65) к (63) с учётом (64) для коэффициента $\xi^{(2)}(z, t)$, получим

$$\begin{aligned}
\xi^{(2)}(z, t) = & \zeta^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left\{ - \frac{\partial_S \beta_{nm}^{(1)}(k=0, S) \Big|_{S=0}}{(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)}) \omega^2(2k_0)} + \right. \\
& + \frac{\beta_{nm}^{(1)}(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})}{(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})^2 D(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})} \exp \left[(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)}) t \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^{(1)}(2k_0, S_{2k_0}^{(j)})}{(S_{2k_0}^{(j)} - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)})(S_{2k_0}^{(j)})^2 (\partial_S D(2k_0, S))|_{S=S_{2k_0}^{(j)}}} \exp[S_{2k_0}^{(j)} t] \Bigg\} - \\
& - |\zeta|^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{6} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\partial^3}{\partial S^3} \left(\frac{\beta_{nm}^{(2)}(k=0, S) \exp(S t)}{(S - S_{k_0}^{(n)} - \overline{S_{k_0}^{(m)}})} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\beta_{nm}^{(2)}(k=0, S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}})}{(S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}})^4} \exp\left[\left(S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}}\right)t\right] \right\}, \quad (66)
\end{aligned}$$

где $S_{2k_0}^{(j)}$ – корень дисперсионного уравнения $D(2k_0, S) = 0$.

6. Подставляя выписанное выражение для $\xi^{(2)}(z, t)$ и коэффициент $\xi^{(1)}(z, t)$, который определяется выражением (37), (38), в (1) с учётом (10), можно найти явный вид функции $\xi(z, t)$ и определить форму образующей нелинейно осесимметрично осциллирующей струи вязкой несжимаемой электропроводной жидкости как функцию времени и координаты z :

$$\begin{aligned}
r(z, t) &= 1 + \varepsilon \xi^{(1)}(z, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(z, t) = \\
&= 1 + \varepsilon \zeta \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\xi}^{(n)} \exp(S_{k_0}^{(n)} t) \right] \exp(-ik_0 z) + \\
&+ \varepsilon^2 \zeta^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left\{ - \frac{\partial_S \beta_{nm}^{(1)}(k=0, S)|_{S=0}}{(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)}) \omega^2(2k_0)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_{nm}^{(1)}(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})}{(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})^2 D(2k_0, S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})} \exp\left[(S_{k_0}^{(n)} + S_{k_0}^{(m)})t\right] + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{nm}^{(1)}(2k_0, S_{2k_0}^{(j)})}{(S_{2k_0}^{(j)} - S_{k_0}^{(n)} - S_{k_0}^{(m)})(S_{2k_0}^{(j)})^2 (\partial_S D(2k_0, S))|_{S=S_{2k_0}^{(j)}}} \exp[S_{2k_0}^{(j)} t] \Bigg\} - \\
& - \varepsilon^2 |\zeta|^2 \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{6} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\partial^3}{\partial S^3} \left(\frac{\beta_{nm}^{(2)}(k=0, S) \exp(St)}{(S - S_{k_0}^{(n)} - \overline{S_{k_0}^{(m)}})} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\beta_{nm}^{(2)}(k=0, S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}})}{(S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}})^4} \exp\left[(S_{k_0}^{(n)} + \overline{S_{k_0}^{(m)}})t\right] \right\}. \quad (67)
\end{aligned}$$

Таким образом, найдено корректное аналитическое асимптотическое решение во втором порядке малости для формы нелинейно-осциллирующей поверхностно заряженной струи электропроводной вязкой несжимаемой жидкости.

Литература

1. Френкель, Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме / Я.И. Френкель // ЖЭТФ. – 1936. – Т. 6, № 4. – С. 348–350.
2. Tonks, L.A. Theory of liquid surface rupture by uniform electric field / L.A. Tonks // Phys. Rev. – 1935. – V. 48. – P. 562–568.
3. Taylor, G.I. The stability of horizontal fluid interface in a vertical electric field / G.I. Taylor, A.D. McEwan // J. Fluid Mech. – 1965. – V. 22, № 1. – P. 1–15
4. Габович, М.Д. Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле / М.Д. Габович, В.Я. Порицкий // Письма в ЖЭТФ. – 1981. – Т. 33, вып. 6. – С. 320–324.
5. Габович, М.Д. Жидкометаллические источники ионов (обзор) / М.Д. Габович // УФН. – 1983. – Т. 140, № 1. – С. 137–151.
6. Rayleigh, Lord. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity / Lord. Rayleigh // Phil. Mag. – 1882. – V. 14. – P. 184–186.
7. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, – 1992. – 662 с.
8. Miskovsky, N.M. Effects of viscosity on capillary wave instabilities of planar liquid-metal surface in an electric field / N.M. Miskovsky, P.H. Cutler, M. Chug // J. Appl. Phys. – 1990. – V. 68, № 4. – P. 1475–1482
9. Neron de Surgy. Linear growth of instabilities on a liquid metal under normal electric field / Neron de Surgy, J.P. Chabrierie, O. Denoux, J.E. Wesfreid // J. Phys. II. France. – 1993. – V. 3, № 8. – P. 1201–1225.
10. Ширяева, С.О. Электростатическая неустойчивость заряженной поверхности слоя жидкости конечной толщины / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, Д.Ф. Белоножко // ЭОМ. – 1996. – № 3, 4. – С. 71–73.
11. Белоножко, Д.Ф. Эффект влияния заряда на структуру спектра капиллярных волн в тонком слое вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, М.И. Муничев, С.О. Ширяева // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22, вып. 10. – С. 84–89.
12. Григорьев, А.И. Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса-Френкеля слоя жидкости конечной толщины / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов, Д.Ф. Белоножко // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, вып. 8. – С. 25–31.

13. Белоножко, Д.Ф. Зависимость от волнового числа критических условий неустойчивости заряженной пленки жидкости в поле флуктуационных сил / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, М.И. Муничев // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 9. – С. 66–70.
14. Corteiezzi, L. Small-amplitude waves on the surface of layer of viscous liquid / L. Corteiezzi, A. Prosperety // J. Quart. Appl. Math. – 1981. – V. 38, № 4. – P. 375–389.
15. Левич, В.Г. Гашение волн поверхностно-активными веществами I / В.Г. Левич // ЖЭТФ. – 1940. – Т. 10, № 11. – С. 1296–1304.
16. Левич, В.Г. Гашение волн поверхностно-активными веществами II / В.Г. Левич // ЖЭТФ. – 1941. – Т. 11, № 2–3. – С. 340–345.
17. Левич, В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г. Левич. – М.: Гос. изд. физ. мат. лит, 1959. – 699 с.
18. Dorrestein, R. General linearized theory of the surface films on water ripples / R. Dorrestein // Proc. Konicl. Ned. Akad. Wet. – 1951. – V. B54, № 4. – P. 350–356.
19. Van Den Tempel. Damping of waves by surface-active materials / Tempel Van Den, Riet. Van De // J. Chim. Phys. – 1965. – V. 42. – P. 2769–2777.
20. Lucassen-Reynders, E.N. Properties of capillary waves / E.N. Lucassen-Reynders, J. Lucassen // Adv. Colloid Interface Sci. – 1969. – V. 2. – № 4. P. 347–395.
21. Cenicerros, H.D. The effect of surfactants on the formation and evolution of capillary waves / H.D. Cenicerros // Phys. of fluids. – 2003. – V. 15, № 1. – P. 245–256.
22. Ермаков, С.А. О резонансном затухании гравитационно-капиллярных волн на воде, покрытой поверхностно-активной пленкой / С.А. Ермаков // Изв. РАН. ФАО. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 691–696.
23. Рабинович, Л.М. О влиянии растворимых поверхностно-активных веществ на устойчивость жидких пленок и струй / Л.М. Рабинович // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1978. – № 6. – С. 20–33.
24. Неволин, В.Н. Влияние растворимых поверхностно-активных веществ на диспергирование жидкостей / В.Н. Неволин // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1981. – № 5. – С. 160–164.
25. Белоножко, Д.Ф. О влиянии поверхностно-активных веществ на закономерности развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22, вып. 15. – С. 61–64.
26. Белоножко, Д.Ф. О минимальной для реализации эффекта гашения капиллярных волн концентрации поверхностно-активных ве-

ществ / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 6. – С. 74–79.

27. Белоножко, Д.Ф. О неустойчивости заряженной свободной поверхности растворов инактивных веществ / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 16. – С. 26–31.

28. Ширяева, С.О. Влияние упругости и динамического поверхностного натяжения на спектр волновых движений заряженной поверхности жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, № 16. – С. 32–37.

29. Ширяева, С.О. Об особенностях капиллярных движений растворов поверхностно-активных веществ с заряженной свободной поверхностью / С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 1998. – Т. 68, вып. 2. – С. 22–29.

30. Melcher J.R. Field-coupled surface waves. A comparative study of surface coupled electrohydrodynamics and magnetohydrodynamics systems. – Cambridge, 1963. – 190 p.

31. Melcher, J.R. Interfacial relaxation overstability in tangential electric field instability / J.R. Melcher, W.J. Schwarz // Phys. Fluids. – 1968. – V. 11, № 12. – P. 2604–2616.

32. Melcher, J.R. Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability / J.R. Melcher, C.V. Smith // Phys. Fluids. – 1969. – V. 12, № 4. – P. 778–790.

33. Ширяева, С.О. Эффект динамического поверхностного натяжения и капиллярное волновое движение на заряженной поверхности жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, № 10. – С. 31–46.

34. Белоножко, Д.Ф. Об инкременте неустойчивости заряженной границы раздела несмешивающихся электропроводных жидкостей / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, С.И. Щукин // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 16. – С. 38–40.

35. Саранин, В.А. Колебательная неустойчивость границы раздела проводящих жидкостей в нормальном электрическом поле / В.А. Саранин, А.Н. Жаров, Д.Ф. Белоножко // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 16. – С. 41–44.

36. Григорьев, А.И. О колебательной неустойчивости заряженной границы раздела несмешивающихся электропроводных жидкостей / А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, С.И. Щукин // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, вып. 21. – С. 32–36.

37. Белоножко, Д.Ф. Неустойчивость заряженной границы раздела двух несмешивающихся вязких жидкостей с учетом релаксации за-

ряда / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1998. – Т. 68, вып. 9. – С. 13–19.

38. Белоножко, Д.Ф. Неустойчивость плоской границы раздела двух несмешивающихся проводящих вязких жидкостей в нормальном электрическом поле / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // Изв. РАН МЖГ. – 1998. – № 6. – С. 116–123.

39. Sapir, M. Reduction of the Rayleigh-Taylor instability effects on ICF targets via a voltage-shaped ion beam / M. Sapir, D. Havazelet // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1985. – V. 18. – P. 41–46.

40. Григорьев, А.И. Неустойчивость заряженной плоской поверхности тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1994. – Т. 64, вып. 9. – С. 23–34.

41. Белоножко, Д.Ф. Взаимодействие релаксационных волн с волнами перераспределяющегося по свободной поверхности поверхностно-активного вещества / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, Ю.Д. Рахманова // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, № 18. – С. 25–31.

42. Григорьев, А.И. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости / А.И. Григорьев, Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, вып. 7. – С. 15–22.

43. Белоножко, Д.Ф. Неустойчивость напряженной поверхности сильно вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, вып. 22. – С. 80–85.

44. Белоножко, Д.Ф. Автоколебательная неустойчивость свободной поверхности вязко-упругой среды / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, вып. 3. – С. 80–85.

45. Белоножко, Д.Ф. О взаимодействии капиллярных волн на заряженном тангенциальном разрыве поля скоростей / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26, вып. 11. – С. 10–17.

46. Белоножко, Д.Ф. Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 11. – С. 25–33.

47. Белоножко, Д.Ф. О формировании волнового микрорельефа на поверхности полупроводника при распыливании его сильно точным ионным пучком / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.С. Голованов // ЭОМ. – 2000. – № 6. – С. 26–30.

48. Ширяева, С.О. О влиянии заряда на формирование волнового микрорельефа на поверхности вязкоупругой среды / С.О. Ширяева,

Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Письма в ЖТФ. – 2000. – Т. 26. – № 21. – С. 12–20.

49. Lick, W. Nonlinear wave propagation in fluids / W. Lick // Ann. Rev. of Fluid Mech. – 1970. – V. 2. – P. 113–136.

50. Hammack, J.L. Resonant interactions among surface water waves / J.L. Hammack, D.M. Henderson // Ann. Rev. of Fluid Mech. – 1993. – V. 25. – P. 55–97.

51. Dias, F. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves / F. Dias, C. Kharif // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1999. – V. 31. – P. 301–346.

52. Wilton, J.R. On Deep water waves / J.R. Wilton // Phil. Mag. S. 6. – 1914. V. 27, № 158. – P. 395–394.

53. Wilton, J.R. On ripples / J.R. Wilton // Phil. Mag. S.6. – 1915. – V. 29, № 173. – P. 689–700.

54. Stoks, G.G. On the theory of oscillatory waves // G.G. Stoks // Camb. Phil. Soc. Trans. – V. 8. – P. 441–455

55. Bretherton, F.P. Resonant interaction between waves. The case of discrete oscillations / F.P. Bretherton // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 20. Pt. 3. – P. 457–479.

56. Simons, W.F. A variational method for weak resonant wave interactions / W.F. Simons // Proc. Roy. Soc. Ser.A. – V. 309. – P. 551–575.

57. McGoldrick, L.F. Resonant interactions among capillary-gravity waves / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1965. – V. 21. Pt. 2. – P. 305–331.

58. McGoldrick, L.F. An experiment on second-order capillary gravity resonant wave interactions / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 40. Pt. 2. – P. 251–271.

59. McGoldrick, L.F. On Wilton's ripples: special case of resonant interactions / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42. Pt. 1. – P. 193–200.

60. McGoldrick, L.F. On the rippling of small waves: a harmonic non-linear nearly resonant interaction / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1972. – V. 52. Pt. 4. – P. 723–751.

61. Nayfeh, A.H. Triple- and quintuple-dimpled wave profiles in deep water / A.H. Nayfeh // The phys. of fluids. – 1970. – V. 13, № 3. – P. 545–550.

62. Nayfeh, A.H. Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves / A.H. Nayfeh // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 48. Pt. 2. – P. 385–395.

63. Nayfeh, A.H. The method of multiple scale and non-linear dispersive waves / A.H. Nayfeh // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 48. Pt. 3. – P. 463–475.

64. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – Л: ГТТИ, 1947. – 928 с.
65. Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе ; под ред. И.А. Кибеля. – Л.: ГТТИ, 1963. – Ч. 1. – 584 с.
66. Стокер Дж. Волны на воде / Дж. Стокер. – М.: ИЛ, 1959. – 617 с.
67. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
68. Ле Меоте, Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде / Б. Ле Меоте. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 368 с.
69. Юэн, Г. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде / Г. Юэн, Б. Лэйк. М.: Мир, 1987. 179 с.
70. Захаров, В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости / В.Е. Захаров // ПМТФ. – 1968. – № 2. – С. 86-94.
71. Craper, G.D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude / G.D. Craper // J. Fluid Mech. – 1957. – V. 2. – P. 532–540.
72. Ильичев, А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики / А.Т. Ильичев. – М.: Физматлит, 2003. – 256 с.
73. Демехин, Е.А. О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости / Е.А. Демехин, М.А. Каплан, В.Я. Шкадов // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1987. – № 6. – С. 73–81.
74. Сысоев, Г.М. Развитие доминирующих волн из малых возмущений в стекающих пленках вязкой жидкости / Г.М. Сысоев, В.Я. Шкадов // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – № 6. – С. 30–41.
75. Gonsalez, A. Kortwag-de Vries-Burgeres equation for surface waves in nonideal conducting liquids / A. Gonsalez, A. Castellanos // Phys. Rev. E. – 1994. – V. 49, № 4. – P. 2935–2940.
76. Gonsalez, A. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane / A. Gonsalez, A. Castellanos // Phys. Rev. E. – 1996. – V. 53, № 4. – P. 3573–3578.
77. Жакин, А.И. Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности / А.И. Жакин // Изв. АН СССР. – 1984. – № 3. – С. 94–102.
78. Зубарев, Н.М. Точное решение задачи о равновесной конфигурации заряженной поверхности жидкого металла / Н.М. Зубарев // ЖЭТФ. – 1999. – Т. 116, вып. 6(12). – С. 1990–2005.

79. Зубарев, Н.М. Динамика свободной поверхности проводящей жидкости в околоскритической электрическом поле / Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, вып. 7. – С. 21–29.
80. Michael, D.H. Note on electrohydrodynamic stability / D.H. Michael // Quart. Of Appl. Math. – 1970. – V. 28, № 1. – P. 139–143.
81. Michael, D.H. Nonlinear effects in electrohydrodynamic surface wave propagation / D.H. Michael // Quart. Of Appl. Math. – 1977. – V. 35. – P. 139–143.
82. Michael, D.H. Nonlinear effects in electrohydrodynamic surface wave propagation / D.H. Michael // Quart. Of Appl. Math. – 1977. – V. 35. – P. 345–355.
83. Bhimsen, K.Sh. Nonlinear stability of surface waves in electrohydrodynamics / K. Sh. Bhimsen // Quart. Of Appl. Math. – 1979. – V. 35. – P. 423–427.
84. Rama Kant, Jindia R.K., Malik S.K. Finite amplitude surface waves in electrohydrodynamics / Kant Rama, R.K. Jindia, S.K. Malik // Quart. Of Appl. Math. – 1981. – V. 39. – P. 23–24.
85. Harison, W.J. The influence of viscosity and capillarity no waves of finite amplitude / W.J. Harison // Proc. Lon. Math. Soc. Ser 2. – 1908. – V. 7. – P. 107–121.
86. Fedorov, A.V. Nonlinear gravity-capillary waves with forcing and dissipation / A.V. Fedorov, W.K. Melvil // J. Fluid Mech. – 1998. – V. 354. – P. 1–42.
87. Fedorov, A.V. An experimental and numerical study of parasitic capillary waves / A.V. Fedorov, W.K. Melvil, A. Rozenberg // Physics of fluids. – 1998. – V. 10, № 6. – P. 1315–1323.
88. Белоножко, Д.Ф. О внутреннем нелинейном резонансе капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ПЖТФ. – 2003. – Т. 29, вып. 8. – С. 1–7.
89. Белоножко, Д.Ф. Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ПЖТФ. – 2002. – Т.28, вып. 19. – С. 1–9.
90. Белоножко, Д.Ф. Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 4. – С. 28–37.
91. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Изв. РАН. МЖГ. – 2003. – № 2. – С. 184–192.

92. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 11. – С. 37–46.

93. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности глубокой маловязкой, электропроводной жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 3. – С. 5–13.

94. Ширяева, С.О. Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью / С.О.Ширяева, Д.Ф. Белоножко, В.Б. Световой, А.И. Григорьев. – Препринт ИМИРАН № 29. – Ярославль. 1995. – 34 с.

95. Pregonzer, A.L. Liquid lithium ion source: nonlinear behavior of liquid surface in electric field / Е.А. Кузнецов, М.Д. Спектор // J. Appl. Phys. – 1986. – V. 60. – P. 3821–3824.

96. Кузнецов, Е.А. О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле / Е.А. Кузнецов, М.Д. Спектор // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71, № 1(7). – С. 262–272.

97. Wagner, A. Liquid gold ion source / A. Wagner, T.M. Hall // J. Vacuum Sci. Techn. – 1979. – V. 16, № 6. – P. 1871–1874.

98. Baily, A.G. Electrostatic atomization of liquids (revue) / A.G. Baily // Sci. Prog., Oxf. – 1974. – V. 61. – P. 555–581.

99. Коженков, В.И. Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) / В.И. Коженков, Н.А. Фукс // Успехи Химии. – 1976. – Т. 45, № 12. – С. 2274–2284.

100. Бураев, Т.К. Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле / Т.К. Бураев, И.П. Верещагин, Н.М. Пашин // Сильные электрические поля в технологических процессах. – М.: Энергия. 1979. – № 3. С. 87–105.

101. Дудников, В.Г. Электрогидродинамические источники ионных пучков (обзор) / В.Г. Дудников, А.Л. Шабалин // Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. – Новосибирск., 1987. – 66 с.

102. Fenn, J.B. Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules (revue) / J.B. Fenn, M. Mann, C.K. Meng et al. // Science. – 1989. – V. 246, № 4926. – P. 64–71.

103. Ширяева, С.О. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор) / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Святченко // Препринт ИМИРАН № 25. – Ярославль. 1993. – 118 с.

104. Григорьев, А.И. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор)

/ А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – № 3. – С. 3–22.

105. Григорьев, А.И. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Аналитические и численные исследования общих закономерностей нелинейных осцилляций. Экспериментальные работы / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов // ЭОМ. – 2005. – № 3. – С. 25–35.

106. Григорьев, А.И. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Внутреннее резонансное взаимодействие и излучение. Влияние внешних полей. Учет вязкости / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов // ЭОМ. – 2005. – № 4. – С. 24–34.

107. Григорьев, А.И. О характерном времени реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 7. – С. 140–142.

108. Григорьев, А.И. О форме «конуса Тэйлора» и характерном времени его роста / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов // ЭОМ. – 2004. – № 4. – С. 34–40.

109. Suvorov, V.G. Formation of the Taylor cone on the surface of liquid metal in the presence of an electric field / V.G. Suvorov, N.M. Zubarev // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2004. – V. 37. – P. 289–297.

110. Александров, М.Л. Расчет свободной поверхности проводящей жидкости, находящейся в сильном электрическом поле / М.Л. Александров, Л.Н. Галь, В.Я. Иванов и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1983. – № 6. – С. 165–167.

111. Allen, J.E. A note on the Taylor cone / J.E. Allen // J. Phys. D: Appl. Phys. – 1985. – V. 18. – P. 59–62.

112. Ширяева, С.О. Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной капли / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, И.Д. Григорьева // ЖТФ. – 1995. – Т. 65, вып. 9. – С. 39–45.

113. Ширяева, С.О. Характерное время развития неустойчивости маловязкой заряженной капли / С.О. Ширяева // ПЖТФ. – 2000. – Т. 26, вып. 4. – С. 5–8.

114. Григорьев, А.И. Об инкременте неустойчивости незаряженной капли в однородном электростатическом поле / А.И. Григорьев // ПЖТФ. – 1998. – Т. 24, вып. 24. – С. 36–40.

115. Шутов, А.А. Генерация электрогидродинамических волн на границе раздела жидкость-вакуум / А.А. Шутов // ЖТФ. – 2002. – Т. 72, вып. 8. – С. 126–130.

116. Белоножко, Д.Ф. О нелинейных капиллярно-гравитационных волнах на заряженной поверхности идеальной жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Изв. РАН. МЖГ. – 2003. – № 6. – С. 102-109.
117. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука. 1968. – 344 с.
118. Механика сплошных сред в задачах. Т. 2. Ответы и решения. – М: Изд. «Московский лицей», 1996. – 394 с.
119. Ширяева, С.О. О влиянии вязкости на характерное время развития неустойчивости заряженной капли / С.О. Ширяева // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 9. – С. 30–36.
120. Bateman, H. On dissipative systems and related variation principles / H. Bateman // Phys. Rev. Ser 2. – 1931. – V. 38. – P. 815.
121. Millikan, C. On the steady motions of viscous incompressible fluids with particular reference to a variation principle / C. Millikan // Phil. Mag. Ser.7. – 1929. – V. 7. – P. 641.
122. Longuet-Higgins, M.S. Mass transport in water waves / M.S. Longuet-Higgins // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. – 1953. – V. 245, № 903. – P. 535–581.
123. Белоножко, Д.Ф. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 11. – С. 29-37.
124. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости конечной проводимости / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, вып. 2. – С. 37–44.
125. Климов, А.В. Нелинейные капиллярно-гравитационные периодические волны на заряженной поверхности вязкой жидкости конечной глубины / А.В. Климов, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, вып. 10. – С. 9–17.
126. Левич, В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г. Левич. – М: Изд. АН СССР, 1952. – 538 с.
127. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М: Наука, 1974. – 712 с.
128. Фабер, Т.Е. Гидроаэродинамика / Т.Е. Фабер. – М: Изд. Постмаркет, 2001. – 560 с.
129. Бэтчелор, Дж.К. Введение в динамику жидкости / Дж.К. Бэтчелор. – М.; Ижевск: Изд. НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2004. – 768 с.
130. Ле Блон, П. Волны в океане. Ч. 1 / П. Ле Блон, Л. Майсек. – М: Мир, 1981. – 480 с.

131. Ширяева, С.О. Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей / С.О. Ширяева // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, вып. 3. – С. 9–16.
132. Морс, Ф. Методы теоретической физики. Т. 2 / Ф. Морс, Г. Фешбах. – М.: ИЛ, 1960. – 886 с.
133. Ентов, В.М. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей / В.М. Ентов, А.Л. Ярин // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". – 1984. – Т. 17. – С. 112–197.
134. Григорьев, А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) / А.И. Григорьев // ЭОМ. – 1990. – № 6. – С. 23–32.
135. Монодиспергирование вещества: принципы и применение // Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городков и др. / Под ред. В.А. Григорьева. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 336 с.
136. Chen, C.H. Electrohydrodynamic "drop-and-place" particle deployment / C.H. Chen, D.A. Saville, I.A. Aksay // Appl. Phys. Letters. – 2006. – Vol. 88, № 3154104. – P. 1–3.
137. Фукс, Н.А. Монодисперсные аэрозоли / Н.А. Фукс, А.Г. Сутугин // Успехи химии. – 1965. – Т. 34, № 2. – С. 276–299.
138. Безруков, В.И. Основы электрокаплеструйных технологий / В.И. Безруков. – СПб: Изд. Судостроение. 2001. – 237 с.
139. Тимохин, А.Д. Получение потоков монодисперсных нейтральных и заряженных макрочастиц / А.Д. Тимохин // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1981. – Вып. 545. – С. 3–24.
140. Macky, W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields / W.A. Macky // Pros. Roy. Soc., London. – 1931. – V. 133, № A822. – P. 565–587.
141. Magarvey, R. Note on the break up of charged liquid jet / R. Magarvey, L. Outhouse // J. Fluid Mech. – 1962. – Vol. 13, № 1. – P. 151–157.
142. Huebner, A. Instability and breakup of charged liquid jets / A. Huebner, H. Chu // J. Fluid Mech. – 1971. – Vol. 49, № 2. – P. 361–372.
143. Hoburg, J.F. Current-driven, corona terminated water jets as sources of charged droplets and audible noise / J.F. Hoburg, J.R. Melcher // IEEE Transaction on Power Apparatus System. – 1975. – V. 94, № 1. – P. 128–136.
144. Kim, K. Generation of charged drops of insulating liquids by electrostatic spraying / K. Kim, R. Turnbull // J. Appl. Phys. – 1976. – V. 47, № 5. – P. 1964–1969.

145. Cloupeau, M. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes / M. Cloupeau, B. Prunet Foch // J. Electrostatics. – 1990. – V. 25. – P. 165–184.

146. Ширяева, С.О. О спонтанном распаде заряженной струи вязкой электропроводной жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук, М.В. Рыбакова // ЭОМ. – 2003. – № 1. – С. 38–43.

147. Ширяева, С.О. Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук, М.В. Рыбакова // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 4. – С. 5–12.

148. Ширяева, С.О. Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 11. – С. 22–30.

149. Nayfeh, F.H. Nonlinear stability of a liquid jet / F.H. Nayfeh // Phys. Fluids. – 1970. – № 4. – P. 841–847.

150. Rutland, D. A nonlinear effect in the capillary instability of liquid jets / D. Rutland, G. Jamerson // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 46, № 2. – P. 267–271.

151. Lafrance, P. Nonlinear breakup of a liquid jet / P. Lafrance // Phys. Fluids. – 1974. – V. 17, № 10. – P. 1913–1914.

152. Новиков, А.А. Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости / А.А. Новиков // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1977. – № 2. – С. 179–182.

153. Chaudhary, K. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt. 1. Theory / K. Chaudhary, L. Redekopp // J. Fluid Mech. – 1980. – V. 96. – P. 257–274.

154. Chaudhary, K. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt.2. Experiments on jet behavior before droplet formation / K. Chaudhary, T. Maxworthy // J. Fluid. Mech. – 1980. – Vol. 96. – P. 275–286.

155. Chaudhary, K. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt. 3. Experiments on satellite drop formation and control / K. Chaudhary, T. Maxworthy // J. Fluid. Mech. – 1980. – V. 96, № 2. – P. 287–298

156. Блаженков, В.В. Нелинейная эволюция волн при вынужденном капиллярном распаде струй / В.В. Блаженков, А.Ф. Гиневский, В.Ф. Гунбин, А.С. Дмитриев, С.И. Щеглов // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1993. – № 3. – С. 54–60.

157. Huynh, H. Instability of a liquid jet subject to disturbances composed of two wave numbers / H. Huynh, N. Ashgriz, F. Mashayek // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 320. – P. 185–210.

158. Чесноков, Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости / Ю.Г. Чесноков // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 8. – С. 31–38.

159. Асланов, С.К. К теории распада жидкой струи на капли / С.К. Асланов // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, вып. 11. – С. 132–133.

160. Горшков, В.Н. Нелинейные электрогидродинамические явления и генерация капель в заряженных проводящих струях / В.Н. Горшков, М.Г. Чабан // ЖТФ. – 1999. – Т. 69, вып. 11. – С. 1–9.

161. Ширяева, С.О. Нелинейный асимптотический анализ осцилляций неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Т.В. Левчук // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 8. – С. 6–14.

162. Григорьев, А.И. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Е.В. Егорова // Электронная обработка материалов. – 2005. – № 1. – С. 42–50.

163. Волкова, М.В. Нелинейные неосесимметричные волны на заряженной поверхности электропроводной струи / М.В. Волкова, Н.В. Воронина // Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Актуальные проблемы физики. – Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова. – 2005. – № 5. – С. 73–80.

164. Ширяева, С.О. Нелинейные осцилляции заряженной струи электропроводной жидкости при многомодовой начальной деформации ее поверхности / С.О. Ширяева, Н.В. Воронина, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2006. – Т. 76, вып. 9. – С. 31–41.

165. Rayleigh, Lord. On the capillary phenomena of jets / Lord. Rayleigh // Proc. Roy. Soc., London. – 1879. – V. 29, № 196. – P. 71–97.

166. Рэлей, Дж. Теория звука. Т. 2 / Дж. Рэлей. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.

167. Savart, F. Memare sur la contitution veines liquides lancus par des orifices circulaires en mince paroi / F. Savart // Annal. chimic. – 1833. – Ser. 2. Vol. 53, № 3. – P. 337–386.

168. Weber, C. Zum den Zerfall eines Flussigkeitstrahles / C. Weber // Z. Angew. Math. Mech. – 1931. – Bd. 11. H. 3. – S. 136–154.

169. Keller, J.B. Spatial instability of a jet / J.B. Keller, S.I. Rubinow, Y.O. Tee // Phys. Fluids. – 1973. – Vol. 16, № 12. – P. 2052–2055.

170. Bogy, D.B. Wave propagation and instability in a circular semi-infinite liquid jet harmonically forced at the nozzle / D.B. Bogy // Trans. ASME. J. AppL Mech. – 1978. – Vol. 45, № 3. – P. 469–474.

171. Bogy, D.B. Breakup of a liquid jet: third perturbation Cosserat solution / D.B. Bogy // Phys. Fluids. – 1979. – V. 22, № 2. – P. 224–230.

172. Владимиров, В.В. Особенности образования капель при развитии неустойчивости Рэлея в цилиндрических нитях жидкости / В.В. Владимиров, В.Н. Горшков // ЖТФ. – 1990. – Т. 60, № 11. – С. 197–200.

173. Горшков В.Н., Самовозбуждение коротковолновых структур и распад на капли в ограниченных нитях жидкости / В.Н. Горшков, Д.В. Мозырский // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, вып. 10. – С. 15–25

174. Колпаков, А.В. Слияние и дробление капель в атмосфере / А.В. Колпаков. – Одесса: Изд. ОНУ им И.И. Мечникова. – 2003. – 164 с.

175. Петров, Г.И. Применение метода малых колебаний к исследованию распада струй топлива в воздухе / Г.И. Петров, Т.Д. Калинин // Тех. записки МАП. – 1947. – № 4. – С. 15–23.

176. Fenn, R.W. Newtonian jet stability: the role of air resistance / R.W. Fenn, S. Middleman // AIChE Journal. – 1969. – V. 12, № 3. – P. 379–383.

177. Grant, R.P. Newtonian jet stability / R.P. Grant, S. Middleman // AIChE Journal. – 1966. – V. 12. – № 4. – P. 669–678.

178. Haenlein, A. Uber den Zerfall eines Flussigkeitstrahles / A. Haenlein // Forschung. Ing. Wes. – 1931. – Bd. 2. H. 4. – S. 139–149.

179. Iciek, J. The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer. 1. Hydrodynamics of a free, cylindrical liquid jet / J. Iciek // Int. J. Multiphase Flow. – 1982. – Vol. 8. NT. – P. 239–249.

180. Iciek, J. The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer I: Conditions of change of liquid outflow type through sharp inlet edged orifice / J. Iciek // Int. J. Multiphase Flow. – 1983. – 9, № 2. – P. 167–179.

181. Глonti, Г.А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле / Г.А. Глonti // ЖЭТФ. – 1958. – Т. 34, № 5. – С. 1328–1330.

182. Schneider, J. Stability of an electrified liquid jet / J. Schneider, C. Lindbland, Jr. Hendrick // J. Appl. Phys. – 1967. – V. 38, № 6. – P. 2599–2606.

183. Michael, D. Electrohydrodynamic instability of a cylindrical viscous jet / D. Michael, M. O'Neil // Can. J. Phys. – 1969. – V. 47. – P. 1215–1220.

184. Saville, D. Electrohydrodynamic stability: effect of charge relaxation at the interface of a liquid jet / D. Saville // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 48, № 4. – P. 815–827.

185. Saville, D. Stability of electrically charged viscous cylinders / D. Saville // *Phys. of Fluids*. – 1971. – V. 14, № 6. – P. 1095–1099.
186. Huebner A.L. Disintegration of charged liquid jets // *J. Fluid Mech.* 1969. – V. 38. Part. 4. – P. 679–688.
187. Френкель, Я.И. Действие электрического поля на струю жидкости / Я.И. Френкель // *На заре новой физики*. Л.: Наука, 1970. – С. 238–243.
188. Garmendia, L. The effects of an electrostatic field and air stream on water jet break-up length / L. Garmendia, I. Smith // *Can. J. Chem. Eng.* – 1975. – V. 53. – P. 606–610.
- 189 Toraita, Y. Effect of a magnetic and an electrical field on the behavior of liquid jets / Y. Toraita, K. Sudou, Y. Tshibashi // *Bull. JSME*. – 1979. – V. 22, № 172. – P. 1390–1398.
190. Кожевников, В.И. Свободные вертикальные струи над деформированной поверхностью магнитной жидкости в электрическом поле / В.И. Кожевников, В.В. Чеканов, Е.И. Литовский // *Магнитная гидродинамика*. – 1982. – № 4. – С. 118–120.
191. Grossmann, S. Instabilities and decay rates of charged viscous liquid jets / S. Grossmann, A. Muller // *Z. Phys. B: Condensed Matter*. – 1984. – V. 57. – P. 161–174.
192. Назин, С.С. Об устойчивости заряженной струи / С.С. Назин, А.Н. Изотов, В.Б. Шикин // *ДАН СССР*. – 1985. – Т. 283, № 1. – С. 121–125.
193. Герценштейн, С.Я. Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй / С.Я. Герценштейн, П.М. Мусабеков, А.Я. Рудницкий, Ш.Н. Уразов // *ДАН СССР*. – 1989. – Т. 306, № 5. – С. 1073–1077.
194. Taylor G. Electrically driven jet // *Proc. Roy. Soc., London*. – 1969. – V. A313. – P. 453–470.
195. Taylor, G. Disintegration of water drop in an electric field / G. Taylor // *Proc. Roy. Soc., London*. – 1964. – V. A280. – P. 383–397.
196. Baily, A.G. Electrostatic spraying of liquids / A.G. Baily // *Phys. Bull.* 1084. – V. 35, № 4. – P. 146–148.
197. Zeleny, J. The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces / J. Zeleny // *Phys. Rev.* – 1914. – V. 3, № 2. – P. 69–91.
198. Zeleny, J. On the condition of instability of electrified drops with application to the electrical discharge from liquid points / J. Zeleny // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1914. – V. 18. Part 1. – P. 71–83.
199. Zeleny, J. Instability of electrified liquid surfaces / J. Zeleny // *Phys. Rev.* – 1917. – V. 10, № 1. – P. 1–6.

200. English, W.N. Corona from water drop / W.N. English // *Phys. Rev.* – 1948. – V. 74, № 2. P. 179–189.
201. Drozin, V.G. The electrical dispersion of liquids as aerosols / V.G. Drozin // *J. Coll. Sci.* – 1955. – V. 10, № 2. – P. 168–164.
202. Vonnegut, B. Production of monodispers liquid particles by electrical atomization / B. Vonnegut, R.L. Neubauer // *J. Coll. Sci.* – 1952. – V. 7, № 6. – P. 616–622.
203. Navab, M.A. The preparation of uniform emulsions by electrical dispersion / M.A. Navab, S.G. Mason // *J. Coll. Sci.* – 1958. – V. 13. – P. 179–187.
204. Schjultze, K. Das Verhalten verschidener Flussigkeiten bei red Electrostatiscen Zerstaubung / K. Schjultze // *Zeitschrift fur angewandte Physik.* – 1961. – B. 13, № 1. – S. 11–16.
205. Kleber, W. Der Mechanismis der Electrostatiscen Lackerzerstaubung / W. Kleber // *Plaste und Kautschuk.* – 1963. – № 8. – S. 502–508.
206. Carson, R.S. Natural pulsations in electrical spraying of liquids / R.S. Carson, C.D. Hendrics // *AIAA Journal.* – 1965. – V. 3, № 6. – P. 1072–1075.
207. Hines, R.L. Electrostatic atomization and spray painting / R.L. Hines // *J. Appl. Phys.* – 1966. – V. 37, № 7. – P. 2730–2736.
208. Jones, A.R. The production of charged monodispers fuel droplets by electrical dispersion / A.R. Jones, K.C. Thong // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 1971. – V. 4. – P. 1159–1165.
209. Коженков, В.И. О механизме образования монодисперсных туманов при электрическом распылении жидкости / В.И. Коженков, А.А. Кирш, Н.А. Фукс // *ДАН. СССР.* – 1973. – Т. 213, № 4. – С. 879–880.
210. Коженков, В.И. Исследование процесса образования монодисперсных аэрозолей при электрическом распылении жидкости / В.И. Коженков, А.А. Кирш, Н.А. Фукс // *КЖ.* – 1974. – Т. 36, № 6. – С. 1168–1171.
211. Бураев, Т.К. Физические процессы при распылении жидкости в электрическом поле / Т.К. Бураев, И.П. Верещагин // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.* – 1971. – № 5. – С. 70–79.
212. Бураев, Т.К. Качественная картина распыления жидкости в электрическом поле / Т.К. Бураев, М.М. Пашин // *Электричество.* – 1971. – № 4. – С. 78–79.
213. Robinson, K.S. Electrostatic spraying of liquid insulators / K.S. Robinson, R.J. Turnbull, K. Kim // *IEEE Trans. on IA.* – 1980. – V. IA-16, № 2. – P. 308–316.

214. Wilson, J.M. A linear source of electrostatically charged spray / J.M. Wilson // J. Agric. Engng. Res. – 1982. – V. 27. – P. 355–362.
215. Smith, D.P.H. The electrohydrodynamic atomization of liquids / D.P.H. Smith // IEEE Trans. on IA. – 1986. – V. IA-22, № 3. – P. 527–535.
216. Hayati, I. Mechanism of stable jet formation in electrohydrodynamic atomization / I. Hayati, A.J. Bailey, Th.F. Tadros // Nature. – 1986. – V. 319, № 1. – P. 41–43.
217. Hayati, I. Investigations into the mechanism electrohydrodynamic spraying of liquids. Part 1 / I. Hayati, A.J. Bailey, Th.F. Tadros // J. Coll. Int. Sci. – 1987. – V. 117, № 1. – P. 205–221.
218. Hayati, I. Investigations into the mechanism electrohydrodynamic spraying of liquids. Part 2 / I. Hayati, A.J. Bailey, Th.F. Tadros // J. Coll. Int. Sci. – 1987. – V. 117, № 1. – P. 222–230.
219. Попов, С.И. К механизму электростатического распыливания жидкостей / Попов С.И., И.В. Петрянов // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195, № 4. – С. 893–895.
220. Кириченко, В.Н. Перенос заряда при электрогидродинамическом распылении жидкости / В.Н. Кириченко, В.Н. Полезов, Н.Н. Супрун, И.В. Петрянов-Соколов // ДАН СССР. – 1988. – Т. 301, № 3. – С. 814–817.
221. Кириченко, В.Н. Удельный заряд жидкости в процессах ЭГД-распыления и формирования микроволокон / В.Н. Кириченко, А.Д. Михайлова, В.Н. Полезов // ДАН СССР. – 1990. – Т. 315, № 4. – С. 819–823.
222. Cloupeau, M. Electrostatic spraying of liquids in cone-jet modes / M. Cloupeau, B. Prunet Foch // J. Electrostatics. – 1989. – V. 22. – P. 135–159.
223. Fernandes, J. De La More. The current emitted by highly conducting Taylor cones / J. De La More Fernandes, I.G. Loscertales // J. Fluid Mech. – 1994. – V. 260. – P. 155–184.
224. Gomez, A. Charge and fission of droplets in electrostatic sprays / A. Gomez, K. Tang // Phys. Fluids. – 1994. – V. 6, № 1. – P. 404–413.
225. Ширяева, С.О. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Святченко. – Препринт ИМ РАН № 25. – Ярославль, 1993. – 118 с.
226. Shiryayeva, S.O. The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids / S.O. Shiryayeva, A.I. Grigor'ev // J. Electrostatics. – 1995. – V. 34. – P. 51–59.

227. Кириченко, В.Н. Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле / В.Н. Кириченко, И.В. Петрянов-Соколов, Н.Н. Супрун А.А. Шутов // ДАН СССР. – 1986. – Т. 289, № 4. – С. 817–820.

228. Кириченко, В.Н. Области существования свободных стационарных жидких струй в сильном внешнем электрическом поле / В.Н. Кириченко, Н.Н. Супрун, И.В. Петрянов-Соколов // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295, № 2. – С. 308–311.

229. Кириченко, В.Н. Форма свободной стационарной жидкой струи в сильном однородном электрическом поле / В.Н. Кириченко, Н.Н. Супрун, И.В. Петрянов-Соколов // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295, № 4. – С. 553–555.

230. Canan-Calvo, A.M. On the theory of electrohydrodynamically driven capillary jets / A.M. Canan-Calvo // J. Fluid Mechanics. – 1997. – V. 335. – P. 165–188.

231. Шутов, А.А. Заряженная струя несжимаемой жидкости в электрическом поле / А.А. Шутов, А.А. Захарьян // ПМТФ. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 12–15.

232. Шутов, А.А. Форма слабопроводящей струи в сильном электрическом поле / А.А. Шутов // ПМТФ. – 1991. – Т. 32, № 2. – С. 20–25.

233. Зубарев, Н.М. Точное решение задачи о равновесной конфигурации двумерной заряженной жидкометаллической капли / Н.М. Зубарев // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, вып. 23. – С. 55–60.

234. Зубарев, Н.М. Анализ равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости / Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева // Письма в ЖТФ. – 2004. – Т. 30, вып. 1. – С. 51–55.

235. Feng, J.J. Stretching of a straight electrically charged viscoelastic jet / J.J. Feng // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2003. – V. 116. – P. 55–70.

236. Turnbull R. Self-acceleration of a charged jet // IEEE Trans. Ind. Appl. – 1989. – V. 25, № 4. – P. 699–704.

237. Гиневский, А.Ф. Особенности капиллярного распада струй диэлектрической вязкой жидкости с поверхностным зарядом / А.Ф. Гиневский, А.И. Мотин // ИФЖ. – 1991. – Т. 60, № 4. – С. 576–581.

238. Mestel, A.J. Electrohydrodynamic stability of a slightly viscous jet / A.J. Mestel // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 274. – P. 93–113.

239. Mestel, A.J. Electrohydrodynamic stability of a highly viscous jet / A.J. Mestel // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 312, № 2. – P. 311–326.

240. Шкадов, В.Я. Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле / В.Я. Шкадов, А.А. Шутов // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 2. – С. 29–40.

241. Шутов, А.А. Теоретическое и экспериментальное исследование электрогидродинамических струйных течений, их устойчивости и моделирование процесса диспергирования жидкости / А.А. Шутов, В.Я. Шкадов // Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук, вып. 1. – Калуга, 2000. – С. 67–88.

242. Shkadov, V.Ya. Disintegration of a charged viscous jet in a high electric field / V.Ya. Shkadov, A.A. Shutov // Fluid Dynamic Res. – 2001. – V. 28. – P. 23–39.

243. Бухаров, А.В. Влияние электрического поля на капиллярный распад струи электролита / А.В. Бухаров, А.Ф. Гиневский, Н.А. Коновалов // ИФЖ. – 1991. – Т. 60, № 4. – С. 582–586.

244. Гиневский, А.Ф. Особенности капиллярного распада струй заряженных диэлектриков / А.Ф. Гиневский // Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости. Сб. н. тр. МЭИ, № 119. – М: Изд. МЭИ, 1986. – С. 18–26.

245. Гиневский, А.Ф. Особенности капиллярного распада струй вязких заряженных диэлектрических жидкостей / А.Ф. Гиневский // Физико-технические проблемы монодисперсных систем. Сб. н. тр. МЭИ, № 185. – М: Изд. МЭИ. – 1988. – С. 54–58.

246. Шкадов, В.Я. Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле / В.Я. Шкадов, А.А. Шутов // Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". – 1984. – Т. 1. – С. 27–35.

247. Fang, Li. Linear instability analysis of a coaxial jet / Li Fang, Xie-Yuan, Yin Xie-Zhen // Phys. Fluids. – 2005. – V. 17, № 077104. – P. 1–12.

248. Raco, R.J. Stability of a liquid jet in a longitudinal time-varying electric field / R.J. Raco // AIAA Journal. – 1968. – V. 6, № 5. – P. 979–980.

249. Кириченко, В.Н. Поперечное расщепление струи в сильном электрическом поле / В.Н. Кириченко, А.Д. Шепелев, В.Н. Полезов, И.В. Петрянов-Соколов // ДАН СССР. – 1988. – Т. 302, № 2. – С. 284–287.

250. Белоножко, Д.Ф. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2004. – Т. 74, вып. 11. – С. 22–28.

251. Higuera, F.J. Flow rate and electric current emitted by a Taylor cone / F.J. Higuera // J. Fluid Mech. – 2003. – V. 484. – P. 303–327.

252. Higuera, F.J. Current/flow-rate characteristics of an electrospray with a small meniscus / F.J. Higuera // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 513. – P. 239–246.

253. Canan-Calvo, A.M. Cone-jet analytical extension of Taylor's electrostatic solution and the asymptotic universal scaling laws in electro-spraying / A.M. Canan-Calvo // Phys. rev. Lett. – 1997. – V. 79, № 2. – P. 217–220.

254. Gamero-Castano, M. Electric measurements of charged sprays emitted by cone-jets / M. Gamero-Castano, V. Hruby // J. Fluid Mech. – 2002. – V. 459. – P. 245–276.

255. Lopez-Herera, J.M. A note on charged capillary jet breakup of conducting liquids: experimental validation of a viscous one-dimensional model / J.M. Lopez-Herera, A.M. Canan-Calvo // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 501. – P. 303–326.

256. Marginean, I. Flexing the electrified meniscus: the birth of a jet in electrosprays / I. Marginean, L. Parvin, L. Hefferman, A. Vertes // Anal. Chem. – 2004. – V. 76. – P. 4202–4207.

257. Loscertales, I.G. Production of complex nano-structures by electro-hydro-dynamics / I.G. Loscertales, A. Barrero, M. Marquez // Mater. Res. Soc. Symp. Proc. – 2005. – V. 860E. – P. LL.5.9.1-6.

258. Герценштейн, С.Я. О распаде наэлектризованных вращающихся капиллярных струй / С.Я. Герценштейн, П.М. Мусабеков, А.Я. Рудницкий, К. Умаркулов // ИФЖ. – 1991. – Т. 60, № 2. – С. 231–236.

259. Аликин, А.Р. Исследование эволюции спектра колебаний поверхности струи при вынужденном капиллярном распаде / А.Р. Аликин, В.В. Блаженков, В.Ф. Гунбин, Щеглов С.И. // ИФЖ. – 1991. – Т. 60, № 4. – С. 550–553.

260. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 8. – С. 45–52.

261. Ширяева, С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы / С.О. Ширяева // Изв. РАН. МЖГ. – 2001. – № 3. – С. 173–184.

262. Жаров, А.Н. Аналитическое исследование нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости / А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, № 12. – С. 33–42.

Оглавление

1. Введение. Периодические волны на однородно заряженной плоской поверхности несжимаемой жидкости.....	3
1.1. Линейные волны.....	3
1.2. Нелинейные волны.....	7
2. Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной идеальной жидкости. Нелинейный анализ устойчивости заряженной поверхности жидкости.....	12
2.1. Нелинейные периодические капиллярно-гравитационные волны на однородно заряженной поверхности идеально проводящей бесконечно глубокой идеальной несжимаемой жидкости.....	12
2.2. Нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности электропроводной жидкости.....	37
2.3. Нелинейный анализ временной эволюции неустойчивой заряженной плоской свободной поверхности жидкости.....	42
2.4. Нелинейный анализ формы конуса Тейлора	63
3. Нелинейные волны на поверхности вязкой жидкости.....	74
3.1. <i>Нелинейные периодические волны на однородно заряженной поверхности электропроводной вязкой жидкости.....</i>	<i>74</i>
3.1.1. Решение задачи об аналитическом асимптотическом расчете капиллярно-гравитационного нелинейного периодического волнового движения в бесконечно глубокой вязкой электропроводной несжимаемой жидкости.....	74
3.1.2. Формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности вязкой жидкости	94
3.1.3. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной свободной поверхности маловязкой жидкости	100
3.1.4. Влияние поверхностного заряда на формы нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности вязкой жидкости	113
3.2. О расчете волнового движения в рамках теории пограничного слоя.....	122

4. Интерлюдия. Периодические волны на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи несжимаемой жидкости. Дробление заряженных струй.....	148
5. Нелинейные неосесимметричные волны на однородно заряженной поверхности струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости	162
<i>5.1. Одномодовая начальная деформация свободной поверхности струи</i>	<i>162</i>
<i>5.2. Многомодовая начальная деформация.....</i>	<i>188</i>
<i>5.3. Аналитический расчет нелинейной поправки к частоте волны конечной амплитуды на поверхности заряженной струи</i>	<i>213</i>
6. Аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях толстой заряженной струи вязкой жидкости	239
7. Литература	265
8. Оглавление	285

Научное издание

Белоножко Дмитрий Федорович
Ширяева Светлана Олеговна
Григорьев Александр Иванович

**Нелинейные волны
на заряженной
поверхности жидкости**

Редактор, корректор Л.Н. Селиванова
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 11.09.2006 г. Формат 60×84/16.
Бумага тип. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,3. Уч.-изд.л. 13,5. Тираж 150 экз.

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ
Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.

