Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической физики

А. А. Гвоздев, А. А. Сабитов

Континуальный интеграл в квантовой теории поля и теории конденсированных сред

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 530.145:539.12(075)
ББК В31я73
Г25

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2018 года

Рецензент:
кафедра теоретической физики

Гвоздев, Александр Александрович.
Г25 Континуальный интеграл в квантовой теории поля и теории конденсированных сред : учебно-методическое пособие / А. А. Гвоздев, А. А. Сабитов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2018. — 28 с.

В пособии излагается метод континуального интеграла (интеграла по путям) в приложении к квантовой теории поля и физике конденсированного состояния.
Предназначено для студентов, обучающихся в магистратуре и аспирантуре по программе "Теоретическая физика".

УДК 530.145:539.12(075)
ББК В31я73

Оглавление

Глава 1

Континуальный интеграл в квантовой теории поля

1.1 Производящий функционал для функций Грина в квантовой теории поля. Представление производящего функционала континуальным интегралом

Наиболее последовательным методом квантования поля является каноническое квантование. Практически вся учебная литература по КТП построена на этом методе. Мы лишь кратко коснёмся общего формализма канонического квантования в той мере, которая необходима для того, чтобы выяснить, что является в КТП основным объектом вычисления (подобно амплитуде перехода в квантовой механике и матрице плотности в квантовой статистической механике).

Начнём с простейшего случая скалярного поля $\varphi(\vec{x}, t)$. Классическая функция Лагранжа определяется через свою плотность $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ с соотношением

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \tag{1.1}$$

Для перехода к функции Гамильтона определим сопряженные координате $\varphi(\vec{x}, t)$ импульсы:

$$\pi(\vec{x}, t) \equiv \frac{\delta L(t)}{\delta(\partial_0 \varphi(\vec{x}, t))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left[\partial_0 \varphi(\vec{x}, t)\right]}, \tag{1.2}$$

а затем построим квантовую теорию. Для этого заменим классические функции операторами в гейзенберговском представлении $\varphi(\vec{x}, t) \longrightarrow \hat{\varphi}(\vec{x}, t)$, $\pi(\vec{x}, t) \longrightarrow \hat{\pi}(\vec{x}, t)$, наложив на них канонические коммутационные соотношения при совпадающих временных аргументах

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \tag{1.3}$$

причём коммутаторы $[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}]$ и $[\hat{\pi}, \hat{\pi}]$ равны нулю. Выражая с помощью (1.2) $\partial_0\varphi$ через π и φ, находим оператор Гамильтона в гейзенберговском представлении:

$$\hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\varphi}) = \int d^3x \left\{\hat{\pi}(\vec{x}, x_0)\partial_0\varphi(\vec{x}, x_0) - \mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{\pi})\right\}. \tag{1.4}$$

Например, для самодействующего скалярного поля с потенциалом $V(\varphi)$, описывающего плотность лагранжиана,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} - m^2\varphi^2\right) - V(\varphi). \tag{1.5}$$

Оператор Гамильтона (1.4) есть

$$\hat{H} = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}(\hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\varphi})^2 + m^2\hat{\varphi}^2) + V(\hat{\varphi})\right\}. \tag{1.6}$$

Построив оператор Гамильтона (1.4)-(1.6), можно, в принципе, определить его собственные функции и собственные значения:

$$\hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\varphi})\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle\,, \quad 0 \leqslant E_0 \leqslant E_1 \leqslant ... \leqslant E_n \leqslant ... \tag{1.7}$$

Состояние с наименьшей энергией $|n\rangle$ играет в КТП огромную роль и называется вакуумным (или просто вакуумом). При этом обычно энергия вакуумного состояния полагается равной нулю, поскольку на неё калибруется энергия всех измерительных приборов:

$$\hat{H}\,|n\rangle = 0. \tag{1.8}$$

Основным объектом вычисления в КТП являются полевые функции Грина (ФГ). n-точечная ФГ $G_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяется в теории скалярного поля (1.4)-(1.6) как среднее по вакууму от хронологического произведения полевых операторов в гейзенберговском представлении ($x \equiv (\vec{x}, x_0)$):

$$G_n(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \frac{\langle 0|\,T\,[\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)...\hat{\varphi}(x_n)]\,|0\rangle}{\langle 0|\,0\,\rangle}. \tag{1.9}$$

Через ФГ (1.9) с помощью так называемых редукционных формул строятся матричные элементы матрицы рассеяния, входящие в непосредственно экспериментально измеряемые величины. Мы не будем останавливаться на этом вопросе в настоящем вводном учебном курсе, а интересующегося читателя отсылаем к соответствующей литературе.

В свою очередь функции Грина (1.9) можно построить из некоторого первичного объекта с помощью операции функционального дифференцирования. Метод, с помощью которого это делается, был разработан Ю. Швингером и называется методом источников. Изложим вкратце суть метода.

Пусть в каждой точке 4-пространства вместе с квантованным полем $\hat{\varphi}(\vec{x}, t)$ определена некоторая классическая функция $J(\vec{x}, t)$, интерпретирующаяся как функция классических полевых источников. Это может быть и реальная физическая величина, например внешний электромагнитный ток, если $\hat{\varphi}(\vec{x},t) \equiv \hat{A}_\mu(\vec{x},t)$, а может быть, и некоторое воображаемое классическое поле. Взаимодействие этих источников с квантовым полем строится минимальным образом:

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \partial_\mu \hat{\varphi}) \longrightarrow \mathcal{L}(\hat{\varphi}, \partial_\mu \hat{\varphi}) + J(\vec{x},t)\hat{\varphi}(\vec{x},t). \tag{1.10}$$

В таком случае

$$\hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\varphi}) \longrightarrow \hat{H}(\hat{\pi}, \hat{\varphi}) - \int d^3x J(\vec{x},t)\hat{\varphi}(\vec{x},t). \tag{1.11}$$

Для описания квантовой системы при включенных источниках удобно перейти к представлению взаимодействия. В представлении взаимодействия волновая функция состояния (и, в частности, вакуум) эволюционирует во времени лишь при включении гамильтониана взаимодействия, который в шредингеровском представлении для операторов имеет вид

$$\hat{H}_{int} = - \int d^3x J(\vec{x},t)\hat{\varphi}_{Sh}(\vec{x}). \tag{1.12}$$

Если теперь задать в представлении взаимодействия (1.12) в качестве вакуума при $t=0$ гейзенберговское вакуумное состояние $|0\rangle$ (не зависит от времени!), то можно построить состояние $|0^-\rangle$ при $t=-\infty$, как такое вакуумное состояние при $t=-\infty$, которое проэволюционировало до $|0\rangle$ при $t=0$, а также состояние $|0^+\rangle$, как такое вакуумное при $t=+\infty$, которое получается из $|0\rangle$ при $t=+\infty$ при эволюции в бесконечно удалённое будущее $t=+\infty$ под действием (1.12). Для амплитуды перехода, которую мы будем обозначать $\langle 0^+ | \, 0^- \rangle_J$, в представлении взаимодействия получается следующая нетривиальная формула:

$$\left\langle 0^+ \right| \left. 0^- \right\rangle_J = \langle 0 | \, T \left\{ \exp \left[-i/\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_{int}(t) \right] \right\} |0\rangle \,, \tag{1.13}$$

где эволюцией оператора $\hat{H}_{int}(t)$ управляет оператор $\hat{H}$ в шредингеровском представлении:

$$\hat{H}_{int}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}t} = -e^{i\hat{H}t}\left(\int d^3x J(\vec{x},t)\hat{\varphi}_{Sh}(\vec{x})\right)e^{-i\hat{H}t} = \tag{1.14}$$

$$= - \int d^3x J(\vec{x},t)\hat{\varphi}(\vec{x},t).$$

Адиабатическая гипотеза (мягкое включение - выключение взаимодействия) сводится к требованию на функцию источников

$$J(\vec{x},t)|_{t\longrightarrow\pm\infty} \longrightarrow 0. \tag{1.15}$$

Таким образом, нами определена амплитуда перехода квантованного поля из вакуумного состояния в бесконечно удалённом прошлом в вакуумное состояние в бесконечно удалённом будущем при включёненных источниках:

$$\left\langle 0^+ \right| \left. 0^- \right\rangle_J = \langle 0 | \, T \left\{ \exp \left[i/\hbar \int d^4x J(x)\hat{\varphi}(x) \right] \right\} |0\rangle \,. \tag{1.16}$$

Гипотеза адиабатического включения взаимодействия с источниками (1.15) приводит к условию унитарности (естественное физическое условие, что $|0^+\rangle$ и $|0^-\rangle$ различаются на фазовый множитель):

$$\mathcal{Z}\left[J\right] \equiv \left\langle 0^+ \middle| \, 0^- \right\rangle_J = e^{\frac{i}{\hbar} W[J]}. \tag{1.17}$$

Функционалы от источников $\mathcal{Z}\left[J\right]$ и $W\left[J\right]$ называются в КТП соответственно производящим функционалом для ФГ и производящим функционалом для связанных ФГ. Покажем, что из них, как из первичных объектов, действительно могут быть определены функции Грина. Они, как нетрудно увидеть, получаются из функционала $\mathcal{Z}\left[J\right]$ (1.16) при его функциональном дифференцировании по источнику

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{Z}\left[0\right]} \frac{\delta^{(0)} \mathcal{Z}\left[0\right]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) ... \delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} &= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{\langle 0|\, T\left[\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)...\hat{\varphi}(x_n)\right] |0\rangle}{\langle 0|\, 0\rangle} = \\ &= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n G_n(x_1, x_2, ... x_n). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Определим объекты, которые получаются при дифференцировании функционала $W\left[J\right]$. Для этого будем последовательно дифференцировать (1.17) по источникам $J(x)$.

При взятии первой функциональной производной получим

$$\frac{1}{\mathcal{Z}\left[0\right]} \left.\frac{\delta \mathcal{Z}\left[J\right]}{\delta J\left(x\right)}\right|_{J=0} = \frac{i}{\hbar} \left.\frac{\delta W\left[J\right]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = \frac{i}{\hbar} \frac{\langle 0|\, \hat{\varphi}\, |0\rangle}{\langle 0|\, 0\rangle}.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\delta W\left[J\right]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = \frac{\langle 0|\, \hat{\varphi}\, |0\rangle}{\langle 0|\, 0\rangle} \equiv G_1(x). \tag{1.19}$$

Вторая производная даёт

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{Z}\left[0\right]} \left.\frac{\delta^2 \mathcal{Z}\left[J\right]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} &= \frac{i}{\hbar} \left.\frac{\delta^2 W\left[J\right]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left.\frac{\delta W\left[J\right]}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W\left[J\right]}{\delta J(x_2)}\right|_{J=0} = \\ &= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \frac{\langle 0|\, T\left(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\right) |0\rangle}{\langle 0|\, 0\rangle} \equiv \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 G_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

откуда находим

$$G_2(x_1, x_2) = G_1(x_1) G_1(x_2) + \overline{G}_2(x_1, x_2),$$

где связная двухточечная ФГ

$$\overline{G}_2(x_1, x_2) \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right) \left.\frac{\delta^2 W\left[J\right]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0}. \tag{1.20}$$

Аналогично третья производная приводит к соотношению

$$G_3(x_1,x_2,x_3) \equiv \frac{\langle 0|\, T\left(\hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\hat{\varphi}(x_3)\right)|0\rangle}{\langle 0|\, 0\rangle} =$$
$$= G_1(x_1)G_1(x_2)G_1(x_3) + \left[\overline{G}_2(x_1,x_2)G_1(x_3) + \overline{G}_2(x_1,x_3)G_1(x_2) + \right.$$
$$\left. + \overline{G}_2(x_2,x_3)G_1(x_1)\right] + \overline{G}_3(x_1,x_2,x_3),$$

где связная трехточечная ФГ

$$\overline{G}_3(x_1,x_2,x_3) \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \left.\frac{\delta^3 W\left[J\right]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)}\right|_{J=0}. \tag{1.21}$$

Продолжая этот процесс до n-го шага, получим связную n-точечную ФГ:

$$\overline{G}_n(x_1,x_2,...,x_n) \equiv \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{n-1} \left.\frac{\delta^n W\left[J\right]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)...\delta J(x_n)}\right|_{J=0}. \tag{1.22}$$

Таким образом, действительно, $W\left[J\right]$ является производящим функционалом для вычисления связных ФГ, через которые, в свою очередь, строятся полные ФГ (1.9).

Основной задачей в излагаемом подходе к КТП, как следует из предыдущего, является вопрос о представлении континуальным интегралом основного объекта – производящего функционала $W\left[J\right]$. Для её решения воспользуемся тесной аналогией между КТП и квантовой механикой. Как мы увидим ниже, это позволит построить амплитуду перехода в КТП, что, в свою очередь, приведёт нас к представлению функционала $W\left[J\right]$ через КИ. Начнём с того, что поле, в принципе, отличается от квантовомеханической системы лишь тем, что первое имеет континуум степеней свободы, в то время как последняя - конечное (или счётное) число степеней свободы. Это приводит к следующей тесной аналогии: аналогом системы операторов координаты q_i в квантовой механике является полевой оператор в шредингеровском представлении $\hat{\varphi}(\vec{x})$, где аналогом дискретного индекса i служит "континуальный"индекс $\vec{x}$. Далее по аналогии строим уравнение на собственные функции – собственные значения:

$$\hat{q}_i\left|q_i\right\rangle = q_i\left|q_i\right\rangle \Leftrightarrow \hat{\Phi}(\vec{x})\left|\Phi(\vec{x})\right\rangle = \Phi(\vec{x})\left|\Phi(\vec{x})\right\rangle,$$

где собственные значения $\Phi(\vec{x})$, помечаемые "континуальным"индексом $\vec{x}$, являются обычными числовыми функциями и называются полевыми конфигурациями. По аналогии с АП в квантовой механике $\left\langle q_i'', t'' \middle| q_i', t' \right\rangle$ можно определить амплитуду перехода из полевой конфигурации $\Phi_1(\vec{x})$ в момент t' в полевую конфигурацию $\Phi_2(\vec{x})$ в момент t'' в КТП:

$$\left\langle \Phi_2(\vec{x}), t'' \middle| \Phi_1(\vec{x}), t' \right\rangle = \left\langle \Phi_2(\vec{x})\right| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t''-t')}\left|\Phi_1(\vec{x})\right\rangle, \tag{1.23}$$

где оператор Гамильтона $\hat{H}(\hat{\pi},\hat{\varphi})$ определён нами в (1.4). По аналогии с квантовой механикой, (1.23) представляется, в свою очередь, через КИ в гамильтоновой форме:

$$\left\langle \Phi_2(\vec{x}), t^{''} \middle| \Phi_1(\vec{x}), t^{'} \right\rangle = \mathcal{N}_1 \int\limits_{\Phi(\vec{x}),t'')=\Phi_2(\vec{x}),\Phi(\vec{x}),t')=\Phi_1(\vec{x})} \mathcal{D}\pi(\vec{x},t)\mathcal{D}\varphi(\vec{x},t)\times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left[\pi\dot{\Phi} - \mathcal{H}(\pi,\varphi) \right] \right\}, \tag{1.24}$$

где $\mathcal{H}(\pi,\varphi)$ – плотность классической функции Гамильтона. Всегда ли можно перейти от гамильтоновой (1.24) к фенмановской форме, проинтегрировав (1.24) по импульсам? В простом случае (1.6) - интеграл по импульсам гауссов. Он легко вычисляется, и в результате получаем представление АП в фейнмановской форме:

$$\left\langle \Phi_2(\vec{x}), t^{''} \middle| \Phi_1(\vec{x}), t^{'} \right\rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi(\vec{x},t) \times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right\}.$$

$$\Phi(\vec{x}, t^{''}) = \Phi_2(\vec{x}), \Phi(\vec{x}, t^{'}) = \Phi_1(\vec{x}). \tag{1.25}$$

Однако в целом ряде случаев задача перехода от (1.24) к (1.25) нетривиальна. К таковым, например, относятся полевые системы с наложенными на них связями (калибровочные теории). Характерным признаком таких теорий является наличие в них циклических полевых координат. Мы не будем касаться здесь проблемы квантования калибровочных полей. Идеи для дальнейшего продвижения вперёд даёт энергетическое представление АП (1.23) в операторном формализме:

$$\left\langle \Phi_2(\vec{x}), t^{''} \middle| \Phi_1(\vec{x}), t^{'} \right\rangle = \sum_n \left\langle \Phi_2 \left| n \right\rangle \left\langle n \right| \Phi_1 \right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t^{''} - t^{'})}. \tag{1.26}$$

Если перейти, как в статистической квантовой механике, к евклидовому пространству (аналитическое продолжение на мнимую ось времени) $\tau \equiv it$ (действительное), то (1.26) переходит в

$$\left\langle \Phi_2(\vec{x}), \tau^{''} \middle| \Phi_1(\vec{x}), \tau^{'} \right\rangle = \sum_n \left\langle \Phi_2 \left| n \right\rangle \left\langle n \right| \Phi_1 \right\rangle e^{-\frac{1}{\hbar} E_n (\tau^{''} - \tau^{'})}, \tag{1.27}$$

откуда следует

$$\lim_{\tau'' - \tau' \to \infty} \left\langle \Phi_2(\vec{x}), \tau^{''} \middle| \Phi_1(\vec{x}), \tau^{'} \right\rangle = \left\langle \Phi_2 \left| 0 \right\rangle \left\langle 0 \right| \Phi_1 \right\rangle \equiv \Psi_0 \left[\Phi_2 \right] \Psi_0^* \left[\Phi_1 \right], \tag{1.28}$$

где $\Psi_0 \left[\Phi_2 \right], \Psi_0 \left[\Phi_1 \right]$ – волновые функции вакуума, построенные на конфигурациях $\Phi_1(\vec{x})$ и $\Phi_2(\vec{x})$. Аналитически продолжая формулу (1.25) на мнимую ось и комбинируя её с (1.28), получим

$$\Psi_0 \left[\Phi_2 \right] \Psi_0^* \left[\Phi_1 \right] = N \cdot \int\limits_{\Phi(\vec{x}),\tau''=+\infty)=\Phi_2(\vec{x}),\Phi(\vec{x}),\tau'=-\infty)=\Phi_1(\vec{x})} \mathcal{D}\Phi(\vec{x},\tau) e^{-\frac{i}{\hbar} S_E[\Phi]}, \tag{1.29}$$

где евклидово действие (1.29) для случая, например, простой системы (1.6)

$$S_E[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\vec{\nabla} \Phi \right)^2 + m^2 \Phi^2 \right] + V(\Phi) \right\}. \tag{1.30}$$

При обратном переходе в пространство Минковского граничные условия, представляемые в (1.29), имеют вид

$$\Phi(\vec{x}, t^{''} = +i\infty) = \Phi_2(\vec{x}), \Phi(\vec{x}, t^{'} = -i\infty) = \Phi_1(\vec{x}),$$

что означает, что вакуумная конфигурация $\Phi_2(\vec{x})$ задаётся в прошлом, $\Phi_1(\vec{x})$ - в будущем. Левая часть (1.29) есть $\langle 0 \,| 0 \rangle$, и для того чтобы построить $\mathcal{Z}[J] = \langle 0^+ |\, 0^- \rangle_J$, необходимо ввести в КИ (1.25) источники. Для этого плотность лагранжиана в подынтегральной экспоненте (1.25)

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \to \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + J(x)\Phi(x). \tag{1.31}$$

Далее вводим адиабатическую гипотезу на языке континуального интеграла. Для этого переходим к евклидову пространству с учётом того, что роль лагранжиана играет(1.31), и считаем, что источники включаются адиабатически в евклидовом прошлом $-T > \tau^{'}$ и выключаются адиабатически в евклидово будущем $T < \tau^{''}$.

Тогда мы вправе записать для АП при включённых источниках:

$$\left\langle \Phi_2, \tau^{''} \,\middle|\, \Phi_1, \tau^{'} \right\rangle_J = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^{'} \left\langle \Phi_2, \tau^{''} \,| \Phi, T \right\rangle \left\langle \Phi, T \,\middle|\, \Phi^{'}, -T \right\rangle_J \left\langle \Phi^{'}, -T \,\middle|\, \Phi_1, \tau^{'} \right\rangle. \tag{1.32}$$

Для амплитуд, не зависящих от источников, получим, переходя к энергетическому представлению,

$$\lim_{(\tau^{''} - T) \to \infty} \left\langle \Phi_2, \tau^{''} \,| \Phi, T \right\rangle = \lim \sum_n \langle \Phi_2 |\, n \rangle \langle n |\, \Phi \rangle \, e^{-\frac{1}{\hbar}(\tau^{''} - T)E_n} = \langle \Phi_2 |\, 0 \rangle \langle 0 |\, \Phi \rangle \,,$$

$$\lim_{(\tau^{'} - T) \to \infty} \left\langle \Phi^{'}, -T \,| \Phi_1, \tau \right\rangle = \lim \sum_n \left\langle \Phi^{'} \middle|\, n \right\rangle \langle n |\, \Phi_1 \rangle \, e^{-\frac{1}{\hbar}(-T - \tau^{'})E_n} = \left\langle \Phi^{'} \middle|\, 0 \right\rangle \langle 0 |\, \Phi_1 \rangle \,,$$

откуда, воспользовавшись (1.32), получим

$$\lim_{\tau^{''} \to +\infty, \quad \tau^{'} \to -\infty} \frac{\left\langle \Phi_2, \tau^{''} \,\middle|\, \Phi_1, \tau^{'} \right\rangle}{\langle \Phi_2 |\, 0 \rangle \langle 0 |\, \Phi_1 \rangle} = \lim_{T \to \infty} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\Phi^{'} \, \langle 0 |\, \Phi \rangle \left\langle \Phi, T |\, \Phi^{'}, -T \right\rangle \left\langle \Phi^{'} \,| 0 \right\rangle = \left\langle 0^+ \,| 0^- \right\rangle_J. \tag{1.33}$$

Таким образом, используя (1.25), (1.29) и (1.33), можно выразить $\mathcal{Z}[J]$ в виде КИ в четырёхмерном евклидовом пространстве:

$$\mathcal{Z}_E[J] = e^{-\frac{1}{\hbar} W_E[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} \left(S_E[\Phi] - \int d^4x_E J \cdot \Phi \right) \right\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{ -\frac{1}{\hbar} S_E[\Phi] \right\}}. \tag{1.34}$$

Отметим, что граничные условия на самом деле не играют роли, поскольку не входят в левую часть (1.34). Ниже, на ряде примеров будет показано, что, хотя формально эти условия и задаются в правой части (1.34), при вычислении ФГ (1.9) знание их конкретного вида не требуется.

Для вычисления функционалов $\mathcal{Z}[J]$ и $W[J]$ (1.17) необходимо сделать аналитическое преобразование (поворот в t или k_0 плоскостях) к пространству Минковского. При этом, однако, возникает проблема обхода полюса первого порядка, который появляется в результате аналитического продолжения на реальной оси t или k_0 (в точках $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, например, в случае массивного скалярного поля с лагранжианом (1.5)).

Можно показать, что правила обхода этих полюсов эквивалентны таким правилам вычисления производящего функционала (1.17) непосредственно в пространстве Минковского, при котором функциональный интеграл (1.34) при аналитическом продолжении в пространство Минковского заведомо сходится. Последнее достигается с помощью так называемой ε-процедуры

$$\mathcal{Z}[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(S[\Phi, i\varepsilon] + \int d^4xJ \cdot \Phi\right)\right\}}{\int \mathcal{D}\Phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\Phi, i\varepsilon]\right\}}, \tag{1.35}$$

где функционал действия, например для случая массивного скалярного поля с лагранжианом (1.5), имеет вид:

$$S[\Phi, i\varepsilon] = \int d^4x \left\{\frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - (m^2 - i\varepsilon)\Phi^2\right] - V(\Phi)\right\}. \tag{1.36}$$

Вводимый в лагранжиан "руками"член, содержащий малый параметр $\varepsilon \to +0$, приводит, с одной стороны, к заведомой сходимости (1.35), с другой стороны, даёт нужные правила обхода полюсов первого порядка в выражении для фейнмановского пропагатора (см. ниже пункт 1.3) .

1.2 Функциональные гауссовы интегралы по бозе- и ферми-полям

В настоящем разделе будут приведены полезные и нужные нам в дальнейшем формулы вычисления гауссовых интегралов в теории поля. При этом подразумевается, что гауссов интеграл в евклидовом пространстве сходится непосредственно, а в пространстве Минковского – с помощью ε-процедуры.

Начнём со случая действительного скалярного поля. При задании в евклидовом пространстве квадратичной формы по полям наиболее общего вида

$$Q[\varphi] = \frac{1}{2}\int\int d^4x_E d^4y_E \varphi(x_E)A(x_E, y_E)\varphi(y_E) - \int d^4x_E J(x_E)\varphi(x_E), \tag{1.37}$$

где $A(x_E, y_E) = A(y_E, x_E)$ – функциональная матрица квадратичной формы, для гауссового интеграла имеет место формула

$$\int \mathcal{D}\varphi(\vec{x}, \tau)e^{-Q[\varphi]} = \mathcal{N}[\det A]^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\iint d^4x_E d^4y_E J(x_E)A^{-1}(x_E, y_E)J(y_E)\right\}. \tag{1.38}$$

В случае комплексного скалярного поля Φ, Φ^*, эквивалентного двум действительным скалярным полям φ_1, φ_2:

$$\Phi = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad \Phi^* = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}},$$

при задании квадратичной формы по полям вида

$$Q\left[\Phi^*, \Phi\right] = \iint d^4x_E d^4y_E \Phi^*(x_E) A(x_E, y_E) \Phi(y_E) - \int d^4x_E (J^*\Phi + \Phi^* J) \tag{1.39}$$

вычисление гауссового интеграла приводит к результату

$$\int \mathcal{D}\Phi^*(\vec{x}, \tau)\mathcal{D}\Phi(\vec{x}, \tau) e^{-Q[\Phi^*, \Phi]} = \mathcal{N}\left[\det A\right]^{-1} \cdot e^{-\iint d^4x_E d^4y_E J^*(x_E) A^{-1}(x_E, y_E) J(y_E)}. \tag{1.40}$$

При вычислении гауссового интеграла (1.38) непосредственно в пространстве Минковского с помощью ε-процедуры получим

$$\int \mathcal{D}\varphi(\vec{x}, t) e^{iQ[\varphi, i\varepsilon]} = \mathcal{N}\left[\det A\right]^{-1/2} \cdot e^{-i/2 \iint d^4x_E d^4y_E J(x) \left[A(x,y) + i\varepsilon\delta^{(4)}(x-y)\right]^{-1} J(y)}, \tag{1.41}$$

где

$$Q\left[\varphi, i\varepsilon\right] = \frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \varphi(x) \left[A(x, y) + i\varepsilon\delta^{(4)}(x - y)\right] \varphi(y) + \int d^4x J(x)\varphi(x). \tag{1.42}$$

Аналогично может быть выписана формула и для вычисления гауссова интеграла (1.40) в пространстве Минковского.

Возникающий в правых частях формул для гауссовых интегралов $\det\left[A(x, y)\right]$ понимается как произведение всех собственных значений оператора

$$\begin{gathered} A(x, y)\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \\ det\left[A(x, y)\right] \equiv \prod_n \lambda_n. \end{gathered} \tag{1.43}$$

Перейдём к случаю ферми-полей. Свободные ферми-поля могут быть описаны в КТП дираковским лагранжианом

$$L = \int d^3\vec{x} \quad \overline{\Psi}(\vec{x}, t)(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\Psi(\vec{x}, t) \tag{1.44}$$

и для канонически сопряжённого импульса дираковскому 4-спинору $\Psi(\vec{x}, t)$, как координате, получим согласно (1.2)

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 \Psi(\vec{x}, t))} = i\Psi^+(\vec{x}, t), \tag{1.45}$$

причём на квантовую теорию накладываются соотношения, связанные с антикоммутацией полей и импульсов:

$$\left\{\Psi(\vec{x}, t), \Psi^+(\vec{y}, t')\right\}_{t \neq t'} = \hbar\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{1.46}$$

Необычность объекта $\Psi(x)$ видна уже из того, что (1.46) в "классическом"пределе $\hbar \to 0$ переходит в

$$\left\{\Psi(x), \Psi^{+}(y)\right\} = 0,$$

что означает, что мы в случае ферми-полей в "классическом"пределе имеем дело с величинами, подчиняющимися алгебре Грассмана:

$$\{\theta_1, \theta_2\} = 0, \quad \{\theta_1, \theta_1\} = \theta_1^2 = 0, \quad \{\theta_2, \theta_2\} = \theta_2^2 = 0. \tag{1.47}$$

Как построить производящий функционал типа (1.35) для ферми-полей? Впервые такая задача в формализме континуального интеграла была поставлена и решена более 40 лет назад замечательным советским математиком Ф. А. Берёзиным. "Классическим"объектом в созданном им формализме являются образующие алгебры Грассмана. Поскольку классические ферми-поля в природе отсутствуют, то по таким полям обязательно должна быть проведена интеграция. Наблюдаемыми являются ФГ, в которые входят попарные комбинации полей типа $\Psi(x), \overline{\Psi}(y)$.

Следуя Берёзину, рассмотрим вначале две грассмановы переменные, на которых реализуется алгебра (1.47). Тогда для функций от этих переменных, как легко видеть, имеет место разложение

$$f(\theta_1, \theta_2) = C_0 + C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + C_3\theta_1\theta_2, \tag{1.48}$$

где C_i – комплексные числа. Операция интегрирования постулируется в виде так называемых правил Берёзина:

$$\int d\theta_1 = \int d\theta_2 \equiv= 0, \quad \int d\theta_1\theta_1 = \int d\theta_2\theta_2 \equiv 1, \tag{1.49}$$

при этом $\{d\theta_1, \theta_1\} = \{d\theta_1, \theta_2\} = \{d\theta_2, \theta_1\} = \{d\theta_2, \theta_2\} = \{d\theta_1, d\theta_2\} = 0$. Используя (1.48), (1.49), получаем правило "сдвижки"аргумента:

$$\int d\theta f(\theta - \theta_0) = \int d\theta f(\theta), \tag{1.50}$$

а также легко вычисляем интеграл

$$\begin{aligned} \int d\theta_2 \int d\theta_1 f(\theta_1, \theta_2) &= \int d\theta_2 \int d\theta_1 \left[C_0 + C_1\theta_1 + C_2\theta_2 + C_3\theta_1\theta_2\right] = \\ &= C_3 \int d\theta_2 \int d\theta_1\theta_1\theta_2 = C_3 \int \theta_2\theta_2 \int d\theta_1\theta_1 = C_3. \end{aligned} \tag{1.51}$$

В частности, для функции вида

$$f(\theta_1, \theta_2) = e^{A\theta_1\theta_2} = 1 + A\theta_1\theta_2 \tag{1.52}$$

имеем

$$\int d\theta_2 \int d\theta_1 e^{A\theta_1\theta_2} = \int d\theta_2 \int d\theta_1 (1 + A\theta_1\theta_2) = A. \tag{1.53}$$

Обобщим полученные результаты на случай системы $2n$ грассмановых переменных:

$$\theta^*_\alpha, \theta_\alpha (\alpha = 1, 2, ..., n), \quad \{\theta^*_\alpha, \theta_\beta\} = \left\{\theta^*_\alpha, \theta^*_\beta\right\} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0. \tag{1.54}$$

Рассмотрим квадратичную форму на этих грассмановых переменных:

$$S\left[\theta^*, \theta\right] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \theta^*_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta, \tag{1.55}$$

где $A_{\alpha\beta}$ – симметричная $(n \times n)$ матрица. С помощью ортогонального преобразования мы всегда можем перейти к таким полям η_α, где

$$S\left[\theta^*, \theta\right] \to S\left[\eta^*, \eta\right] = \sum_{\alpha=1}^{n} B_\alpha \eta^*_\alpha \eta_\alpha, \tag{1.56}$$

и при переходе (1.56)

$$\int \prod_\alpha d\theta_\alpha d\theta^*_\alpha e^{S[\theta^*,\theta]} = \int \prod_\alpha d\eta_\alpha d\eta^*_\alpha e^{S[\eta^*,\eta]}. \tag{1.57}$$

Заметим, что экспонента под интеграллом разлагается в полином

$$e^S = 1 + S + \frac{1}{2!} S^2 + ... + \frac{1}{n!} S^n, \tag{1.58}$$

где последний член в полиноме имеет вид

$$S^n = \sum_{\alpha_1=1}^{n} ... \sum_{\alpha_n=1}^{n} B_{\alpha_1} ... B_{\alpha_n} (\eta^*_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1}) ... (\eta^*_{\alpha_n} \eta_{\alpha_n}) =$$

$$= n! \prod_{\alpha=1}^{n} B_\alpha (\eta^*_\alpha \eta_\alpha), \tag{1.59}$$

где $n!$ – полное число перестановок пар $(\eta^*_\alpha \eta_\alpha)$.

Следуя правилам Берёзина (1.49), получим для (1.57) с учётом (1.59)

$$\int \prod_\alpha d\theta_\alpha d\theta^*_\alpha e^{S[\theta^*,\theta]} = \int \prod_\alpha d\eta_\alpha d\eta^*_\alpha \cdot \frac{S^n}{n!} =$$

$$= (-1)^n \cdot \prod_{\alpha=1}^{n} B_\alpha = (-1)^n \cdot \det A. \tag{1.60}$$

Распространение (1.60) на случай квадратичной формы наиболее общего вида

$$Q\left[\theta^*, \theta\right] = \sum_{\alpha,\beta} \theta^*_\alpha A_{\alpha\beta} \theta_\beta - \sum_\alpha (J^*_\alpha \theta_\alpha + \theta^*_\alpha J_\alpha) \tag{1.61}$$

приводит к формуле

$$\int \prod_{\alpha} d\theta_{\alpha} d\theta_{\alpha}^{*} e^{Q[\theta^*,\theta]} = (-1)^n \cdot \det A \cdot e^{-J^* A^{-1} J}. \tag{1.62}$$

Наконец, расширение на КТП даёт для гауссового интеграла по ферми-полям от квадратичной формы вида

$$Q\left[\overline{\Psi}, \Psi\right] = \iint d^4x d^4y \overline{\Psi}(x) A(x,y) \Psi(y) + \int d^4x (\overline{\eta}\Psi + \overline{\Psi}\eta) \tag{1.63}$$

в пространстве Минковкого формулу

$$\int \mathcal{D}\Psi(x)\mathcal{D}\overline{\Psi}(x) e^{iQ\left[\overline{\Psi},\Psi\right]} = \mathcal{N}_1 \det \hat{A} e^{-\int \overline{\eta}\hat{A}^{-1}\eta \cdot d^4x}. \tag{1.64}$$

Формула (1.64) является базовой при вычислении производящего функционала по ферми-полям:

$$\mathcal{Z}\left[\overline{\eta}, \eta\right] = e^{i/\hbar W[\overline{\eta},\eta]} = \frac{\int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\overline{\Psi} e^{i/\hbar\left\{S\left[\overline{\Psi},\Psi\right] + \int d^4x(\overline{\eta}\Psi + \overline{\Psi}\eta)\right\}}}{\int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\overline{\Psi} e^{i/\hbar S\left[\overline{\Psi},\Psi\right]}}, \tag{1.65}$$

где $S\left[\overline{\eta}, \eta\right] = \int \mathcal{L}(\overline{\Psi}, \Psi, \partial_\mu\Psi) d^4x$ –действие на ферми-полях.

Рецепт вычисления гауссового интеграла (1.64) гарантирует как верное выражение для фейнмановского пропагатора ферми-полей с указанием правил обхода полюсов, так и появление множителя (-1) для каждой замкнутой фермионной петли при формулировке диаграммных правил Фейнмана.

1.3 Производящий функционал для свободных бозе- и ферми-полей. Фейнмановский пропагатор

Для вычисления производящего функционала $W_c\left[J\right]$ свободного бозе-поля с действием

$$S_0\left[\varphi, i\varepsilon\right] = \frac{1}{2}\int d^4x \left[(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2\right] \tag{1.66}$$

удобно перейти в импульсное пространство

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \tilde{\varphi}(p) e^{ipx}, \\ \delta^{(4)}(x - x') &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & S_0\left[\varphi, i\varepsilon\right] + \int d^4x J(x)\varphi(x) = \\ = & \frac{1}{2}\int d^4p \left\{ \tilde{\varphi}'(p)\left[p^2 - m^2 + i\varepsilon\right]\tilde{\varphi}'(-p) - \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\varphi}^{'}(p) = \tilde{\varphi}(p) + \frac{\tilde{J}(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{1.68}$$

что означает, как легко увидеть с помощью (1.67) следующую замену переменных в x-пространстве:

$$\varphi^{'}(x) = \varphi(x) + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{J}(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ipx}. \tag{1.69}$$

Учитывая, что при замене (1.69)

$$\mathcal{D}\varphi^{'} = \mathcal{D}\varphi, \tag{1.70}$$

получим

$$e^{i/\hbar W_0}[J] = \exp\left\{-i/2\hbar \int d^4p \frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right\}, \tag{1.71}$$

откуда при переходе в x-пространство

$$W_0[J] = -\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y). \tag{1.72}$$

Здесь фейнмановский пропагатор (ФП)

$$\Delta_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{1.73}$$

Выясним физический смысл ФП. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$(\Box_x + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x), \tag{1.74}$$

что означает, что ФП есть функция Грина уравнения Клейна-Гордона:

$$(\Box_x + m^2)\varphi(x) = 0.$$

Ответим на вопрос, каким образом распространяется ФГ, которой отвечает ФП (1.72). Закон распространения задаёт ε-процедура обхода полюса. Действительно, явно вычисляя интеграл по p_0 в (1.73), имеем

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0x_0}}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} =$$
$$= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left[\theta(x_0)e^{-iE_+|x_0| + i\vec{p}\vec{x}} + \theta(-x_0)e^{-iE_-|x_0| + i\vec{p}\vec{x}}\right], \tag{1.75}$$

где $E_+ = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $E_- = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $\theta(x)$-функция Хевисайда. Из последнего выражения следует, что ФП $\Delta_F(x)$ описывает движение частицы ($E = E_+$) вперёд во времени ($X_0 > 0$) и античастицы ($E = E_-$) назад во времени ($x_0 < 0$).

Покажем теперь, что мы придём к тому же результату для ФП, вычисляя $W_0\,[J]$ непосредственно по формуле (1.41), как гауссов интеграл. Применение этой формулой даёт для $W_0\,[J]$ выражение

$$e^{\frac{i}{\hbar}W_0[J]} = \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar}\int d^4x J(x)\frac{1}{\Box - m^2 + i\varepsilon}J(x)\right\}, \tag{1.76}$$

где $\Box \equiv -\partial_\mu\partial^\mu = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \vec{\nabla}^2$ – оператор Деламбера. Переходя в правой части (1.76) к импульсному пространству, получим

$$\int d^4x J(x)\frac{1}{\Box - m^2 + i\varepsilon}J(x) = \int d^4p\frac{\tilde{J}(p)\tilde{J}(-p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}J(x),$$

что при подстановке в (1.76) приводит, как и следовало ожидать, к формуле (1.71), из которой следует выражение для ФП (1.73). Выражение для фейнмановского пропагатора свободных ферми-полей получим, подставляя формулу для гауссового интеграла (1.64) в (1.65). Учтём при этом, что действие на свободных дираковских полях

$$S_0\left[\overline{\Psi}, \Psi, i\varepsilon\right] = \int d^4x\overline{\Psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m + i\varepsilon)\Psi. \tag{1.77}$$

Подстановка приводит к результату

$$e^{\frac{i}{\hbar}W_0[\overline{\eta},\eta]} = e^{-\int d^4x\overline{\eta}(x)\frac{1}{i\partial_\mu\gamma^\mu - m + i\varepsilon}}\eta(x),$$

откуда для производящего функционала

$$\begin{aligned} W_0\left[\overline{\eta}, \eta\right] &= -\int d^4p\overline{\eta}(p)\frac{-i}{\hat{p} - m + i\varepsilon}\eta(p)d^4p = \\ &= -\int d^4x d^4y\overline{\eta}(x)\hat{S}_F(x-y)\eta(y), \end{aligned}$$

где фейнмановский пропагатор дираковских полей

$$\hat{S}_F(x-y) = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i}{\hat{p} - m + i\varepsilon}e^{-ip(x-y)} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{-i(\hat{p}+m)e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{1.78}$$

Возвращаясь к формуле (1.22), видим, что в случае свободных полей единственной связной функцией Грина является двухточечная и она связана простым соотношением с ФП:

$$\overline{G}_2(x,y) = i\hbar\Delta_F(x-y), \tag{1.79}$$

$$\hat{\overline{G}}_2(x,y) = i\hbar\hat{S}_F(x-y), \tag{1.80}$$

где (1.79) соответствует бозе, а (1.80) ферми-полям соответственно.

Глава 2

Теория возмущений по константе связи. Диаграммная техника Фейнмана

В случае малой константы связи взаимодействия полей в нетривиальной КТП для вычисления связанных функций Грина используется аппарат теории возмущений при разложении в ряд по степеням малой константы связи. Мы изложим этот аппарат в случае квантовой модели вещественного скалярного поля $\varphi(x)$ с плотностью лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - V(\varphi), \tag{2.1}$$

где потенциал

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \quad (d = 4), \quad V(\varphi) = \frac{\lambda}{3!}\varphi^3 \quad (d = 6), \tag{2.2}$$

d - размерность пространства-времени с метрикой Минковского, λ - константа самодействия полей (константа связи), числовой коэффициент выбран в целях удобства вычислений.

Отметим, что выбор потенциалов (2.2) диктуется тем, что λ - безразмерен для таких потенциалов. В дальнейшем мы будем работать в обычном пространстве Минковского ($d = 4$) с потенциалом

$$V(\varphi) = \lambda/4!\varphi^4$$

в предположении $\lambda \ll 1$.

Производящий функционал для связных ФГ такой модели имеет вид:

$$e^{iW[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS_0[\varphi]} e^{-i\langle V(\varphi)\rangle_x} e^{i\langle J\varphi\rangle_x}}{\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS_0[\varphi]} e^{-i\langle V(\varphi)\rangle_x}}, \tag{2.3}$$

где $S_0[\varphi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right]$ – действие свободного скалярного поля,

$$\langle F(x, y, ...)\rangle_{x,y} \equiv \int d^4x \int d^4y ... F(x, y, ...) \tag{2.4}$$

– удобные обозначения для интегралов по полному пространству-времени Минковского. Пользуясь определением вариационной производной:

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} \equiv \frac{\partial F[J(y)]}{\partial J} \delta^{(4)}(x-y), \tag{2.5}$$

можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \langle J\varphi \rangle_y = \varphi(x), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i\langle J\varphi \rangle_y} = \varphi(x) e^{i\langle J\varphi \rangle_y} \tag{2.7}$$

$$V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{i\langle J\varphi \rangle_y} = V(\varphi(x)) e^{i\langle J\varphi \rangle_y}, \tag{2.8}$$

$$\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x e^{i\langle J\varphi \rangle_y} = \langle V(\varphi(x))\rangle_x \, e^{i\langle J\varphi \rangle_y}, \tag{2.9}$$

$$e^{-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x} e^{i\langle J\varphi \rangle_y} = e^{-i\langle V(\varphi(x))\rangle_x} \times e^{i\langle J\varphi \rangle_y}. \tag{2.10}$$

Подставляя полученное соотношение (2.10) в выражение (2.3) производящего функционала, получим

$$e^{iW[J]} = e^{-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x} \times \frac{\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS_0[\varphi] - \langle J\varphi \rangle_x}}{\int \varphi(x) e^{iS_0[\varphi] - \langle V(\varphi)\rangle_x}},$$

где оператор функциональной производной по источнику вынесен за континуальный интеграл по полям. Это выражение нетрудно привести к виду:

$$e^{iW[J]} = e^{-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x} \times e^{iW_0[J]} \times \mathcal{K}[0]. \tag{2.11}$$

Здесь

$$e^{iW_0[J]} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS_0[\varphi] - \langle J\varphi \rangle_x}}{\int \varphi(x) e^{iS_0[\varphi]}}$$

– производящий функционал свободного скалярного поля,

$$\mathcal{K}[0] \equiv \frac{\int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS_0[\varphi]}}{\int \varphi(x) e^{iS_0[\varphi] - \langle V(\varphi)\rangle_x}} \tag{2.12}$$

– континуальный интеграл, не зависящий (!) от источников.

Напомним, что производящий функционал свободной теории находится, как интеграл от фейнмановского пропагатора:

$$W_0[0] = -\frac{1}{2} \langle J_1 \Delta(1-2) J_2 \rangle_{1,2}. \tag{2.13}$$

Выражая ПФ теории $W[J]$ из соотношения (2.11), получим

$$W[J] = W_0[0] - i\ln(1+\delta[J]) - i\ln\mathcal{K}[0], \tag{2.14}$$

где

$$\delta[J] \equiv e^{-iW_0[J]} \times \left[e^{-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x} - 1\right] \times e^{iW_0[J]}. \tag{2.15}$$

Заметим,что при вычислении ФГ из ПФ (2.14) :

$$\overline{G}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}\Bigg|_{J=0} \tag{2.16}$$

не зависящий от источников член $(-i\ln\mathcal{K}[0])$ не даст вклада.

Далее, поскольку оператор

$$-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right\rangle_y = -i\lambda\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4\right\rangle_y,$$

в случае $\lambda \ll 1$ оператор в квадратных скобках в (2.15) может быть разложен в ряд Тейлора:

$$\left[e^{-i\left\langle V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x} - 1\right] = -i\frac{\lambda}{4!}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x +$$
$$+\frac{1}{2!}\frac{(-i\lambda)}{4!}\frac{(-i\lambda)}{4!}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x \left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4\right\rangle_y + O(\lambda^3).$$

Таким образом, функционал $\delta[J]$ может быть представлен бесконечным рядом по константе связи:

$$\delta[J] = \lambda\cdot\delta_1[J] + \lambda^2\cdot\delta_2[J] + O(\lambda^3). \tag{2.17}$$

Здесь

$$\delta_1[J] = \frac{-i}{4!}e^{-iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x e^{iW_0[J]}, \tag{2.18}$$

$$\delta_2[J] = \frac{1}{2!}\frac{(-i)}{4!}\frac{(-i)}{4!}e^{-iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x \left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4\right\rangle_y e^{iW_0[J]} \tag{2.19}$$

и мы ограничились порядком λ^2 при разложении $\delta[J]$ в ряд по малой константе $\lambda \ll 1$.

Подставим функционал $\delta[J]$ в (2.14) и воспользуемся разложением в ряд до нужного порядка:

$$\ln(1+\delta[J]) = \delta[J] - \frac{1}{2}\delta[J]^2 + \frac{1}{3}\delta[J]^3 + ... =$$
$$= \lambda\delta_1[J] + \lambda^2\left[\delta_2[J] - \frac{1}{2}\delta_1^2[J]\right] + O(\lambda^3).$$

Таким образом,

$$W\left[J\right] = W_0\left[J\right] - i\lambda\delta_1\left[J\right] - i\lambda^2(\delta_2\left[J\right] - \frac{1}{2}\delta_1^2\left[J\right]) + O(\lambda^3), \tag{2.20}$$

задача нахождения связных ФГ (2.16) в нужном порядке ($O(\lambda^3)$ в нашем случае) теории возмущений по константе связи сводится к вычислению функционалов $\delta_1\left[J\right]$ (2.18) и $\delta_2\left[J\right]$ (2.19) при известном выражении для производящего функционала (2.13) ФГ свободного поля.

В выражении $\delta_2\left[J\right]$ можно сделать тождественную единице вставку:

$$\left\langle ... \right\rangle_x \left\langle ... \right\rangle_y = \left\langle ... \right\rangle_x e^{iW_0[J]} e^{-iW_0[J]} \left\langle ... \right\rangle_y ,$$

после чего нетрудно получить:

$$\begin{gathered}\delta_2\left[J\right] = \frac{1}{2!}\frac{-i}{4!}e^{-iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x\left\{e^{iW_0[J]}\delta_1\left[J\right]\right\} = \\ = \frac{1}{2!}\frac{-i}{4!}e^{-iW_0[J]}\left\{e^{iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x\delta_1\left[J\right] + \right. \\ +4\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x e^{iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\right\rangle_x\delta_1\left[J\right] + \\ +6\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\right\rangle_x e^{iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2\right\rangle_x\delta_1\left[J\right] + \\ \left. +4\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3\right\rangle_x e^{iW_0\ [J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x\delta_1\left[J\right] + \underline{\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x e^{iW_0[J]}\delta_1\left[J\right]}\right\}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Последний (подчёркнутый) член в выражении $\delta_2\left[J\right]$:

$$\frac{1}{2!}\frac{-i}{4!}e^{-iW_0[J]}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x e^{iW_0[J]}\cdot\delta_1\left[J\right] = \frac{1}{2!}\delta_1^2\left[J\right]. \tag{2.22}$$

Подставим в выражения δ_1 (2.18) и δ_2 (2.21) выражение W_0 (2.13) и вычислим функциональные производные.

Ниже мы выписываем все необходимые нам функциональные производные:

$$\begin{gathered}\left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\rangle_x e^{-iW_0[J]} = \left\langle\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right\rangle_x e^{-\frac{i}{2}\left\langle J_1\Delta_{12}J_2\right\rangle_{1,2}} = \\ = -\left\langle J_1\Delta_{1x}\right\rangle_{1,x} e^{-iW_0[J]}.\end{gathered} \tag{2.23}$$

Здесь мы учли, что вариационная производная по $J(x)$ от $J(x_1), \quad J(x_2)$ вычисляется независимо, что даёт коэффициент 2.

Аналогично

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^2 \right\rangle_x e^{-iW_0[J]} = \left[\langle J_1 J_2 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\rangle_{1,2,x} + i\,\langle \Delta_{xx}\rangle_x\right] e^{-iW_0[J]}, \tag{2.24}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 \right\rangle_x e^{-iW_0[J]} = \left[\langle J_1 J_2 J_3 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\Delta_{3x}\rangle_{1,2,3,x} - 3i\,\langle J_1 \Delta_{1x}\Delta_{xx}\rangle_{1,x}\right] e^{-iW_0[J]}, \tag{2.25}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 \right\rangle_x e^{-iW_0[J]} = \Big[\langle J_1 J_2 J_3 J_4 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\Delta_{3x}\Delta_{4x}\rangle_{1,2,3,4,x} +$$
$$+\underline{6i\,\langle J_1 J_2 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\Delta_{xx}\rangle_{1,2,x}} - 3\left\langle \Delta_{xx}^2\right\rangle_x\Big] e^{-iW_0[J]}. \tag{2.26}$$

Всякий раз при вычислении производной мы должны следить за факториальными коэффициентами. Так, коэффициент 6 в подчёркнутом члене (2.26) возникает следующим образом. Вычисление производной $\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)$ от произведения $(-J(x_1)J(x_2)J(x_3))$ даёт $3iJ(x_1)J(x_2)$, поскольку вариации от каждого источника вычисляются независимо. Такой же член получим, вычисляя $(-3iJ(x_1)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{-iW_0[J]}$.

Подставляя (2.26) в (2.18), получим

$$\delta_1[J] = \frac{1}{4!}\Big[-i\,\langle J_1 J_2 J_3 J_4 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\Delta_{3x}\Delta_{4x}\rangle_{1,2,3,4,x} +$$
$$+ 6\,\langle J_1 J_2 \Delta_{1x}\Delta_{2x}\Delta_{xx}\rangle_{1,2,x} + \underline{3i\left\langle \Delta_{xx}^2\right\rangle}\Big]. \tag{2.27}$$

Таким образом, входящий в производящий функционал $W[J]$ (2.20) $\delta_1[J]$ даст вклад $\sim \lambda$ в ФГ $\overline{G}^{(2)}$, $\overline{G}^{(4)}$, причём подчёркнутый член не даёт вклада, поскольку не зависит от источников. Используя полученное выражение $\delta_1[J]$ (2.27), вычисляем далее:

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) \right\rangle_y \delta_1[J] = -\frac{i}{2}\,\langle J_a \Delta_{ax}\Delta_{xx}\Delta_{xy}\rangle_{x,y,a} -$$
$$-\frac{1}{6}\,\langle J_a J_b J_c \Delta_{ax}\Delta_{bx}\Delta_{cx}\Delta_{xy}\rangle_{a,b,c,x,y}, \tag{2.28}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^2 \right\rangle_y \delta_1[J] = -\frac{1}{2}\left\langle \Delta_{xx}\Delta_{xy}^2\right\rangle_{x,y} +$$
$$+\frac{i}{2}\left\langle J_a J_b \Delta_{ax}\Delta_{bx}\Delta_{xy}^2\right\rangle_{a,b,x,y}, \tag{2.29}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^3 \right\rangle_y \delta_1[J] = \left\langle J_a \Delta_{ax}\Delta_{xy}^3\right\rangle_{a,x,y}, \tag{2.30}$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)^4 \right\rangle_y \delta_1[J] = -i\left\langle \Delta_{xy}^4\right\rangle_{x,y}. \tag{2.31}$$

Подставляя все вычисленные производные в выражение для связной части

$$\delta_2^c[J] = \delta_2[J] - \frac{1}{2}\delta_1^2[J], \tag{2.32}$$

с учётом (2.21),(2.22), получим

$$\delta_2^c[J] = \frac{1}{2}\frac{-i}{4!}\Big\{-4\left\langle J_1\Delta_{1y}\Delta^3_{yx}\Delta_{x2}J_2\right\rangle_{1,2,x,y} - 6\left\langle J_1J_2\Delta_{1y}\Delta_{2y}\Delta^2_{yx}\Delta_{xx}\right\rangle_{1,2,x,y} -$$
$$-6\left\langle J_1\Delta_{1x}\Delta_{xx}\Delta_{yx}\Delta_{yy}\Delta_{y2}J_2\right\rangle_{1,2,x,y} + 4i\left\langle J_1\Delta_{1x}\Delta_{xx}\Delta_{yx}\Delta_{y2}\Delta_{y3}\Delta_{y4}J_2J_3J_4\right\rangle_{1,2,3,4,x,y} +$$
$$+3i\left\langle J_1J_2\Delta_{1y}\Delta_{2y}\Delta^2_{yx}\Delta_{x3}\Delta_{x4}J_3J_4\right\rangle_{1,2,3,4,x,y} +$$
$$+\frac{2}{3}\left\langle J_1J_2J_3\Delta_{1y}\Delta_{2y}\Delta_{3y}\Delta_{yx}\Delta_{x4}\Delta_{x5}\Delta_{x6}J_4J_5J_6\right\rangle_{1,2,3,4,5,6,x,y} -$$
$$\underline{-i\left\langle\Delta^4_{xy}\right\rangle_{x,y} - 3i\left\langle\Delta^2_{xy}\Delta_{xx}\Delta_{yy}\right\rangle_{x,y}}\Big\}. \tag{2.33}$$

Таким образом, входящий в производящий функционал $W[J]$ (2.20) δ_2^c даст $\sim\lambda^2$ вклад в ФГ $\overline{G}^{(2)},\overline{G}^{(4)},\overline{G}^{(6)}$, причём подчёркнутые члены не дают вклада, поскольку не содержат источников.

Далее мы подставляем (2.13), (2.27), (2.31) в выражение производящего функционала :

$$W[J] = W_0[J] - i\lambda\delta_1[J] - i\lambda^2\delta_2^c[J] + O(\lambda^3).$$

Как следует из вида $\delta_1[J], \delta_2[J]$, в данной модели КТП не равны нулю лишь связные ФГ с чётным числом точек $\overline{G}^{(2)},\overline{G}^{(4)},\overline{G}^{(6)}$ и. т. д. Ниже мы вычислим явно двух- и четырёхточечные ФГ:

$$\overline{G}^{(2)}(x_1,x_2) = \frac{1}{i}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\bigg|_{J=0}, \tag{2.34}$$

$$\overline{G}^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{\delta^4 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\bigg|_{J=0}. \tag{2.35}$$

С учётом (2.13), (2.27), (2.31), вычисляя функциональные производные (2.34), (2.35) в пределе $J\to 0$, получим:

$$\overline{G}^{(2)}(x_1,x_2) = i\Delta(x_1-x_2) - \frac{\lambda}{2}\int d^4x\Delta(x_1-x)\Delta(x-x)\Delta(x-x_2) -$$
$$-\frac{i\lambda^2}{6}\iint d^4xd^4y\Delta(x_1-x)\Delta^3(x-y)\Delta(y-x_2) -$$
$$-\frac{i\lambda^2}{4}\iint d^4xd^4y\Delta(x_1-x)\Delta(x_2-x)\Delta^2(x-y)\Delta(y-y) -$$
$$-\frac{i\lambda^2}{4}\iint d^4xd^4y\Delta(x_1-x)\Delta(x-x)\Delta(x-y)\Delta(y-y)\Delta(y-x_2) + O(\lambda^3), \tag{2.36}$$

$$\overline{G}^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -i\lambda\int d^4x\Delta(x_1-x)\Delta(x_2-x)\Delta(x_3-x)\Delta(x_4-x) +$$
$$+\left[\frac{\lambda^2}{2}\iint d^4xd^4y\Delta(x_1-x)\Delta(x_2-x)\Delta^2(x-y)\Delta(y-x_3)\Delta(y-x_4) + (x_2\leftrightarrow x_3) + (x_2\leftrightarrow x_4)\right] +$$
$$+\left[\frac{\lambda^2}{2}\iint d^4xd^4y\Delta(x_1-x)\Delta(x-x)\Delta(x-y)\Delta(y-x_2)\Delta(y-x_3)\Delta(y-x_4) +\right.$$
$$\left. + (x_1\leftrightarrow x_2) + (x_1\leftrightarrow x_3) + (x_1\leftrightarrow x_4)\right] + O(\lambda^3). \tag{2.37}$$

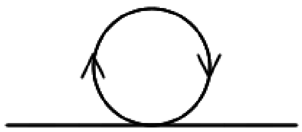
В выражении для $\overline{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ указаны все неэквивалентные перестановки вершин. Второй член в (2.37) описывает переход $(1) \to (2,3,4)$, ему соответствуют три неэквивалентные перестановки: $(2) \to (1,3,4)$, $\quad (3) \to (1,2,4)$, $\quad (4) \to (1,2,3)$.

Функции Грина (2.36),(2.37) могут быть получены простыми правилами диаграммной техники Фейнмана, которые мы приводим ниже.

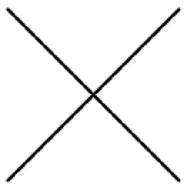
Правила диаграммной техники для модели скалярного поля с самодействием $\lambda\varphi^4$

Элементы диаграммной техники:

$\equiv i\Delta(x_1 - x_2)$ – линия



$\equiv \int d^4x (i\Delta(x - x))$ – петля

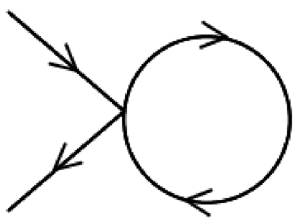


$\equiv -\frac{i\lambda}{4!}$ – вершина.

Мы выбираем одну вершину (порядок ТВ λ), две вершины (порядок ТВ λ^2) и т. д. и строим из вершин все неэквивалентные замкнутые графы, используя линии и петли.

Построение $\overline{G}^{(2)}(x_1, x_2)$

0-порядок ТВ



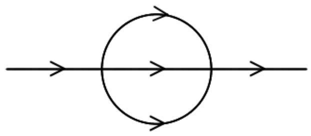
1-порядок ТВ

Факториальный коэффициент $= 4$(количество способов выбрать точку x_1) $\times 3$ (количество способов выбрать точку x_2).

Функциональное выражение:

$$4 \cdot 3 \cdot \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x(i\Delta(x_1 - x))(i\Delta(x - x))(i\Delta(x - x_2)) =$$
$$= -\frac{\lambda}{2} \int d^4x\Delta(x_1 - x)\Delta(x - x)\Delta(x - x_2)$$

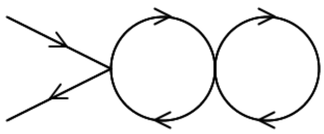
2-й порядок ТВ



Факториальный коэффициент = 4(число способов выбрать точку x_1 в одной вершине)×4(число способов выбрать точку x_2 во второй вершине)×3×2(число способов соединения шести концов тремя линиями)

Функциональное выражение:

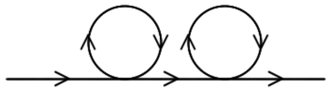
$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{-i\lambda}{4!}\frac{-i\lambda}{4!} \iint d^4xd^4y(i\Delta(x_1 - x))(i\Delta(x - y))^3(i\Delta(x_2 - x)) =$$
$$= -\frac{i\lambda^2}{6} \iint d^4xd^4y\Delta(x_1 - x)\Delta^3(x - y)\Delta(y - x_2)$$



Факториальный коэффициент = 4(выбор точки x_1 в одной вершине)×3(выбор точки x_2 в ней же)×4 (первая линия в первой петле)×3(вторая линия в первой петле)

Функциональное выражение:

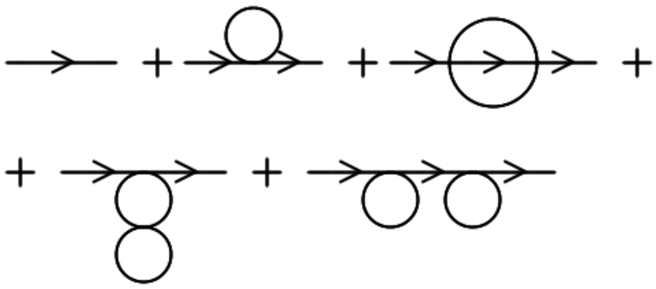
$$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{-i\lambda}{4!}\frac{-i\lambda}{4!} \iint d^4xd^4y(i\Delta(x_1 - x))(i\Delta(x_2 - x))\times$$
$$\times(i\Delta(x - y))^2(i\Delta(y - y)) =$$
$$= -\frac{i\lambda^2}{4} \iint d^4xd^4y\Delta(x_1 - x)\Delta(x_2 - x)\Delta^2(x - y)\Delta(y - y)$$



Функциональное выражение:

$$4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{-i\lambda}{4!}\frac{-i\lambda}{4!} \iint d^4x d^4y (i\Delta(x_1 - x))(i\Delta(x - x)) \times$$
$$\times (i\Delta(x - y))(i\Delta(y - y))(i\Delta(y - x_2)) =$$
$$= -\frac{i\lambda^2}{4} \iint d^4x d^4y \Delta(x_1 - x)\Delta(x_2 - x)\Delta(x - y)\Delta(y - y)\Delta(y - x_2).$$

Таким образом, на "языке"диаграмм Фейнмана $\overline{G}^2(x_1, x_2)$ с точностью до $O(\lambda^3)$:



(2.38)

Отметим, что удобнее вычислять ФГ и составлять правила Фейнмана не в координатном, а в импульсном представлении. Это нетрудно сделать переходом к фурье-представлении пропагатора:

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{2.39}$$

2.1 Контрольные задания

1. Вычисляя интегралы по p_0 с помощью теоремы о вычетах, показать, что фейнмановский пропагатор свободных бозе- и ферми-полей причинный, т. е. описывает распространение сигнала с положительной энергией вперёд по времени и с отрицательной энергией - назад по времени.

2. Используя изложенную выше технику, построить четырёхточечную функцию Грина для вещественного скалярного поля как сумму диаграмм Фейнмана.

3. Сформулировать правила диаграммной техники для модели скалярного поля с самодействием $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 (d = 4)$ в импульсном пространстве и найти $\overline{G}^2(p_1, p_2), \overline{G}^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

4. Найти функционал $W[J]$ в порядке $O(\lambda^3)$ для модели скалярного поля с самодействием $\frac{\lambda}{3!}\varphi^3 (d = 6)$. Вычислить ФГ $\overline{G}^2, \overline{G}^4$ в этой модели.

5. Сформулировать правила Фейнмана и найти, используя их, $\overline{G}^2, \overline{G}^4$ для модели скалярного поля с самодействием $\frac{\lambda}{3!}\varphi^3 (d = 6)$.

Литература

1. Фейнман, Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хиббс. — М. : ИО НФМИ, 1998. — 380 с.
2. Фейнман, Р. Статистическая механика / Р. Фейнман. — М. : Платон, 2000. — 408 с.
3. Берёзин, Ф. А. Метод вторичного квантования / Ф. А. Берёзин. — М. : Наука, 1986. — 318 с.
4. Ициксон, К. Квантовая теория поля : в 2 т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. — М. : Мир, 1984. — 448 с.
5. Васильев, А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике / А. Н. Васильев. — Л. : ЛГУ, 1976. — 295 с.

Учебное издание

Гвоздев Александр Александрович
Сабитов Александр Андреевич

Континуальный интеграл в квантовой теории поля и теории конденсированных сред

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка А. А. Гвоздев, А. А. Сабитов

Подписано в печать 29.06.2018. Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,6. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 2 экз.

Оригинал макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003 Ярославль, ул. Советская, 14.