Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической физики

А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина

Нейтринные процессы во внешнем магнитном поле в технике матрицы плотности

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению Физика

Ярославль 2012

УДК 539.123(072)
ББК В 382я73
Г25

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года

Рецензент:

кафедра теоретической физики ЯрГУ им. П. Г. Демидова

Г25 **Гвоздев, А. А. Нейтринные процессы во внешнем магнитном поле в технике матрицы плотности**: методические указания / А. А. Гвоздев, И. С. Огнев, Е. В. Осокина; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2012. — 48 с.

В методических указаниях излагается техника расчета электрослабых процессов во внешнем магнитном поле на примере нейтринных процессов, имеющих важные астрофизические приложения. Техника вычислений основана на представлении матрицы плотности заряженной частицы в внешнем магнитном поле.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлениям 010700.68, 011200.68 Физика (дисциплина «Квантовые процессы во внешних полях», цикл М2), очной формы обучения.

Библиогр.: 8 назв.

Работа выполнена в рамках государственного задания вузу (проект № 2.4176.2011), при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-02-00394-а).

УДК 539.123(072)
ББК В 382я73

Оглавление

1. Введение

Исследование нейтринных процессов в сильном магнитном поле и плотной горячей плазме в настоящее время — одно из интенсивно развиваемых разделов космофизики. Не претендуя на полноту, отметим, что интерес к данной тематике в определенной степени связан с численным расчетом асимметричного взрыва сверхновой с коллапсом центральной части, прежде всего, в магниторотационной модели взрыва, предложенной Г.С. Бисноватым-Коганом в 1970 году. В этой модели напряженность магнитного поля в областях оболочки сверхновой с сильной магниторотационной неустойчивостью может достичь $B \sim 10^{16}$ Гс за типичные времена в несколько секунд. Вследствие нарушения Р-четности в процессах взаимодействия нейтрино со средой оболочки, ей может быть передан существенный макроскопический импульс вдоль вектора напряженности магнитного поля. Этот импульс оказывается достаточно большим, чтобы влиять на динамику сверхновой. В частности, эффект взаимодействия нейтрино со средой может приводить к возникновению аномально больших линейных скоростей, обнаруженных у части пульсаров [1, 2].

Другими компактными астрофизическими объектами, которые связывают с сильными магнитными полями, являются две родственные по наблюдательным данным группы одиночных нейтронных звезд — источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (Soft Gamma-ray Repeaters, SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (Anomalous X-ray Pulsars, AXP). Если считать, что основными потерями вращательного момента этих звезд являются магнито-дипольные, то напряженность магнитного поля на их поверхности составляет $B_0 \sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс. Наблюдательные данные по этим объектам приведены в обзоре [3]. Для описания наблюдательных данных была предложена магнитарная модель [4, 5]. В гигантских вспышках SGR в γ-квантах за типичные времена $\Delta t \sim 100$ сек излучается громадная энергия $\Delta E \sim 10^{44} - 10^{46}$ эрг. Предполагается, что источником такой энергии является клубок плазмы, удерживаемый сильным магнитным полем звезды. Детальный анализ потерь энергии плазмы на нейтринное излучение приводит к новому ограничению на напряженность магнитного поля магнитара [6].

В условиях оболочки сверхновой с коллапсом центральной части доминирующими процессами переизлучения электронных нейтрино являются URCA-процессы:

$$\nu_e + n \rightleftarrows e^- + p, \tag{1.1}$$
$$\tilde{\nu}_e + p \rightleftarrows e^+ + n, \tag{1.2}$$
$$n \rightleftarrows p + e^- + \tilde{\nu}_e, \tag{1.3}$$

последний из которых, β-распад нейтрона, кинематически подавлен. Основными процессами рождения нейтрино произвольных ароматов и их диффузии в среде оболочки являются: процесс аннигиляции электрон-позитронной пары в пару нейтрино произвольного аромата:

$$e^+ + e^- \to \nu_i + \tilde{\nu}_i,\ (i = e, \mu, \tau), \tag{1.4}$$

комптоноподобный процесс рассеяния нейтрино на электронах (позитронах) среды:

$$\nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^\mp \to \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^\mp, \tag{1.5}$$

а также практически упругий процесс рассеяния нейтрино на нуклонах:

$$\nu_i(\tilde{\nu}_i) + N \to \nu_i(\tilde{\nu}_i) + N,\ (N = n, p) \tag{1.6}$$

В присутствии магнитного поля необходимо учесть не только изменение фазового объема заряженных частиц, но и модификацию квадратов S-матричных элементов процессов (1.1) – (1.6) с заряженными частицами, которые, вследствие нарушения P-четности в слабых взаимодействиях, содержат асимметрию по отношению к направлению магнитного поля. Кроме того, в магнитном поле становятся кинематически возможными новые нейтринные процессы, наиболее существенными из которых в условиях оболочки сверхновой являются: процесс синхротронного излучения пары нейтрино

$$e^\mp \xrightarrow{B} e^\mp + \nu_i\tilde{\nu}_i,\ (i = e, \mu, \tau), \tag{1.7}$$

а также обратный к нему процесс рождения одиночным нейтрино электрон-позитронной пары

$$\nu_i(\tilde{\nu}_i) \xrightarrow{B} \nu_i(\tilde{\nu}_i) + e^+ + e^-, \tag{1.8}$$

Здесь символ B над стрелкой подчеркивает, что данные процессы возможны лишь в присутствии магнитного поля.

Отметим, что электрон-позитронная плазма, которая порождает гигантскую вспышку SGR в магнитарной модели, прозрачна для нейтрино. По этой причине основными процессами ее нейтринного излучения в сильном магнитном поле магнитара являются реакции (1.4) и (1.7).

Важно отметить, что наибольший интерес для астрофизики представляют не вероятности и сечения процессов, а интегральные характеристики, такие как скорость процесса (число переходов в единичном объеме за единицу времени):

$$\Gamma = \frac{1}{V} \sum_i \prod_i dn_i f_i \sum_f \prod_f dn_f (1 - f_f) \frac{|S_{if}|^2}{\tau}, \tag{1.9}$$

а также 4-импульс, уносимый в реакции нейтрино из единичного объема среды в единицу времени:

$$\frac{dP_\alpha^{(\nu)}}{dV\,dt} = \frac{1}{V} \sum_i \prod_i dn_i f_i \sum_f \prod_f dn_f\,(1 - f_f) k_\alpha\,\frac{|S_{if}|^2}{\tau}. \tag{1.10}$$

Здесь суммирование ведется по полному фазовому объему всех начальных (i) и всех конечных (f) частиц, участвующих в реакции, f_i, f_f – их функции распределения, $|S_{if}|^2/\tau$ – квадрат S-матричного элемента процесса в единицу времени, k_α – 4-импульс, уносимый нейтрино в реакции, V – нормировочный объем. Скорость процесса (1.9) позволяет вычислить средние времена пробега нейтрино в среде в нейтринопоглощающих реакциях:

$$\overline{\tau}_\nu = \frac{n_\nu}{\Gamma}, \tag{1.11}$$

где n_ν – локальная концентрация нейтрино, ноль-компонента 4-вектора (1.10) определяет нейтринную светимость, а компонента (1.10) вдоль направления магнитного поля – асимметрию в процессах переизлучения нейтрино. Отметим также, что в низкоэнергетическом пределе ($q^2 \ll m_W^2$, где q^2 – квадрат переданного в реакции 4-импульса, m_W – масса W - бозона), который хорошо выполняется практически во всех астрофизических приложениях, указанные выше нейтринные процессы являются одновершинными, поскольку описываются в этом пределе эффективной $(V - A)$ теорией.

В данных указаниях подробно излагается явно ковариантная техника вычисления (1.9), (1.10) для одновершинных нейтринных процессов при использовании матрицы плотности заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Здесь ковариантность подразумевает равноправие инерциальных систем отсчета при преобразованиях Лоренца вдоль по направлению напряженности поля. Привлекательность такой техники заключается в том, что она полностью подобна известной технике вычисления Фейнмановских диаграмм в вакууме, что позволяет быстро ее освоить и самостоятельно вычислить (1.9), (1.10) в постоянном магнитном поле, по крайней мере, в одновершинных слабых процессах с заряженными частицами.

Матрица плотности заряженной релятивистской частицы в постоянном магнитном поле давно привлекала интерес исследователей. Заметим, что в импульсном пространстве она должна быть определена так, чтобы в бесполевом пределе при суммировании по поляризациям заряженной частицы с положительной энергией получить хорошо известное выражение

$$\hat{\rho}^{(+)} = \hat{p} + m\mathbb{I}, \tag{1.12}$$

где $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$, γ^μ – матрицы Дирака.

Выражение для такой ковариантной (в смысле преобразований Лоренца вдоль по полю) матрицы плотности заряженной частицы в постоянном магнитном поле отсутствует в литературе.

В пособии используется естественная система единиц, в которой $c = \hbar = k = 1$.

2. Алгебра γ-матриц Дирака во внешнем магнитном поле

Для любой частицы с импульсом p_μ, находящейся в электромагнитном поле, можно ввести удобный для анализа квантовых процессов с ее участием базис. Заметим, что конфигурация чисто магнитного поля, наиболее важная в приложении к астрофизическим объектам, обладает набором специфических свойств, использование которых существенно упрощает расчеты конкретных реакций.

Из электродинамики известно, что электромагнитное поле может быть задано тензором напряженностей $F_{\mu\nu}$. В дополнение к нему также вводится дуально сопряженный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}/2$. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль вектора напряженности постоянного однородного магнитного поля $\vec{B} = (0, 0, B)$. В такой системе отсчета тензоры $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ имеют следующий вид:

$$F_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{F}_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

В дальнейшем удобно пользоваться не самим тензором электромагнитного поля и дуальным к нему тензором, а их безразмерными аналогами:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{B}, \qquad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{F}_{\mu\nu}}{B}, \tag{2.2}$$

явный вид которых в выбранной нами системе отсчета представлен числовыми матрицами в формуле (2.1). Также удобно использовать коварианты, составленные из этих тензоров и 4-вектора импульса заряженной частицы, в параллельном $(0, 3)$ и перпендикулярном $(1, 2)$ подпространствах.

Представляет интерес проанализировать алгебру введенных безразмерных тензоров (2.2). Начнем с бинарных произведений:

$$\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\rho}\, \varphi^{\rho}{}_{\nu}, \qquad \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\, \tilde{\varphi}^{\rho}{}_{\nu}. \tag{2.3}$$

В отличие от антисимметричных тензоров $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$, тензоры $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ симметричны в соответствии с общими свойствами сверток тензоров. В выбранной нами системе координат эти тензоры имеют следующий явный вид:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Из явного представления тензоров видно, что они не являются линейно независимыми, а связаны друг с другом посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

Проведенный анализ показывает, что наличие внешнего постоянного однородного магнитного поля естественным образом разбивает четырехмерное пространство Минковского на два непересекающихся подпространства: двумерное евклидово подпространство с метрическим тензором $\Lambda_{\mu\nu}$, ортогональное вектору напряженности магнитного поля $\vec{B}$, и двумерное псевдоевклидово подпространство с метрическим тензором $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Безразмерные тензоры электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ играют роль тензоров Леви-Чивита (полностью антисимметричных тензоров) этих подпространств и обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}, \\ \varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} &= \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - \Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для введенного набора тензоров справедливы следующие бинарные соотношения:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}\varphi)_{\mu\nu} &= (\tilde{\varphi}\Lambda)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\varphi)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\Lambda)_{\mu\nu} = 0, \\ (\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \qquad (\Lambda\Lambda)_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu\nu}, \\ (\tilde{\Lambda}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} &= \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \qquad (\Lambda\varphi)_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

При проведении вычислений оказывается удобным ввести специальные обозначения для каждого из подпространств: $\perp$ —для евклидова подпространства с метрикой $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\|$ — для псевдоевклидова подпространства с метрикой $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. При таком соглашении произвольный 4-вектор $A^\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ можно разбить на две ортогональные составляющие:

$$A_\mu = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}A^\nu - \Lambda_{\mu\nu}A^\nu = A_{\|\mu} - A_{\perp\mu}, \tag{2.8}$$

где $A^\mu_\| = (A_0, 0, 0, A_3)$ и $A^\mu_\perp = (0, A_1, A_2, 0)$ в соответствии со свойством (2.5). Такое разбиение позволяет ввести скалярное произведение векторов в каждом подпространстве по отдельности:

$$\begin{aligned} (AB) &= (AB)_\| - (AB)_\perp, \\ (AB)_\| &= (A\tilde{\Lambda}B) = A^\mu\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}B^\nu, \\ (AB)_\perp &= (A\Lambda B) = A^\mu\Lambda_{\mu\nu}B^\nu, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где A_μ и B_μ — произвольные 4-векторы.

Деление четырехмерного пространства на два непересекающихся подпространства приводит к модификации свойств γ-матриц. Будем обозначать γ-матрицы продольного подпространства как $\gamma^\mu_\| = \tilde{\Lambda}^{\mu\nu}\gamma_\nu$, а поперечного подпространства как $\gamma^\mu_\perp = \Lambda^{\mu\nu}\gamma_\nu$.

Введем проекционные операторы фермиона Π_σ:

$$\Pi_\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{i\sigma}{2}\,(\gamma\varphi\gamma)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \sigma i\,\gamma_1\gamma_2\right], \tag{2.10}$$

где учтен явный вид тензора $\varphi_{\mu\nu}$ (2.2) в выбранной системе отсчета. Соответственно, $\sigma = +1$ отвечает фермионному состоянию со спином, направленным по магнитному полю, а $\sigma = -1$ — состоянию со спином против магнитного поля. Отметим следующие мультипликативные и аддитивные свойства проекционных операторов:

$$\Pi_\sigma\Pi_\sigma = \Pi_\sigma, \qquad \Pi_\sigma\Pi_{-\sigma} = 0, \qquad \Pi_\sigma + \Pi_{-\sigma} = 1, \tag{2.11}$$

а также их коммутационные свойства по отношению к γ-матрицам:

$$\Pi_\sigma\gamma_\parallel^\mu = \gamma_\parallel^\mu\Pi_\sigma, \qquad \Pi_\sigma\gamma_\perp^\mu = \gamma_\perp^\mu\Pi_{-\sigma}. \tag{2.12}$$

Последнее свойство интересно тем, что если встречается конструкция следующего вида $\Pi_\sigma\gamma^\mu\Pi_\sigma$, то эффективно от γ-матрицы остается только ее продольная составляющая $\gamma_\parallel^\mu$, а в случае конструкции $\Pi_{-\sigma}\gamma^\mu\Pi_\sigma$ — ее поперечная часть $\gamma_\perp^\mu$.

Отметим также коммутативность проекционных операторов Π_σ с матрицей γ_5:

$$\Pi_\sigma\gamma_5 = \gamma_5\Pi_\sigma. \tag{2.13}$$

Широко используемой операцией является взятие шпура произведения некоторого числа γ-матриц. В случае сильного магнитного поля вычисление шпуров эффективно реализуется только в $\|$-подпространстве. Как и в обычном четырехмерном пространстве, в $\|$-подпространстве шпур нечетного числа γ-матриц равен нулю, а несколько первых шпуров четного числа — следующие:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}\{\Pi_\sigma\} = 2, \qquad \mathrm{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu\gamma_\parallel^\nu\Pi_\sigma\} = 2\tilde\Lambda^{\mu\nu},\\
&\mathrm{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu\gamma_\parallel^\nu\gamma_\parallel^\rho\gamma_\parallel^\tau\Pi_\sigma\} = 2[\tilde\Lambda^{\mu\nu}\,\tilde\Lambda^{\rho\tau} + \tilde\Lambda^{\mu\tau}\,\tilde\Lambda^{\nu\rho} - \tilde\Lambda^{\mu\rho}\,\tilde\Lambda^{\nu\tau}],\\
&\mathrm{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu\gamma_\parallel^\nu\gamma_5\Pi_\sigma\} = 2\sigma\tilde\varphi^{\mu\nu},\\
&\mathrm{Sp}\{\gamma_\parallel^\mu\gamma_\parallel^\nu\gamma_\parallel^\rho\gamma_\parallel^\tau\gamma_5\Pi_\sigma\} = 2\sigma[\tilde\Lambda^{\mu\nu}\,\tilde\varphi^{\rho\tau} + \tilde\varphi^{\mu\nu}\,\tilde\Lambda^{\rho\tau}].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Оказываются полезными и другие часто встречающиеся соотношения для γ-матриц в продольном подпространстве:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel}^{\mu} = 2,\\
&\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel}^{\nu}\gamma_{\parallel}^{\mu} = 0,\\
&\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel}^{\nu}\gamma_{\parallel}^{\rho}\gamma_{\parallel}^{\mu} = 2\gamma_{\parallel}^{\rho}\gamma_{\parallel}^{\nu},\\
&\gamma_{\parallel}^{\mu}\gamma_{\parallel}^{\nu}\gamma_{\parallel}^{\rho} = \tilde{\Lambda}^{\mu\nu}\,\gamma_{\parallel}^{\rho} + \tilde{\Lambda}^{\nu\rho}\,\gamma_{\parallel}^{\mu} - \tilde{\Lambda}^{\mu\rho}\,\gamma_{\parallel}^{\nu},\\
&(\tilde{\varphi}\gamma)^{\mu}\,\Pi_{\sigma} = -\sigma\gamma_{\parallel}^{\mu}\gamma_5\Pi_{\sigma}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Легко показать, что свертка двух $\gamma_{\parallel}$-матриц, между которыми находится любое нечетное число $\gamma_{\parallel}$-матриц, обращается в нуль.

Отметим также следующее соотношение для γ-матриц в $\perp$-подпространстве:

$$\gamma_{\perp}^{\alpha}\gamma_{\perp}^{\beta}\Pi_{\sigma} = -\left(\Lambda^{\alpha\beta} - i\sigma\varphi^{\alpha\beta}\right)\Pi_{\sigma}. \tag{2.16}$$

Это свойство, так же как и свойства (2.15), позволяет эффективно снизить количество γ-матриц при вычислениях шпуров.

Отличительная особенность приведенной техники состоит в том, что она не только позволяет упростить вычисление шпуров, но и сохраняет ковариантность полученных таким способом выражений.

3. Волновая функция

В данном разделе найдено простейшее решение уравнения Дирака для фермиона с зарядом ϱe ($e > 0$ – элементарный заряд, ϱ – величина заряда в единицах элементарного вместе со знаком) в постоянном однородном внешнем магнитном поле.

Уравнение Дирака для фермиона во внешнем электромагнитном поле с 4-потенциалом $A_\mu = A_\mu(\mathbf{r}, t)$ имеет вид:

$$\left[i\hat{\partial} - \varrho e\hat{A} - m\right]\Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{3.1}$$

где $\hat{\partial} = \partial_\mu\gamma^\mu$ и $\hat{A} = A_\mu\gamma^\mu$.

Решения этого уравнения для случая постоянного однородного магнитного поля $\mathbf{B}$ получили свое наибольшее приложение в астрофизике. В частности, на поверхности пульсаров обнаружены достаточно сильные магнитные поля $B \sim 10^{13} - 10^{14}$ Гс, а согласно теоретическим моделям, в ядрах таких пульсаров напряженности полей могут быть на два-три порядка больше. В связи с этим, непосредственный интерес представляют не просто точные решения уравнения Дирака в магнитном поле, а их асимптотика в случае экстремально больших напряженностей.

Для решения уравнения (3.1) выберем систему координат таким образом, чтобы вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{B}$ был направлен по оси Oz, а векторный потенциал $\mathbf{A}$ – по оси Oy. В такой калибровке 4-потенциал внешнего магнитного поля можно представить в виде:

$$A^{\mu} = (0, 0, xB, 0). \tag{3.2}$$

Для решения поставленной задачи удобно ввести функцию $\Phi(\mathbf{r}, t)$, которая является решением квадрированного уравнения Дирака:

$$\left[\left(i\hat{\partial} - \varrho e\hat{A}\right)^2 - m^2\right]\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{3.3}$$

при этом точное решение уравнения (3.1) связано с функцией $\Phi(\mathbf{r}, t)$ соотношением:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[i\hat{\partial} - \varrho e\hat{A} + m\right]\Phi(\mathbf{r}, t). \tag{3.4}$$

Найдем явный вид функции $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Используя известное свойство произведения двух γ-матриц – $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = g_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор и $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]/2$, а также условие Лоренца для 4-потенциала – $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$, квадрированное уравнение (3.3) приводится к виду:

$$\left[-\partial^2 - 2i\varrho e(A\partial) + \varrho^2 e^2 A^2 + \frac{i}{2}\varrho e(\sigma F) - m^2\right]\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{3.5}$$

где $F_{\mu\nu}$ – тензор внешнего магнитного поля, и $(\sigma F) = \sigma_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$. Можно показать, что $(\sigma F) = -2iB\Sigma_3$, где Σ_3 – проекция релятивистского оператора спина фермиона на ось Oz. Будем считать, что функция $\Phi(\mathbf{r}, t)$ является собственной функцией оператора Σ_3:

$$\Sigma_3\Phi_s(\mathbf{r}, t) = s\Phi_s(\mathbf{r}, t), \tag{3.6}$$

где собственное значение s имеет смысл удвоенного среднего значения проекции спина фермиона. Тогда оператор в квадрированном уравнении (3.5) становится пропорциональным единичной матрице пространства Дирака, что позволяет фактически перейти от матричного к скалярному уравнению. Принимая во внимание явный вид 4-потенциала (3.2), распишем явно квадрированное уравнение (3.5) в выбранной нами системе координат:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \triangle - 2i\varrho eBx\frac{\partial}{\partial y} - \varrho^2 e^2 B^2 x^2 + \varrho eBs - m^2\right]\Phi_s(\mathbf{r},t) = 0, \quad (3.7)$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа. Оператор уравнения (3.7) не зависит явно от времени, поэтому функция $\Phi(\mathbf{r},t)$ является стационарным решением этого уравнения и описывает квантовую частицу с сохраняющимся значением энергии E_n. Поскольку приведенное уравнение (3.7) имеет явную зависимость только от переменной x, то оператор этого уравнения будет коммутировать с операторами $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$. Эти дифференциальные операторы определены в лоренцевском 4-пространстве-времени, поэтому они также будут коммутировать и с оператором Σ_3, являющимся постоянной величиной в этом пространстве. Исходя из вышесказанного, будем искать положительно частотное решение уравнения (3.7) в виде:

$$\Phi_s^{(+)}(\mathbf{r},t) = f(x)\,\mathrm{e}^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}\,u_s \quad (3.8)$$

как собственную функцию трех операторов:

$$\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Sigma_3 \quad (3.9)$$

с собственными значениями p_2, p_3 и s соответственно. Будем также считать, что биспинор u_s является решением уравнения (3.6).

Подставляя решение (3.8) в уравнение (3.5) и вводя вместо x новую безразмерную переменную $\eta = \sqrt{|\varrho|eB}(x - p_2/\varrho eB)$, получим следующее уравнение для функции $f(x)$:

$$\left[\frac{d^2}{d\eta^2} - \eta^2 + \frac{E_n^2 - p_3^2 - m^2 + \varrho eBs}{|\varrho|eB}\right] f(\eta) = 0. \quad (3.10)$$

Полученное уравнение по виду совпадает с уравнением Шредингера для одномерного гармонического осциллятора. Из нерелятивистской квантовой механики известно, что собственные функции такого уравнения обращаются в нуль при $\eta \to \infty$, когда собственные значения пропорциональны положительным целым нечетным числам:

$$\frac{E_n^2 - p_3^2 - m^2 + \varrho eBs}{|\varrho|eB} = 2\nu + 1, \quad (3.11)$$

где $\nu = 0, 1, \ldots$ – целое неотрицательное число. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид:

$$f_\nu(\eta) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-\eta^2/2}\,H_\nu(\eta), \quad (3.12)$$

где $H_\nu(\eta)$ – полиномы Эрмита, а $\mathcal{N}$ – нормировочный множитель. В итоге точные решения квадрированного уравнения Дирака и соответствующий им спектр энергии можно записать в виде:

$$\Phi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}\,\mathrm{e}^{-\eta^2/2} H_\nu(\eta)\, u_s, \qquad (3.13)$$

$$E_n^2 = p_3^2 + m^2 + 2|\varrho|eBn, \quad n = \nu + \frac{1}{2}\left(1 - \rho s\right), \qquad (3.14)$$

где введены главное квантовое число n, нумерующее энергетические уровни заряженного фермиона в магнитном поле (уровни Ландау) и принимающее целые неотрицательные значения, и знак заряда фермиона $\rho = \varrho/|\varrho|$. Из выражения для энергии (3.14) следует, что спектр энергии фермиона имеет двукратное вырождение по квантовому числу s при $n \geq 1$ и бесконечнократное вырождение по числу p_2, если оно непрерывно.

Воспользуемся уравнением (3.4), чтобы по функции $\Phi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t)$ восстановить функцию $\Psi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t)$ – точное решение уравнения Дирака в магнитном поле. Распишем явно оператор $[i\hat{\partial} - \varrho e\hat{A} + m]$ в выбранной нами системе координат и подействуем им на функцию $\Phi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t)$ из (3.13), что дает следующее выражение для функции $\Psi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t) &= \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)} \qquad (3.15)\\ &\times \left[\hat{p}_\parallel + m + i\sqrt{|\varrho|eB}\left(\gamma_1 \frac{d}{d\eta} - i\rho\gamma_2\eta\right)\right]\mathrm{e}^{-\eta^2/2}\, H_\nu(\eta)\, u_s.\end{aligned}$$

Следует напомнить, что уравнение по переменной η (3.10) формально совпадает с уравнением Шредингера для гармонического осциллятора. Поэтому, по аналогии с квантовым осциллятором, удобно ввести повышающий a^+ и понижающий a^- операторы:

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta \mp \frac{d}{d\eta}\right). \qquad (3.16)$$

Напомним действие операторов $a^\pm$ на волновую функцию осциллятора:

$$a^\pm\left[\mathrm{e}^{-\eta^2/2} H_\nu(\eta)\right] = \sqrt{\nu + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-\eta^2/2}\, H_{\nu\pm1}(\eta). \qquad (3.17)$$

Если также ввести следующие линейные комбинации γ-матриц:

$$\gamma_{\pm1} = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 \pm i\gamma_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\pm \\ -\sigma_\pm & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \pm i\sigma_2\right), \qquad (3.18)$$

где σ_i, $i=1,2,3$ – матрицы Паули, то функция $\Psi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t)$ приводится к виду:

$$\Psi^{(+)}_{nsp_2p_3}(\mathbf{r},t) = \mathcal{N}\,\mathrm{e}^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}\times \\ \times\left[\hat{p}_\parallel + m + i\sqrt{2|\varrho|eB}\left(a^-\gamma_{-\rho} - a^+\gamma_\rho\right)\right]\mathrm{e}^{-\eta^2/2}\,H_\nu(\eta)\,u_s. \tag{3.19}$$

При таком подходе остается произвол в выборе постоянного биспинора u_s. Зафиксируем этот произвол, потребовав, чтобы слагаемое $\sim\ a^+$ в формуле (3.19) обратилось в нуль. Выберем биспинор вида:

$$u_s = \begin{pmatrix}\varphi_s\\ 0\end{pmatrix},\qquad \varphi_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+s\\ 1-s\end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

который является собственной функцией оператора проекции спина Σ_3, а также удовлетворяет уравнению:

$$\gamma_\rho u_s = \delta_{\rho,-s}\,\gamma_5 u_{-s}. \tag{3.21}$$

Из этого уравнения следует, что слагаемое, пропорциональное повышающему оператору, обращается в нуль, если $s=\rho$. Поэтому при таком выборе биспинора точное решение уравнения Дирака в постоянном однородном магнитном поле может быть приведено к виду:

$$\Psi^{(+)}_{n,\rho,p_2,p_3}(\mathbf{r},t) = \left[\hat{p}_\parallel + m\right]\Phi_{n,\rho,p_2,p_3}(\mathbf{r},t) + \\ + i\sqrt{2|\varrho|eB\nu}\gamma_5\,\Phi_{n-1,-\rho,p_2,p_3}(\mathbf{r},t). \tag{3.22}$$

После подстановки явного вида функции $\Psi^{(+)}_{n,\rho,p_2,p_3}(\mathbf{r},t)$ (3.13) нормировочный множитель $\mathcal{N}$ определяется из условия:

$$\int dV\left|\Psi^{(+)}_{n,\rho,p_2,p_3}(\mathbf{r},t)\right|^2 = 1, \tag{3.23}$$

где интегрирование проводится по объему бесконечного (вдоль оси Ox) цилиндра с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами L_y и L_z. Приведем сразу результат этого достаточно громоздкого вычисления:

$$\mathcal{N} = \frac{(eB)^{1/4}}{\sqrt{2E_n(E_n+m)L_yL_z}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}. \tag{3.24}$$

Отрицательно частотное решение можно получить из положительно частотного заменами: $E_n\to -E_n$, $p_i\to -p_i$ $(i=2,3)$, а также $u^{(+)}(p_3)\to u^{(-)}(p_3)$. В заключение выпишем окончательный результат для положительно и отрицательно частотных решений уравнения

Дирака заряженного фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned}
&\psi^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}) = \frac{e^{-i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}}{\sqrt{2E_n L_y L_z}}\, U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta),\\
&U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s=\varrho}(\eta) = W_s\ \chi_n(\eta) - V_{-s}\ \chi_{n-1}(\eta),\\
&U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}(\eta) = V_{-s}\ \chi_n(\eta) + W_s\ \chi_{n-1}(\eta),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где $E_n = \sqrt{p_3^2 + m^2 + 2eBn}$ – энергия частицы, индекс $n = \nu + (1-\varrho s)/2$ $(\nu = 0, 1, 2\ldots)$ нумерует уровни Ландау частицы, $\mathrm{x}^\mu = (t, x, y, z)$, а L_y, L_z – нормировочные длины вдоль осей Oy и Oz. Здесь также введены функции одномерного гармонического осциллятора:

$$\chi_k(\eta) = \frac{(eB)^{1/4} e^{-\eta^2/2}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} H_k(\eta), \quad H_k(\eta) = (-1)^k e^{\eta^2} \frac{d^k}{d\eta^k}\, e^{-\eta^2}, \tag{3.26}$$

где $\eta = \sqrt{eB}(x - \varrho p_2/eB)$, а $H_k(\eta)$ – полиномы Эрмита, и биспиноры в следующем виде:

$$W_+ = \frac{1}{\sqrt{E_n + m}} \begin{pmatrix} E_n + m \\ 0 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_- = \frac{1}{\sqrt{E_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ E_n + m \\ 0 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$V_+ = \frac{1}{\sqrt{E_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2eBn} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_- = \frac{1}{\sqrt{E_n + m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i\sqrt{2eBn} \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Каждый из определенных биспиноров непосредственно не имеет стандартной нормировки, однако такой нормировкой обладает их комбинация:

$$\overline{W_s} W_s + \overline{V_s} V_s = 2m, \tag{3.29}$$

где $\overline{W_s}$, $\overline{V_s}$ – сопряженные по Дираку биспиноры. Отметим, что биспиноры W_s, V_s не ортогональны друг к другу.

Решение уравнения Дирака с отрицательной энергией может быть получено из выражения (3.25) формальной заменой:

$$E_n \to -E_n, \quad p_2 \to -p_2, \quad p_3 \to -p_3,$$

что в биспиноре $U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta)$ эквивалентно заменам

$$m \to -m, \quad V_s \to -V_s.$$

Таким образом, отрицательно частотное решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
&\psi^{(-)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}) = \frac{e^{i(E_n t - p_2 y - p_3 z)}}{\sqrt{2E_n L_y L_z}}\, U^{(-)}_{n,p_2,p_3,s}(\tilde{\eta}),\\
&U^{(-)}_{n,p_2,p_3,s=\varrho}(\tilde{\eta}) = \widetilde{W}_s\ \chi_n(\tilde{\eta}) + \widetilde{V}_{-s}\ \chi_{n-1}(\tilde{\eta}),\\
&U^{(-)}_{n,p_2,p_3,s=-\varrho}(\tilde{\eta}) = -\widetilde{V}_{-s}\ \chi_n(\tilde{\eta}) + \widetilde{W}_s\ \chi_{n-1}(\tilde{\eta}),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\widetilde{W}_s = W_s\big(m \to -m\big)$, $\widetilde{V}_s = V_s\big(m \to -m\big)$, $\tilde{\eta} = \sqrt{eB}(x + \varrho p_2/eB)$, и подразумевается, что знак заряда для решения с отрицательной энергией тот же, что и для решения с положительной.

Для описания спиновых свойств заряженной частицы, как будет показано ниже, удобно воспользоваться проекций оператора магнитной поляризации спина в виде:

$$\hat{\mu}_3 = m\Sigma_3 + \rho_2 \left[\vec{\Sigma} \times \vec{P}\right]_3, \tag{3.31}$$

где $\vec{\Sigma}$ — оператор дираковского спина, $\vec{P} = \vec{p} - \varrho e\vec{A}$, $\vec{p}$ — оператор кинематического импульса,

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Положительно частотное решение, являющееся собственной функцией оператора $\hat{\mu}_3$ может быть представлено в виде (3.25), где под биспинорами W_s и V_s следует понимать следующие [7]:

$$W_- = w \begin{pmatrix} 0 \\ E_n + \tilde{p}_\perp \\ 0 \\ -p_3 \end{pmatrix}, \quad W_+ = w \begin{pmatrix} E_n + \tilde{p}_\perp \\ 0 \\ p_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

$$V_- = v \begin{pmatrix} 0 \\ -p_3 \\ 0 \\ E_n + \tilde{p}_\perp \end{pmatrix}, \quad V_+ = v \begin{pmatrix} p_3 \\ 0 \\ E_n + \tilde{p}_\perp \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

$$w = \sqrt{\frac{\tilde{p}_\perp + m}{2\tilde{p}_\perp(E_n + \tilde{p}_\perp)}}, \quad v = \sqrt{\frac{\tilde{p}_\perp - m}{2\tilde{p}_\perp(E_n + \tilde{p}_\perp)}}, \quad \tilde{p}_\perp = \sqrt{2eBn + m^2}.$$

4. Матрица плотности заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле

В данном разделе мы получим импульсное представление матрицы плотности частицы заряда ϱe, массы m в постоянном однородном магнитном поле. Покажем, что, просуммированное по поляризациям и уровням Ландау, оно в пределе слабого поля $B \to 0$ переходит в известное выражение $\widehat{P} \pm m\mathbb{I}$, соответствующие положительно и отрицательно частотному решению уравнения Дирака в вакууме.

Чтобы получить матрицу плотности заряженной частицы в однородном магнитном поле, рассмотрим следующий интеграл:

$$I^{(+)}_{n,p_3,s}(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\, \overline{\psi}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}')\, dp_2 = \tag{4.1}$$

$$= \frac{e^{-i[E_n(t-t')-p_3(z-z')]}}{2E_n L_y L_z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ip_2(y-y')} \left[U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta)\, \overline{U}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta')\right] dp_2,$$

где $\eta = \sqrt{eB}(x - \varrho p_2/eB)$ и $\eta' = \sqrt{eB}(x' - \varrho p_2/eB)$. Перейдём от интегрирования по переменной p_2 к интегрированию по η. Выделив трансляционно неинвариантную фазу $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}') = eB(x+x')(y-y')/2$, получим:

$$I^{(+)}_{n,p_3,s}(\mathrm{x},\mathrm{x}') = \frac{\sqrt{eB}}{2E_n L_y L_z}\, e^{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}\, e^{-i[E_n(t-t')-p_3(z-z')]}\widetilde{F}(\xi_1,\xi_2), \tag{4.2}$$

$$\widetilde{F}(\xi_1,\xi_2) = e^{i\varrho\,\xi_1\xi_2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varrho\,\xi_2\eta} \left[U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta)\, \overline{U}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta-\xi_1)\right] d\eta, \tag{4.3}$$

где $\xi_1 = \sqrt{eB}(x - x')$ и $\xi_2 = \sqrt{eB}(y - y')$. Далее, представив функцию $\tilde{F}(\xi_1,\xi_2)$ в виде двумерного интеграла Фурье, мы можем образовать в интеграле $I^{(+)}_{n,p_3,s}(\mathrm{x},\mathrm{x}')$ фазовый множитель $e^{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}$, где величина $p^\mu = (E_n, p_1, p_2, p_3)$ может интерпретироваться как 4-импульс частицы. Прямое и обратное Фурье преобразования функции $\widetilde{F}(\xi_1,\xi_2)$ удобно выбрать в виде:

$$F(p_1,p_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 p_1+\xi_2 p_2)/\sqrt{eB}}\ \widetilde{F}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{F}(\xi_1,\xi_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)/\sqrt{eB}}\ F(p_1,p_2)\,\frac{dp_1dp_2}{eB}. \tag{4.5}$$

В итоге интеграл (4.2) запишется через Фурье-образ функции $\widetilde{F}(\xi_1,\xi_2)$ следующим образом:

$$I^{(+)}_{n,p_3,s}(\mathrm{x},\mathrm{x}')=\frac{e^{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}}{2E_nL_yL_z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}\,F(p_1,p_2)\,\frac{dp_1dp_2}{\sqrt{eB}}. \tag{4.6}$$

Так как интерес представляет не сам интеграл (4.1), а его подынтегральная функция, то для нее получим:

$$\psi^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\ \overline{\psi}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}')=\frac{e^{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}}{2E_nL_yL_z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}\,F(p_1,p_2)\,\frac{dp_1}{\sqrt{eB}}, \tag{4.7}$$

$$F(p_1,p_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\varrho\,(\xi_1/2-\eta-\varrho p_2/\sqrt{eB})\xi_2}e^{-i\xi_1p_1/\sqrt{eB}}\times$$
$$\times\Big[U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta)\ \overline{U}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta-\xi_1)\Big]\frac{d\xi_2d\xi_1d\eta}{(2\pi)^2}. \tag{4.8}$$

Таким образом, можно определить матрицу плотности $\rho^{(+)}_n(p)$ дираковской частицы в импульсном представлении в следующем виде:

$$\rho^{(+)}_n(p)=\frac{2\pi}{\sqrt{eB}}F(p_1,p_2). \tag{4.9}$$

Заметим, что интеграл по переменной ξ_2 легко берется и дает следующий результат: $4\pi\,\delta\Big(\xi_1-2\eta-2\varrho\,p_2/\sqrt{eB}\Big)$, где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака, что позволяет легко вычислить интеграл по переменной ξ_1. Таким образом, для функции $F(p_1,p_2)$ получим:

$$F(p_1,p_2)=e^{-i\,2\varrho\,p_1p_2/eB}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,2p_1\eta/\sqrt{eB}}\times$$
$$\times\Big[U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(\eta)\ \overline{U}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}(-\eta-2\varrho\,p_2/\sqrt{eB})\Big]\,\frac{d\eta}{\pi}. \tag{4.10}$$

Выпишем явно матрицы $\left[U^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}\,\overline{U}^{(+)}_{n,p_2,p_3,s}\right]$ для каждой из поляризаций s по отдельности:

$$F_{+\varrho}(p_1,p_2) = F(p_1,p_2)\bigg|_{s=\varrho} = (-1)^n\,\frac{e^{-iab/2}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\,e^{-ia\eta}\times \tag{4.11}$$
$$\times\Big[\big[W_\varrho\,\overline{W}_\varrho\big]\,\chi_n(\eta)\,\chi_n(\eta+b) - \big[V_{-\varrho}\,\overline{V}_{-\varrho}\big]\,\chi_{n-1}(\eta)\,\chi_{n-1}(\eta+b) +$$
$$+\big[W_\varrho\,\overline{V}_{-\varrho}\big]\,\chi_n(\eta)\,\chi_{n-1}(\eta+b) - \big[V_{-\varrho}\,\overline{W}_\varrho\big]\,\chi_{n-1}(\eta)\,\chi_n(\eta+b)\Big],$$

$$F_{-\varrho}(p_1,p_2) = F(p_1,p_2)\bigg|_{s=-\varrho} = (-1)^n\,\frac{e^{-iab/2}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\,e^{-ia\eta}\times \tag{4.12}$$
$$\times\Big[\big[V_\varrho\,\overline{V}_\varrho\big]\,\chi_n(\eta)\,\chi_n(\eta+b) - \big[W_{-\varrho}\,\overline{W}_{-\varrho}\big]\,\chi_{n-1}(\eta)\,\chi_{n-1}(\eta+b) +$$
$$+\big[W_{-\varrho}\,\overline{V}_\varrho\big]\,\chi_{n-1}(\eta)\,\chi_n(\eta+b) - \big[V_\varrho\,\overline{W}_{-\varrho}\big]\,\chi_n(\eta)\,\chi_{n-1}(\eta+b)\Big],$$

где $a{=}2p_1/\sqrt{eB}$, $b{=}2\varrho p_2/\sqrt{eB}$, и было использовано следующее свойство функций Эрмита: $\chi_n(-\eta) = (-1)^n\,\chi_n(\eta)$. В общем случае интегралы такого типа сводятся к обобщенным полиномам Лагерра:

$$L_n^k(x) = \frac{x^{-k}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+k}e^{-x}\right], \tag{4.13}$$

а именно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\eta}\,\chi_n(\eta)\;\chi_m(\eta+b)\,d\eta =$$
$$= (-1)^{n-m}\,\sqrt{eB\,2^{m-n}\,m!/n!}\;(b+ia)^{n-m}\,e^{(iab-c^2)/2}\,L_m^{n-m}\!\big(c^2\big)\,, \tag{4.14}$$

где $n\geq m$ и $c^2{=}(a^2+b^2)/2$. Поскольку в (4.11) и (4.12) функции $\chi_n(\eta)$ входят с индексами, различающимися не более чем на единицу, то более удобным оказывается использование следующих соотношений:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\eta}\,\chi_n(\eta)\;\chi_n(\eta+b)\,d\eta = \sqrt{eB}\;e^{(iab-c^2)/2}\,L_n\!\big(c^2\big)\,, \tag{4.15}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\eta}\,\chi_n(\eta)\;\chi_{n-1}(\eta+b)\,d\eta =$$

$$= \sqrt{eBn/2}\; e^{(iab-c^2)/2}\,(b+ia)/c^2\left[L_n(c^2)-L_{n-1}(c^2)\right], \quad (4.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\eta}\,\chi_n(\eta+b)\;\chi_{n-1}(\eta)\,d\eta =$$

$$= \sqrt{eBn/2}\; e^{(iab-c^2)/2}\,(-b+ia)/c^2\left[L_n(c^2)-L_{n-1}(c^2)\right], \quad (4.17)$$

где $L_n(x)\equiv L_n^0(x)$ – полиномы Лагерра, и учтено свойство $L_{n-1}^1(x)=(n/x)\Big[L_{n-1}(x)-L_n(x)\Big]$. Таким образом, после интегрирования по переменной η получаются следующие вклады в матрицу плотности от разных поляризаций:

$$\begin{aligned} F_{+\varrho}(p_1,p_2) &= (-1)^n\,\frac{\sqrt{eB}}{\pi}\,e^{-u/2}\Big\{L_n(u)\left[W_\varrho\overline{W}_\varrho\right]-L_{n-1}(u)\left[V_{-\varrho}\overline{V}_{-\varrho}\right]\Big\} \\ &+(-1)^n\frac{\sqrt{2n}}{\pi}\,\frac{e^{-u/2}}{u}\Big[L_n(u)-L_{n-1}(u)\Big]\times \qquad (4.18) \\ &\times\Big\{(\varrho p_2+ip_1)\big[W_\varrho\overline{V}_{-\varrho}\big]+(\varrho p_2-ip_1)\big[V_{-\varrho}\overline{W}_\varrho\big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{-\varrho}(p_1,p_2) &= (-1)^n\,\frac{\sqrt{eB}}{\pi}\,e^{-u/2}\Big\{L_n(u)\left[V_\varrho\overline{V}_\varrho\right]-L_{n-1}(u)\left[W_{-\varrho}\overline{W}_{-\varrho}\right]\Big\} \\ &+(-1)^n\frac{\sqrt{2n}}{\pi}\,\frac{e^{-u/2}}{u}\times\Big[L_n(u)-L_{n-1}(u)\Big]\times \qquad (4.19) \\ &\times\Big\{(-\varrho p_2+ip_1)\big[W_{-\varrho}\overline{V}_\varrho\big]-(\varrho p_2+ip_1)\big[V_\varrho\overline{W}_{-\varrho}\big]\Big\}, \end{aligned}$$

где $u=2(p_1^2+p_2^2)/eB$. Вычисление билинейных комбинаций биспиноров $W_{\pm\varrho}$ и $V_{\pm\varrho}$ с использованием их явного вида (3.27) и (3.28) приводит к результату:

$$W_{\pm\varrho}\overline{W}_{\pm\varrho}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{m}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right)\left(\widehat{p}_\parallel+m\right)+\frac{2eBn}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right]\Pi_{\pm\varrho},$$

$$V_{\pm\varrho}\overline{V}_{\pm\varrho}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{m}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right)\left(\widehat{p}_\parallel+m\right)-\frac{2eBn}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right]\Pi_{\pm\varrho},$$

$$(ip_1 - \varrho p_2)\left[V_{-\varrho}\overline{W}_{\varrho}\right] - (ip_1 + \varrho p_2)\left[W_{\varrho}\overline{V}_{-\varrho}\right] = \\ = \frac{\sqrt{2eBn}}{2}\left[\widehat{p}_{\perp} - i\varrho\,\frac{\widehat{p}_{\parallel}\,(p\varphi\gamma)}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right],$$

$$(ip_1 + \varrho p_2)\left[V_{\varrho}\overline{W}_{-\varrho}\right] - (ip_1 - \varrho p_2)\left[W_{-\varrho}\overline{V}_{\varrho}\right] = \\ = \frac{\sqrt{2eBn}}{2}\left[\widehat{p}_{\perp} + i\varrho\,\frac{\widehat{p}_{\parallel}\,(p\varphi\gamma)}{\sqrt{2eBn+m^2}}\right].$$

Подстановка этих выражений в формулы (4.18), (4.19) приводит к следующему выражению для матрицы плотности фермиона в импульсном представлении:

$$\rho^{(+)}_{n,s=\rho}(p) = (-1)^n\, e^{-u/2}\left\{ \left[\left(1+\frac{m}{\tilde{p}_{\perp}}\right)\widehat{p}_{\parallel} + \tilde{p}_{\perp} + m\right]\Pi_{\varrho}\,L_n(u) - \right. \\ - \left[\left(1-\frac{m}{\tilde{p}_{\perp}}\right)\widehat{p}_{\parallel} - \tilde{p}_{\perp} + m\right]\Pi_{-\varrho}\,L_{n-1}(u) + \\ \left. + \, 2\left[\widehat{p}_{\perp} - i\varrho\,\frac{\widehat{p}_{\parallel}}{\tilde{p}_{\perp}}\,(p\varphi\gamma)\right]L^1_{n-1}(u)\right\}, \tag{4.20}$$

$$\rho^{(+)}_{n,s=-\rho}(p) = (-1)^n\, e^{-u/2}\left\{ \left[\left(1-\frac{m}{\tilde{p}_{\perp}}\right)\widehat{p}_{\parallel} - \tilde{p}_{\perp} + m\right]\Pi_{\varrho}\,L_n(u) - \right. \\ - \left[\left(1+\frac{m}{\tilde{p}_{\perp}}\right)\widehat{p}_{\parallel} + \tilde{p}_{\perp} + m\right]\Pi_{-\varrho}\,L_{n-1}(u) + \\ \left. + \, 2\left[\widehat{p}_{\perp} + i\varrho\,\frac{\widehat{p}_{\parallel}}{\tilde{p}_{\perp}}\,(p\varphi\gamma)\right]L^1_{n-1}(u)\right\}. \tag{4.21}$$

Здесь $\widehat{p}_{\parallel} = (p\tilde{\Lambda}\gamma) = E_n\gamma_0 - p_3\gamma_3$, $\widehat{p}_{\perp} = (p\Lambda\gamma) = p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2$, $(p\varphi\gamma) = p_2\gamma_1 - p_1\gamma_2$, $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}/B$ — безразмерные тензор и дуальный тензор электромагнитного поля, $\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}$, $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}$, Π_{ϱ} — оператор проекции спина частицы на направление магнитного поля (см. формулу (2.10)). Отметим, что входящие в (4.20) и (4.21) структуры $\widehat{p}_{\parallel}$, $\widehat{p}_{\perp}$, $(p\varphi\gamma)$, $\tilde{p}_{\perp}$, Π_{ϱ}, а также аргумент полиномов Лагерра $u = 2p_{\perp}^2/eB = 2(p_1^2+p_2^2)/eB$ являются инвариантами относительно преобразований Лоренца вдоль вектора напряженности магнитного поля. Эффективное разбиение 4-мерного пространства в постоянном однородном магнитном поле на два ортогональных подпространства —

параллельное ($\|$) и перпендикулярное ($\perp$), а также алгебра матриц Дирака в этих подпространствах подробно изложены в Разделе (2.).

После суммировании по поляризациям, матрица плотности приводится к виду:

$$\rho_n^{(+)}(p) = \sum_{s=\pm\rho} \rho_{n,s}^{(+)}(p) = (-1)^n \, 2 \, e^{-u/2} \times \tag{4.22}$$
$$\times \left[\Big(\widehat{p}_{\|} + m\Big) \Big(\Pi_{\varrho} \, L_n(u) - \Pi_{-\varrho} \, L_{n-1}(u)\Big) + 2 \, \widehat{p}_{\perp} \, L_{n-1}^1(u) \right].$$

Отметим, что выражение для $\rho_n^{(+)}(p)$ может быть получено при использовании любого из проектирующих операторов, поскольку не содержит информации о спиновых свойствах заряженной дираковской частицы. Чтобы убедиться в этом, построим матрицу плотности, просуммированную по поляризациям частицы, на основе решения со спинорами (3.28), (3.27), отвечающими проекционному оператору Σ_3. Для этого удобно воспользоваться следующими свойствами биспиноров, которые могут быть получены непосредственным вычислением:

$$W_s \overline{W}_s + V_s \overline{V}_s = \big(\widehat{p}_{\|} + m\mathbb{I}\big) \, \Pi_s, \tag{4.23}$$
$$\sum_{s=\pm 1} (s p_2 + i p_1) \left[V_s \overline{W}_{-s} - W_s \overline{V}_{-s} \right] = \sqrt{2eBn} \; \widehat{p}_{\perp}, \tag{4.24}$$
$$\Pi_s = (\mathbb{I} + i s \gamma_1 \gamma_2)/2, \quad \widehat{p}_{\|} = E_n \gamma_0 - p_3 \gamma_3, \quad \widehat{p}_{\perp} = p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2.$$

Здесь $\mathbb{I}$ – единичная матрица в пространстве Дирака, а γ_μ – матрицы Дирака. Используя эти свойства и суммируя вклады в матрицу плотности от различных поляризаций, получим:

$$\sum_{s=\pm 1} \psi_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\mathrm{x}) \; \overline{\psi}_{n,p_2,p_3,s}^{(+)}(\mathrm{x}') = \frac{e^{i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}}{2E_n L_y L_z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')} \, \rho_n^{(+)}(p) \, \frac{dp_1}{2\pi},$$

$$\rho_n^{(+)}(p) = (-1)^n \, 2 \, e^{-u/2} \left\{ \left[\big(\widehat{p}_{\|} + m\mathbb{I}\big) \, \Pi_{\varrho} - \frac{2\,n}{u} \, \widehat{p}_{\perp} \right] L_n(u) - \right. \tag{4.25}$$
$$\left. - \left[\big(\widehat{p}_{\|} + m\mathbb{I}\big) \, \Pi_{-\varrho} - \frac{2\,n}{u} \, \widehat{p}_{\perp} \right] L_{n-1}(u) \right\},$$

где ϱ – знак заряда частицы, $\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{x}') = eB(x + x')(y - y')/2$, и подразумевается, что $L_{-1}(u) \equiv 0$. Принимая во внимание рекуррентные соотношения на обобщенные полиномы Лагерра:

$$n \, L_n^k(u) - (n+k) \, L_{n-1}^k(u) = u \, \frac{d}{du} \, L_n^k(u) = -u \, L_{n-1}^{k+1}(u), \tag{4.26}$$

матрицу плотности (4.25) можно также представить в следующих формах:

$$\rho_n^{(+)}(p) = (-1)^n \, 2 \, e^{-u/2} \Big[\Big(\widehat{p}_\parallel + m\mathbb{I} \Big) \Big(\Pi_\varrho \, L_n(u) - \Pi_{-\varrho} \, L_{n-1}(u) \Big) - \\ - 2 \, \widehat{p}_\perp \, \frac{d}{du} \, L_n(u) \Big], \tag{4.27}$$

$$\rho_n^{(+)}(p) = (-1)^n \, 2 \, e^{-u/2} \Big[\Big(\widehat{p}_\parallel + m\mathbb{I} \Big) \Big(\Pi_\varrho \, L_n(u) - \Pi_{-\varrho} \, L_{n-1}(u) \Big) + \\ + 2 \, \widehat{p}_\perp \, L^1_{n-1}(u) \Big]. \tag{4.28}$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с ранее полученным выражением (4.22), где был использован проекционный оператор $\hat{\mu}_3$ (3.31).

При «наивном» суммировании этой матрицы плотности по n, то есть в предположении, что в пределе слабого поля ($B \to 0$) дискретный спектр энергий заряженной частицы переходит в непрерывный ($E_n \to E = \sqrt{p^2 + m^2}$), получаем стандартное вакуумное выражение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{(+)}(p) = 2 \, e^{-u/2} \left(\widehat{p}_\parallel + m \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big[\Pi_\varrho \, L_n(u) - \Pi_{-\varrho} \, L_{n-1}(u) \Big] + \\ + \; 4 \, e^{-u/2} \, \widehat{p}_\perp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L^1_{n-1}(u) = \widehat{p}_\parallel + m - \widehat{p}_\perp = \widehat{p} + m, \tag{4.29}$$

где было использовано правило суммирования обобщенных полиномов Лагерра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k)!}{n! \, k!} \, L^m_{n+k}(2x) = \frac{e^x}{2^{k+m+1}} \, L^m_k(x) \tag{4.30}$$

при значениях $k = 0$ и $m = 0, 1$.

В случае нерелятивистской частицы, пренебрегая всеми поперечными к полю компонентами импульса и полагая $\hat{p}_\parallel = m \hat{v}_\parallel$, получим из (4.20) и (4.21):

$$\rho^{(+)}_{n, s=\varrho}(p) = (-1)^n \, 2 \, e^{-u/2} L_n(u) \, m \left(1 + \widehat{v}_\parallel \right) \Pi_\varrho, \\ \rho^{(+)}_{n, s=-\varrho}(p) = (-1)^{n+1} \, 2 \, e^{-u/2} L_{n-1}(u) \, m \left(1 + \widehat{v}_\parallel \right) \Pi_{-\varrho}, \tag{4.31}$$

где $v^\mu = (1, 0, 0, \mathrm{v}) / \sqrt{1 - \mathrm{v}^2}$ — 4-скорость движения среды вдоль направления поля. Нетрудно убедиться, что матрица плотности (4.31) описывает состояние с определенной проекцией оператора дираковского спина Σ_3 на направление магнитного поля.

Поскольку волновая функция нерелятивистской заряженной частицы с аномальным магнитным моментом, например протона, не зависит от аномального момента, приведенные выражения описывают матрицу плотности с определенной поляризацией также и в этом случае. Отметим, что учет взаимодействия аномального магнитного момента с магнитным полем снимает вырождение энергии по уровням Ландау:

$$E_{n,s} = m + \frac{p_3^2}{2m} + \frac{eBn}{m} - \tilde{g}\varrho\,\frac{eBs}{2m}, \tag{4.32}$$

где число n нумерует уровни Ландау, $\tilde{g}$ — аномальный магнитный момент в ядерных магнетонах для нуклонов и магнетонах Бора для электронов.

Просуммированная по s матрица плотности, соответствующая решению уравнения Дирака с отрицательной энергией (3.30), получается из (4.22) формальной заменой $p^\mu \to -p^\mu$, что приводит к выражению:

$$\begin{gathered}\sum_{s=\pm 1} \psi^{(-)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\,\overline{\psi}^{(-)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x}') = \frac{e^{-i\varrho\,\Phi(\mathrm{x},\mathrm{x}')}}{2E_n L_y L_z}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ip\,(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}\,\rho_n^{(-)}(p)\,\frac{dp_1}{2\pi}, \\ \rho_n^{(-)}(p) = (-1)^n\,2\,e^{-u/2}\left\{\left(\widehat{p}_{\parallel} - m\right)\left[\Pi_\varrho\,L_n(u) - \Pi_{-\varrho}\,L_{n-1}(u)\right] + \right. \\ \left. +\ 2\,\widehat{p}_{\perp}\,L^1_{n-1}(u)\right\}.\end{gathered} \tag{4.33}$$

В приведенной формуле учтено, что знак заряда ϱ для отрицательно частотного решения такой же, как и для положительно частотного.

Для полноты изложения, приведем известные матрицы плотности для безмассового нейтрино с 4-импульсом $k^\mu = (\omega, \vec{k})$:

$$\psi^{(\nu)}_k(\mathrm{x})\,\overline{\psi}^{(\nu)}_k(\mathrm{x}') = \frac{e^{-ik(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}}{2\omega V}\,\rho^{(\nu)}(k), \qquad \rho^{(\nu)}(k) = \frac{1}{2}\,\widehat{k}\,(1-\gamma_5)\,, \tag{4.34}$$

и для электронейтральной частицы с 4-импульсом $P^\mu = (E, \vec{P})$ и массой m_N:

$$\sum_{s=\pm 1} \psi^{(N)}_{P,s}(\mathrm{x})\,\overline{\psi}^{(N)}_{P,s}(\mathrm{x}') = \frac{e^{-iP(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}}{2EV}\,\rho^{(N)}(P), \qquad \rho^{(N)}(P) = \widehat{P} + m_N, \tag{4.35}$$

где $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и $V = L_x L_y L_z$ — нормировочный объем. В нерелятивистском пределе матрица плотности поляризованной электронейтральной частицы имеет вид:

$$\rho_s^{(N)}(P) = m_N \left(1 + \widehat{v}_\parallel\right) \Pi_s, \tag{4.36}$$

не меняющийся и при учете магнитного момента частицы, например нейтрона. Однако в этом случае энергия частицы явно зависит от ее поляризации и определяется выражением:

$$E_s = m_N + \frac{\vec{P}^2}{2m_N} - g\,\frac{eBs}{2m_N}, \tag{4.37}$$

где g — магнитный момент нейтрона в ядерных магнетонах.

5. Слабые одновершинные процессы

В этом разделе будет показано, как работает формализм матрицы плотности на следующих примерах: процессы рассеяния нейтрино на электронах (1.5) и нуклонах (1.6), а также прямой URCA-процесс (1.1). S-матричные элементы и их квадраты для кроссинг-симметричных процессов могут быть получены соответствующими заменами 4-импульсов частиц.

В низкоэнергетическом пределе, когда переданные в реакции энергия и импульс много меньше массы W-бозона ($m_W \simeq 80$ ГэВ), локальный эффективный лагранжиан процессов (1.5) и (1.6) может быть записан единообразно:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(1)}(\mathrm{x}) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} &\left[\overline{\psi}^{(Q)}(\mathrm{x})\gamma_\alpha \left(c_v + c_a\gamma_5\right) \psi^{(Q)}(\mathrm{x})\right] \times \\ &\times \left[\overline{\psi}^{(\nu)}(\mathrm{x})\gamma_\alpha \left(1 + \gamma_5\right) \psi^{(\nu)}(\mathrm{x})\right],\end{aligned} \tag{5.1}$$

где G_F — константа Ферми, $\psi^{(Q)}(\mathrm{x})$ — оператор электрона (нуклона), $\psi^{(\nu)}(\mathrm{x})$ — оператор нейтринного поля, c_v и c_a — векторные и аксиальные константы эффективных нейтральных слабых токов. Отметим, что в рассматриваемом пределе значения этих констант для процесса (1.5) зависят от аромата:

$$\begin{array}{lll} c_v^{(e)} = +1/2 + 2\sin^2\theta_W, & c_a^{(e)} = +1/2, & \text{для } \nu = \nu_e \\ c_v^{(x)} = -1/2 + 2\sin^2\theta_W, & c_a^{(x)} = -1/2, & \text{для } \nu_x = \nu_\mu,\, \nu_\tau, \end{array} \tag{5.2}$$

где θ_W — угол Вайнберга ($\sin^2\theta_W \simeq 0.23$), тогда как для процессов вида (1.6) константы слабых токов зависят от типа нуклона:

$$\begin{array}{lll} c_v^{(p)} = 0.07/2, & c_a^{(p)} = 1.09/2, & \text{для } Q = p \text{ (протон)}, \\ c_v^{(N)} = -1/2, & c_a^{(N)} = -0.91/2, & \text{для } Q = N \text{ (нейтрон)}. \end{array} \tag{5.3}$$

В низкоэнергетическом пределе локальный эффективный лагранжиан URCA-процесса (1.1) может быть представлен в виде:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(2)}(\mathrm{x}) = \frac{G_F \cos\theta_c}{\sqrt{2}} \left[\overline{\psi}^{(N)}(\mathrm{x})\gamma_\alpha \left(g_v + g_a\gamma_5\right)\psi^{(p)}(\mathrm{x})\right] \times \\ \times \left[\overline{\psi}^{(\nu)}(\mathrm{x})\gamma_\alpha \left(1+\gamma_5\right)\psi^{(e)}(\mathrm{x})\right], \tag{5.4}$$

где θ_c — угол Кабиббо ($\sin\theta_c \simeq 0.22$), $\psi^{(N)}(\mathrm{x})$, $\psi^{(p)}(\mathrm{x})$, $\psi^{(e)}(\mathrm{x})$, $\psi^{(\nu)}(\mathrm{x})$ — операторы нейтронного, протонного, электронного, нейтринного полей, соответственно, $g_v \simeq 1$ и $g_a \simeq 1.26$ — векторная и аксиальная константы заряженного нуклонного тока. S-матричные элементы процессов (1.5) и (1.6), составленные по локальному эффективному лагранжиану (5.1), могут быть записаны в виде:

$$S_{if}^{(1)} = \frac{i\,G_1}{\sqrt{2}} \int \left[\overline{\psi}^{(Q)}_{n',p_2',p_3',s'}(\mathrm{x})\,\widetilde{O}_\alpha(c)\,\psi^{(Q)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})\right] \times \\ \times \left[\overline{\psi}^{(\nu)}_{k'}(\mathrm{x})\,O_\alpha\,\psi^{(\nu)}_{k}(\mathrm{x})\right] d^4\mathrm{x}, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{O}_\alpha(c) = \gamma_\alpha\left(1 + c\,\gamma_5\right), \qquad O_\alpha = \gamma_\alpha\left(1+\gamma_5\right),$$

где $G_1 = G_F\,c_v$, $c = c_a/c_v$, $\psi^{(Q)}_{n,p_2,p_3,s}(\mathrm{x})$, $\psi^{(Q)}_{n',p_2',p_3',s'}(\mathrm{x})$, $\psi^{(\nu)}_{k}(\mathrm{x})$, $\psi^{(\nu)}_{k'}(\mathrm{x})$ — волновые функции нуклона и нейтрино в начальном и конечном состояниях, и интегрирование ведется по 4-мерному нормировочному объему $\Omega = \mathcal{T} L_x L_y L_z$.

S-матричный элемент процесса (1.1), соответствующий локальному эффективному лагранжиану (5.4), запишется в виде:

$$S_{if}^{(2)} = \frac{i\,G_2}{\sqrt{2}} \int \left[\overline{\psi}^{(N)}_{P',s'}(\mathrm{x})\,\widetilde{O}_\alpha(g)\,\psi^{(p)}_{m,P_2,P_3,s}(\mathrm{x})\right] \times \\ \times \left[\overline{\psi}^{(\nu)}_{q'}(\mathrm{x})\,O_\alpha\,\psi^{(e)}_{m',q_2,q_3,s''}(\mathrm{x})\right] d^4\mathrm{x}, \tag{5.6}$$

где $G_2 = G_F\,g_v\cos\theta_c$, $g = g_a/g_v \simeq 1.26$, $\psi^{(p)}_{m,P_2,P_3,s}(\mathrm{x})$ и $\psi^{(e)}_{m',q_2,q_3,s''}(\mathrm{x})$ — волновые функции протона и электрона, $\psi^{(N)}_{P',s'}(\mathrm{x})$ — нейтрона, $\psi^{(\nu)}_{q'}(\mathrm{x})$ — нейтрино.

При использовании формализма матрицы плотности, квадраты S-матричных элементов, просуммированные по поляризациям частиц, представляются в виде:

$$\sum_{s,s'=\pm1}\left|S_{if}^{(1)}\right|^2=\frac{G_1^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_1\,dp_1'}{4\pi^2}\mathrm{Sp}\Big[\rho_{n'}^{(Q)}(p')\widetilde{O}_\alpha(c)\rho_n^{(Q)}(p)\widetilde{O}_\beta(c)\Big]\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\Big[\rho^{(\nu)}(k')O_\alpha\rho^{(\nu)}(k)O_\beta\Big]\int d^4\mathrm{x}\,d^4\mathrm{x}'\,\frac{e^{-i(p+k-p'-k')(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}}{16\,\varepsilon_n\omega\varepsilon_{n'}'\omega'\,L_y^2L_z^2V^2},\qquad(5.7)$$

где $p^{(\prime)\mu}=(\varepsilon_{n^{(\prime)}}^{(\prime)},\vec{p}^{(\prime)})$, $k^{(\prime)\mu}=(\omega^{(\prime)},\vec{k}^{(\prime)})$ — 4-импульсы заряженных частиц и нейтрино в начальном (конечном) состоянии.

$$\sum_{s,s',s''=\pm1}\left|S_{if}^{(2)}\right|^2=\frac{G_2^2}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dq_1\,dP_1}{4\pi^2}\,\mathrm{Sp}\left[\rho^{(N)}(P')\widetilde{O}_\alpha(g)\rho_m^{(p)}(P)\widetilde{O}_\beta(g)\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\left[\rho^{(\nu)}(q')O_\alpha\rho_{m'}^{(e)}(q)O_\beta\right]\int d^4\mathrm{x}\,d^4\mathrm{x}'\,\frac{e^{-i(P+q-P'-q')(\mathrm{x}-\mathrm{x}')}}{16\,E_m\varepsilon_{m'}E'q_0'\,L_y^2L_z^2V^2},\qquad(5.8)$$

где $P^\mu=(E_m,\vec{P})$, $q^\mu=(\varepsilon_{m'},\vec{q})$, $P'^\mu=(E',\vec{P}')$ и $q'^\mu=(q_0',\vec{q}')$ — 4-импульсы протона, электрона, нейтрона и нейтрино.

Интегрирование квадратов S-матричных элементов по x и x$'$ тривиально и приводит к следующим результатам:

$$\sum_{s,s'=\pm1}\left|S_{if}^{(1)}\right|^2=\frac{(-1)^{n+n'}\pi^2G_1^2\mathcal{T}}{2\varepsilon_n\omega\varepsilon_{n'}'\omega'L_y^2L_z^2V}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[L_{\alpha\beta}^{(Q)}L_{\alpha\beta}^{(\nu)}\right]e^{-(u+u')/2}\times$$
$$\times\;\delta^{(4)}(p+k-p'-k')\,dp_1dp_1',\qquad(5.9)$$
$$L_{\alpha\beta}^{(Q)}=(-1)^{n+n'}e^{(u+u')/2}\,\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\left[\rho_{n'}^{(Q)}(p')\widetilde{O}_\alpha(c)\rho_n^{(Q)}(p)\widetilde{O}_\beta(c)\right],$$
$$L_{\alpha\beta}^{(\nu)}=\mathrm{Sp}\left[\rho^{(\nu)}(k')O_\alpha\rho^{(\nu)}(k)O_\beta\right],$$

$$\sum_{s,s',s''=\pm1}\left|S_{if}^{(2)}\right|^2=\frac{(-1)^{m+m'}\pi^2G_2^2\mathcal{T}}{2E_m\varepsilon_{m'}E'q_0'L_y^2L_z^2V}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[N_{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}\Big]e^{-(v+v')/2}\times$$
$$\times\;\delta^{(4)}(P+q-P'-q')\,dq_1dP_1,\qquad(5.10)$$
$$N_{\alpha\beta}=(-1)^me^{v/2}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\rho^{(N)}(P')\widetilde{O}_\alpha(g)\rho_m^{(p)}(P)\widetilde{O}_\beta(g)\right],$$
$$L_{\alpha\beta}=(-1)^{m'}e^{v'/2}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left[\rho^{(\nu)}(q')O_\alpha\rho_{m'}^{(e)}(q)O_\beta\right],$$

где $u = 2p_\perp^2/eB$, $u' = 2p_\perp'^2/eB$, $v = 2P_\perp^2/eB$, $v' = 2q_\perp^2/eB$.

При подстановке (5.9)) в $\mathcal{P}_\mu$ (1.10) получим явно ковариантное выражение:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mu^{(1)} = \frac{G_1^2}{8(2\pi)^8} \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \times \\
\times \int \frac{d^3k}{\omega} f_\nu(\omega) \int \frac{d^3k'}{\omega'} \left[1 - f_\nu(\omega')\right] (k'-k)_\mu \int \frac{d^3p}{\varepsilon_n} f_Q(\varepsilon_n) \times \\
\times \int \frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}} \left[1 - f_Q(\varepsilon'_{n'})\right] \delta^{(4)}(p + k - p' - k')\, e^{-(u+u')/2} \left[L_{\alpha\beta}^{(Q)} L_{\alpha\beta}^{(\nu)}\right],
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

где $f_\nu(\omega^{(\prime)})$ и $f_Q(\varepsilon_{n^{(\prime)}}^{(\prime)})$ — функции распределения начальных (конечных) нейтрино и заряженной частицы. Аналогичным образом, $\mathcal{P}_\mu$ в реакции (1.1) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_\mu^{(2)} = \frac{G_2^2}{8(2\pi)^8} \sum_{m,m'=0}^{\infty} (-1)^{m+m'} \times \\
\times \int \frac{d^3q'}{q'_0} \left[1 - f_\nu(q'_0)\right] q'_\mu \times \int \frac{d^3P}{E_m} f_p(E_m) \int \frac{d^3q}{\varepsilon_{m'}} f_e(\varepsilon_{m'}) \times \\
\times \int \frac{d^3P'}{E'} \left[1 - f_N(E')\right] \delta^{(4)}(P + q - P' - q')\, e^{-(v+v')/2} \left[N_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\right].
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Поскольку шпур от нечетного числа γ-матриц равен нулю, то после преобразований с использованием коммутационных свойств матрицы γ_5 с проекционным оператором ($\Pi_\varrho \gamma_5 = \gamma_5 \Pi_\varrho$) нетрудно получить следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha\beta}^{(Q)} = \mathrm{Sp}\Big[\Big\{ \widehat{p}'_\parallel \Big(\Pi_\varrho L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho} L_{n'-1}(u')\Big) + 2\widehat{p}'_\perp L_{n'-1}^1(u') \Big\} \times \\
\times\ \gamma_\alpha \Big\{ \widehat{p}_\parallel \Big(\Pi_\varrho L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u)\Big) + 2\widehat{p}_\perp L_{n-1}^1(u) \Big\} \times \\
\times\ \gamma_\beta \Big(1 + c^2 + 2c\gamma_5\Big) \Big] + \\
+\ m_Q^2 (1 - c^2)\, \mathrm{Sp}\Big[\Big(\Pi_\varrho L_{n'}(u') - \Pi_{-\varrho} L_{n'-1}(u')\Big) \times \\
\times\ \gamma_\alpha \Big(\Pi_\varrho L_n(u) - \Pi_{-\varrho} L_{n-1}(u)\Big) \gamma_\beta \Big],
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

$$
L_{\alpha\beta}^{(\nu)} = 2\ \mathrm{Sp}\Big[\widehat{k}' \gamma_\alpha \widehat{k} \gamma_\beta \,(1 + \gamma_5) \Big] \tag{5.14}
$$

для шпуров, входящих в (5.11), и

$$N_{\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\widehat{P}'\gamma_\alpha \Big\{\widehat{P}_\parallel\Big(\Pi_+ L_m(v) - \Pi_- L_{m-1}(v)\Big) + 2\widehat{P}_\perp L^1_{m-1}(v)\Big\} \times$$
$$\times \gamma_\beta\Big(1 + g^2 + 2g\gamma_5\Big)\Big] + \tag{5.15}$$
$$+ \; m_N m_p (1 - g^2)\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma_\alpha\Big(\Pi_+ L_m(v) - \Pi_- L_{m-1}(v)\Big)\gamma_\beta\Big],$$

$$L_{\alpha\beta} = 2\,\mathrm{Sp}\Big[\widehat{q}'\gamma_\alpha \Big\{\widehat{q}_\parallel\Big(\Pi_- L_{m'}(v') - \Pi_+ L_{m'-1}(v')\Big) + 2\widehat{q}_\perp L^1_{m'-1}(v')\Big\} \times$$
$$\times \gamma_\beta (1 + \gamma_5)\Big] \tag{5.16}$$

для шпуров, входящих в (5.12).

При использовании свойств (2.11)–(2.14), (2.16) приведенные выше громоздкие шпуры вычисляются без особых трудностей. Техника вычисления интегралов, входящих в $\mathcal{P}^{(1)}_\mu$ (5.11) и $\mathcal{P}^{(2)}_\mu$ (5.12), подробно изложена в следующем разделе.

6. Интегралы по компонентам импульсов, перпендикулярных напряженности магнитного поля

Для процессов с двумя заряженными частицами важными являются следующие интегралы по импульсам заряженных частиц в поперечном пространстве:

$$I^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} L_n\big(x^2\big)\, L_m\big(y^2\big)\, e^{-(x^2+y^2)/2} \times \tag{6.1}$$
$$\times\, \delta^{(2)}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z})\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y},$$

$$I^{(n,m)}_\alpha(\mathrm{z}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_\alpha\, L^1_{n-1}\big(x^2\big)\, L_m\big(y^2\big)\, e^{-(x^2+y^2)/2} \times \tag{6.2}$$
$$\times\, \delta^{(2)}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z})\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y},$$

$$I^{(n,m)}_{\alpha\beta}(\mathrm{z}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_\alpha y_\beta\, L^1_{n-1}\big(x^2\big)\, L^1_{m-1}\big(y^2\big)\, e^{-(x^2+y^2)/2} \times \tag{6.3}$$
$$\times\, \delta^{(2)}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z})\, d^2\mathrm{x}\, d^2\mathrm{y},$$

где x, y и z – вектора в 2-мерном (поперечном) пространстве, индексы $\alpha, \beta = \overline{1,2}$; а $\delta^{(2)}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}) = \delta(x_1+y_1-z_1)\,\delta(x_2+y_2-z_2)$ – произведение

δ-функций Дирака. Вычисление этих интегралов удобно проводить, воспользовавшись Фурье-образом δ-функции:

$$\delta^{(2)}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{s}\ e^{i\,\mathrm{s}(\mathrm{x}+\mathrm{y}-\mathrm{z})},$$

где $\mathrm{s\,x} = s_1x_1+s_2x_2$ – скалярное произведение векторов в 2-мерном евклидовом пространстве. В этом случае интегрирование по x и y становится независимым и сводится к интегралам следующего вида:

$$f^{(n)}(\mathrm{s}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{x}\, L_n\big(x^2\big)\, e^{i(\mathrm{sx})-x^2/2}, \tag{6.4}$$

$$f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{x}\, x_\alpha\, L_{n-1}^1\big(x^2\big)\, e^{i(\mathrm{sx})-x^2/2}. \tag{6.5}$$

Векторный интеграл удобно вычислять, представив его в виде:

$$f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s}) = A^{(n)}\mathrm{s}_\alpha,$$

а коэффициент разложения $A^{(n)}$ находить из свертки $\mathrm{s}_\alpha f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s})$. Получающиеся таким образом скалярные интегралы удобно вычислять в полярных координатах. Если полярный угол отсчитывать от вектора s, то $(\mathrm{sx}) = sx\cos\varphi$, $d^2\mathrm{x} = x dx d\varphi$. Воспользовавшись известными соотношениями:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\pm i\,t\cos\varphi}\cos(n\varphi)\, d\varphi = (\pm i)^n 2\pi\, J_n(t), \tag{6.6}$$

$$\int\limits_0^{\infty} t^{\lambda/2}e^{-c\,t/2}J_\lambda(b\sqrt{t})\, L_n^\lambda(t)\, dt = (-1)^n 2\, b^\lambda c^{-\lambda-1}e^{-b^2/2c}L_n^\lambda\big(b^2/c\big)\,, \tag{6.7}$$

где $J_n(t)$ – функция Бесселя первого рода, для исследуемых интегралов получаем следующие выражения:

$$f^{(n)}(\mathrm{s}) = (-1)^n 2\pi\, e^{-s^2/2}L_n\big(s^2\big)\,, \tag{6.8}$$

$$f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s}) = i\,(-1)^{n-1}2\pi s_\alpha\, e^{-s^2/2}L_{n-1}^1(s^2). \tag{6.9}$$

В терминах функций $f^{(n)}(\mathrm{s})$ и $f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s})$ исходные интегралы представляются как

$$I^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{s}\; e^{-i(\mathrm{sz})}\, f^{(n)}(\mathrm{s})\, f^{(m)}(\mathrm{s}), \tag{6.10}$$

$$I_\alpha^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{s}\; e^{-i(\mathrm{sz})}\, f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s})\, f^{(m)}(\mathrm{s}), \tag{6.11}$$

$$I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\mathrm{s}\; e^{-i(\mathrm{sz})}\, f_\alpha^{(n)}(\mathrm{s})\, f_\beta^{(m)}(\mathrm{s}). \tag{6.12}$$

Поскольку интегралы $I_\alpha^{(n,m)}(\mathrm{z})$, $I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z})$ имеют векторную и тензорную структуру, а тензорная структура является симметричной, то они могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(n,m)}(\mathrm{z}) &= B^{(n,m)}\mathrm{z}_\alpha, \\ I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z}) &= C^{(n,m)}\delta_{\alpha\beta} + D^{(n,m)}\mathrm{z}_\alpha\mathrm{z}_\beta. \end{aligned}$$

Коэффициенты $B^{(n,m)}$, $C^{(n,m)}$ и $D^{(n,m)}$ находятся свёрткой интегралов с z_α, $\delta_{\alpha\beta}$ и $\mathrm{z}_\alpha\mathrm{z}_\beta$. Вычисление полученных таким образом скалярных интегралов также удобно проводить в цилиндрических координатах, где полярный угол отсчитывается от вектора z. При использовании соотношений (6.6) и

$$\int\limits_0^\infty t^{(\varkappa+\lambda)/2} e^{-ct} J_{\varkappa+\lambda}(b\sqrt{t})\, L_p^\varkappa(t)\, L_k^\lambda(t)\, dt =$$

$$= \frac{(-1)^{p+k}}{c}\left(\frac{b}{2c}\right)^{\varkappa+\lambda} e^{-b^2/4} L_p^{\lambda+k-p}\big(b^2/4c\big)\, L_k^{\varkappa+p-k}\big(b^2/4c\big)\,, \tag{6.13}$$

интегралы $I^{(n,m)}(\mathrm{z})$ и $I_\alpha^{(n,m)}(\mathrm{z})$ легко вычисляются. Чтобы привести последнюю свертку $\mathrm{z}_\alpha\mathrm{z}_\beta I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z})$ к виду интеграла (6.6), необходимо воспользоваться соотношением $2\cos^2\!\varphi = 1 + \cos 2\varphi$. Дальнейшее интегрирование сводится к использованию соотношения (6.13) совместно со следующим свойством полиномов Лагерра:

$$k!\, L_k^{\lambda-k}(x) = \lambda!\,(-x)^{k-\lambda} L_\lambda^{k-\lambda}(x). \tag{6.14}$$

Окончательный результат вычисления интегралов даёт:

$$I^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \pi\, e^{-z^2/4} L_n^{m-n}\big(z^2/4\big)\, L_m^{n-m}\big(z^2/4\big)\,, \tag{6.15}$$

$$2\, I_\alpha^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \pi\, e^{-z^2/4} z_\alpha L_{n-1}^{m-n+1}\big(z^2/4\big)\, L_m^{n-m}\big(z^2/4\big)\,, \tag{6.16}$$

$$8\, I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z}) = \pi\, e^{-z^2/4}\Big[\big(2\, z_\alpha z_\beta - z^2 \Lambda_{\alpha\beta}\big)\, L_{n-1}^{m-n+1}\big(z^2/4\big)\, L_{m-1}^{n-m+1}\big(z^2/4\big) - \\ - 4\, n\, \Lambda_{\alpha\beta}\, L_n^{m-n}\big(z^2/4\big)\, L_{m-1}^{n-m}\big(z^2/4\big)\Big], \tag{6.17}$$

где для обобщения на случай 4-векторов мы от $\delta_{\alpha\beta}$ перешли к $\Lambda_{\alpha\beta}$. Отметим, что интеграл $I_{\alpha\beta}^{(n,m)}(\mathrm{z})$ симметричен не только относительно перестановки α и β, но и относительно перестановки n и m.

7. Светимость в процессе нейтринного синхротронного излучения

В данном разделе в формализме матрицы плотности вычисляется нейтринная светимость в процессе синхротронного излучения нейтринной пары электроном (позитроном). История изучения этого процесса насчитывает более сорока лет. Выражение для нейтринной светимости процесса и интерполяционные формулы для численного расчета можно найти в обзоре [8], где предполагалось, что плазма прозрачна для родившихся нейтрино.

Вычислим $\mathcal{P}_\mu^{(1)}$ (1.10) для нейтрино определенного аромата в том же предположении. Результат вычислений необходимо просуммировать по всем ароматам нейтрино $i = e, \mu, \tau$, учитывая значения векторных и аксиальных констант (5.2) слабых токов. При переходе от канала рассеяния к нейтринному синхротронному излучению необходимо сменить знак у 4-импульса нейтрино ($k_\mu \to -k_\mu$), после чего выражение (5.11) приводится к виду:

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{G_1^2}{8(2\pi)^8} \int \frac{d^3k}{\omega} \int \frac{d^3k'}{\omega'}\, (k+k')_\mu\, L_{\alpha\beta}^{(\nu)} \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \int \frac{d^3p}{\varepsilon_n}\, f(\varepsilon_n)\, \times \\ \times \int \frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}}\, [1 - f(\varepsilon'_{n'})]\, e^{-(u+u')/2}\, L_{\alpha\beta}^{(e)}\, \delta^{(4)}(p - p' - k - k'). \tag{7.1}$$

Напомним, что здесь $p^{(\prime)\mu} = (\varepsilon^{(\prime)}_{n^{(\prime)}}, \vec{p}^{(\prime)})$ – 4-векторы импульса начального (конечного) электрона, электронный шпур $L_{\alpha\beta}^{(e)}$ соответствует выражению (5.13) при $\varrho = -1$, нейтринный шпур $L_{\alpha\beta}^{(\nu)}$ – выражению (5.14), и для электронов используются равновесные функции распределения:

$$f(\varepsilon_n) = \frac{1}{e^{\varepsilon_n/T-\eta} + 1}, \tag{7.2}$$

где $\eta = \mu/T$. Выражение (7.1) может быть ковариантно проинтегрировано по импульсам нейтрино. Введем тензорный интеграл $I_{\alpha\beta}$, который довольно легко вычисляется:

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{\omega} \int \frac{d^3k'}{\omega'}\, \delta^{(4)}(k + k' - q)\, L^{(\nu)}_{\alpha\beta} = \\ = \frac{16\pi}{3} \left(q_\alpha q_\beta - q^2 g_{\alpha\beta}\right) \theta(q^2). \tag{7.3}$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести интегральное представление единицы:

$$\int d^4q\, \delta^{(4)}(p - p' - q) = 1, \tag{7.4}$$

тогда выражение (7.1) может быть приведено к виду:

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{G_1^2}{3(2\pi)^7} \int d^4q\;\, q_\mu\, \theta(q^2) \sum_{n,n'=0}^{\infty} (-1)^{n+n'} \int \frac{d^3p}{\varepsilon_n}\, f(\varepsilon_n) \times \tag{7.5}$$
$$\times \int \frac{d^3p'}{\varepsilon'_{n'}} \left[1 - f(\varepsilon'_{n'})\right] e^{-(u+u')/2}\, \delta^{(4)}(p - p' - q) \left(q_\alpha q_\beta L^{(e)}_{\alpha\beta} - q^2 g_{\alpha\beta} L^{(e)}_{\alpha\beta}\right).$$

Рассмотрим нулевую компоненту Q_S этого 4-вектора (нейтринную светимость). При вычислении свертки $L^{(e)}_{\alpha\beta}$ с векторами q_α и q_β в светимости не следует учитывать члены, линейные по c, поскольку они линейны либо по p_3, либо по p'_3, и зануляются при интегрировании по этим переменным. В результате получим:

$$\begin{aligned} q_\alpha q_\beta L^{(e)}_{\alpha\beta} = {} & 2\,(1 + c^2)\Big\{ -(p\tilde{\Lambda}p')\, q_\perp^2 \left[L_n(u)L_{n'-1}(u') + L_{n-1}(u)L_{n'}(u')\right] + \\ & + \Big(2(p\tilde{\Lambda}q)\,(p'\tilde{\Lambda}q) - q_\parallel^2\,(p'\tilde{\Lambda}p)\Big) \left[L_n(u)L_{n'}(u') + L_{n-1}(u)L_{n'-1}(u')\right] + \\ & + 4(p\Lambda q)\,(p'\tilde{\Lambda}q)\, L^1_{n-1}(u) \left[L_{n'}(u') - L_{n'-1}(u')\right] + \\ & + 4(p'\Lambda q)\,(p\tilde{\Lambda}q)\, L^1_{n'-1}(u') \left[L_n(u) - L_{n-1}(u)\right] + \\ & + 8\left(2(p\Lambda q)\,(p'\Lambda q) + q^2\,(p'\Lambda p)\right) L^1_{n-1}(u)\, L^1_{n'-1}(u')\Big\} + \\ & + 2m^2\,(1 - c^2)\Big\{ q_\parallel^2 \left[L_n(u)L_{n'}(u') + L_{n-1}(u)L_{n'-1}(u')\right] + \\ & + q_\perp^2 \left[L_n(u)L_{n'-1}(u') + L_{n-1}(u)L_{n'}(u')\right] \Big\}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где $u = 2p_\perp^2/eB$, $u' = 2p_\perp'^2/eB$, $n^{(\prime)}$ — уровни Ландау начальной (конечной) частицы.

Свертка $g_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(e)}$ имеет простой компактный вид:

$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}^{(e)} = & -4m^2\,(1-c^2)\,[L_n(u) - L_{n-1}(u)]\,[L_{n'}(u) - L_{n'-1}(u')] + \\
& + 4\,(1+c^2)\Big\{(p'\tilde{\Lambda}p)\,[L_{n'}(u')L_{n-1}(u) + L_{n'-1}(u')L_n(u)] + \\
& + 8(p'\Lambda p)\,L_{n-1}^1(u)\,L_{n'-1}^1(u')\Big\}.
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

Далее приведем результаты вычисления содержащихся в (7.5) интегралов по поперечным к полю компонентам импульсов электронов в терминах нормированных функций Лагерра [8]:

$$
F_{n',n}(\upsilon) = \sqrt{\frac{n'!}{n!}}\,\upsilon^{(n-n')/2}\,e^{-\upsilon/2}\,L_{n'}^{n-n'}(\upsilon) = n'!\,I_{n,n'}(\upsilon). \tag{7.8}
$$

Скалярный, векторные и тензорный интегралы в терминах этих функций могут быть представлены в виде:

$$
\begin{aligned}
S^{(n',n)}(\upsilon) &= \int d^2p_\perp \int d^2p'_\perp\,\delta_\perp^{(2)} L_n(u)L_{n'}(u')\,e^{-(u+u')/2} = \\
&= (-1)^{n'-n}\,\frac{\pi eB}{2}\,F_{n',n}^2(\upsilon),
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

$$
\begin{aligned}
V_\alpha^{(n',n)}(\upsilon) &= \int d^2p_\perp \int d^2p'_\perp\,\delta_\perp^{(2)} p_{\perp\alpha}\,L_{n-1}^1(u)L_{n'}(u')\,e^{-(u+u')/2} = \\
&= (-1)^{n'-n-1}\,\frac{\pi eB}{4}\sqrt{\frac{n}{\upsilon}}\,q_{\perp\alpha}\,F_{n',n}(\upsilon)\,F_{n',n-1}(\upsilon),
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

$$
\begin{aligned}
V_\alpha^{(n,n')}(\upsilon) &= \int d^2p_\perp \int d^2p'_\perp\,\delta_\perp^{(2)} p'_{\perp\alpha}\,L_n(u)L_{n'-1}^1(u')\,e^{-(u+u')/2} = \\
&= (-1)^{n-n'-1}\,\frac{\pi eB}{4}\sqrt{\frac{n'}{\upsilon}}\,q_{\perp\alpha}\,F_{n',n}(\upsilon)\,F_{n'-1,n}(\upsilon),
\end{aligned} \tag{7.11}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta}^{(n,n')}(\upsilon) &= \int d^2p_\perp \int d^2p'_\perp\,\delta_\perp^{(2)} p_{\perp\alpha}p'_{\perp\beta}\,L_{n-1}^1(u)L_{n'-1}^1(u')\,e^{-(u+u')/2} = \\
&= (-1)^{n'-n}\,\frac{\pi eB}{16}\,\frac{\sqrt{nn'}}{\upsilon}\Big[\left(2q_{\perp\alpha}\,q_{\perp\beta} - q_\perp^2\,\Lambda_{\alpha\beta}\right)F_{n',n-1}(\upsilon)\,F_{n'-1,n}(\upsilon) + \\
&\qquad + q_\perp^2\,\Lambda_{\alpha\beta}\,F_{n',n}(\upsilon)\,F_{n'-1,n-1}(\upsilon)\Big],
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

где $\upsilon = q_\perp^2/(2eB)$, $\delta_\perp^{(2)} = \delta^{(2)}(\vec{p}_\perp - \vec{p}\,'_\perp - \vec{q}_\perp)$ – произведение δ-функций в поперечном пространстве.

После вычисления интегралов по поперечным к полю импульсам электронов, нейтринная светимость процесса может быть приведена к виду:

$$
\begin{aligned}
Q_S = \frac{G_1^2 eB}{6(2\pi)^6} \int d^4 q\, q_0\, \theta(q^2) \sum_{n,n'} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{\varepsilon_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_3}{\varepsilon'_{n'}} f(\varepsilon_n) \left[1 - f(\varepsilon'_{n'})\right] \delta_\parallel^{(2)} \times \\
\times \Big\{ \left(1 + c^2\right) q^2 \Big[2eB(n + n')\Big(\Psi(\upsilon) - \Phi(\upsilon)\Big) - q^2 \Psi(\upsilon)\Big] - \\
- 2m^2 \Big[q^2 \left(\Phi(\upsilon) - 2c^2 \Psi(\upsilon)\right) + c^2 q_\perp^2 \left(\Phi(\upsilon) - \Psi(\upsilon)\right)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

где $\Phi(\upsilon) = F^2_{n',n}(\upsilon) + F^2_{n'-1,n-1}(\upsilon)$, $\Psi(\upsilon) = F^2_{n',n-1}(\upsilon) + F^2_{n'-1,n}(\upsilon)$ и $\delta_\parallel^{(2)} = \delta(\varepsilon_n - \varepsilon'_{n'} - q_0)\, \delta(p_3 - p'_3 - q_3)$ – произведение δ-функций в продольном пространстве.

Полученное выражение (7.13) совпадает с результатом, приведенным в обзоре [8].

Нейтринная светимость в процессе аннигиляции (1.4) может быть легко получена из (7.13) при заменах в подынтегральном выражении $\varepsilon'_{n'} \to -\varepsilon'_{n'}$, $p'_3 \to -p'_3$, $1 - f(\varepsilon'_{n'}) \to f(\varepsilon'_{n'})$, с заменой знака химического потенциала μ в функции распределения $f(\varepsilon'_{n'})$ и у члена в фигурных скобках, пропорционального квадрату массы электрона. Последняя замена обусловлена использованием матрицы плотности $\rho_{n'}^{(-)}(p')$ (4.33) для позитрона ($\varrho = -1$), которая отличается от $\rho_{n'}^{(+)}(p')$ (4.22) для электрона ($\varrho = -1$) знаком перед массой частицы.

В случае сильного магнитного поля, концентрация электронов и позитронов на уровнях Ландау с $n \geq 1$ экспоненциально подавлена, поэтому в процессе (1.4) ограничимся рассмотрением вкладов либо с $n = 0$, либо с $n' = 0$, а в процессе (1.7) – вклада с $n' = 0$. Тогда выражение для нейтринной светимости (7.13) существенно упрощается:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} Q_S^{(n,0)} = \frac{G_1^2 eB}{6(2\pi)^6} \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4 q\, q_0\, \theta(q^2)\, I_n(q_0, q_3, \eta, T) \times \\
\times \Big\{ \left(1 + c^2\right) q^2 \left(2eBn - q_\parallel^2\right) F^2_{0,n-1}(\upsilon) - \\
- 2m^2 \left[\left(q_\parallel^2 - (1 - c^2)\, q_\perp^2\right) F^2_{0,n}(\upsilon) - c^2 \left(2q_\parallel^2 - q_\perp^2\right) F^2_{0,n-1}(\upsilon)\right] \Big\},
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

где было использовано известное соотношение для функций Лагерра: $F^2_{0,n}(\upsilon) = \upsilon\, F^2_{0,n-1}(\upsilon)/n$. В (7.14) под $I_n(q_0, q_3, \eta, T)$ понимается интеграл:

$$I_n(q_0, q_3, \eta, T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_3}{\varepsilon_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_3}{\varepsilon'_0}\, f(\varepsilon_n)\, [1 - f(\varepsilon'_0)]\; \delta^{(2)}_{\parallel}. \tag{7.15}$$

Ниже мы приводим результат вычисления этого интеграла для случая ультрарелятивистской плазмы ($\varepsilon_n^2, \varepsilon_0'^2 \gg m^2$):

$$I_n(q_0, q_3, \eta, T) = \frac{2\;\theta(2eBn - q_\parallel^2)}{2eBn - q_\parallel^2}\; \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T), \tag{7.16}$$

$$\Phi_n(q_0, q_3, \eta, T) = \left[\exp\left(\frac{q_0}{2T}\,\frac{q_\parallel^2 + 2eBn}{q_\parallel^2} - \frac{q_3}{2T}\,\frac{q_\parallel^2 - 2eBn}{q_\parallel^2} - \eta\right) + 1\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[\exp\left(\frac{q_0 + q_3}{2T}\,\frac{q_\parallel^2 - 2eBn}{q_\parallel^2} + \eta\right) + 1\right]^{-1} + \quad (q_3 \to -q_3). \tag{7.17}$$

Таким образом, нейтринная светимость ультрарелятивистской плазмы в синхротроне (1.7) при переходе электрона на основной уровень Ландау описывается выражением:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_S^{(n,0)} = \frac{G_1^2 eB}{6(2\pi)^5}\;\left(1 + c^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} dq_0\, q_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_3\, \times \tag{7.18}$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} dq_\perp^2\, \theta(q^2)\, \theta(2eBn - q_\parallel^2)\, q^2\, F^2_{0,n-1}(\upsilon)\, \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T).$$

Легко увидеть, что $Q_S^{(n,0)}$ обращается в ноль при $n = 0$.

Приведем далее выражение для нейтринной светимости в кроссинг-процессе аннигиляции (1.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_A^{(n,0)} = \frac{G_1^2 eB}{6(2\pi)^5} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} dq_0\, q_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dq_3\, \times \tag{7.19}$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} dq_\perp^2\, \theta(q^2)\, \theta(q_\parallel^2 - 2eBn)\, \mathcal{F}_n(q_\parallel^2, q_\perp^2)\, \Phi_n(q_0, q_3, \eta, T),$$

$$\mathcal{F}_n(q_\parallel^2, q_\perp^2) = \left(1 + c^2\right) q^2 \, F_{0,n-1}^2(\upsilon) + \frac{2m^2}{q_\parallel^2 - 2eBn} \times \tag{7.20}$$
$$\times \left[\left(q_\parallel^2 - \left(1 - c^2\right) q_\perp^2 \right) F_{0,n}^2(\upsilon) - c^2 \left(2q_\parallel^2 - q_\perp^2 \right) F_{0,n-1}^2(\upsilon) \right].$$

В $\mathcal{F}_n(q_\parallel^2, q_\perp^2)$ намеренно удержан член, пропорциональный квадрату массы электрона m^2, поскольку, в отличие от синхротрона, светимость в процессе аннигиляции не зануляется даже в случае, когда электрон и позитрон находятся на основном уровне Ландау.

При $n = 0$ интегрирование $Q_A^{(0,0)}$ по $q_\perp^2$ тривиально:

$$Q_A^{(0,0)} = \frac{G_1^2 eB \, m^2}{6(2\pi)^5} \left(1 + c^2\right) \int\limits_0^\infty dq_0 \, q_0 \int\limits_{-\infty}^\infty dq_3 \, q_\parallel^2 \, \theta(q_\parallel^2) \, \Phi_0(q_0, q_3, \eta, T). \tag{7.21}$$

В асимптотике сверхсильного магнитного поля ($n = n' = 0$) полученная нейтринная светимость в процессе аннигиляции ультрарелятивистской пары линейна по полю и пропорциональна квадрату массы электрона.

При $\eta = 0$ функция $\Phi_0(q_0, q_3, \eta, T)$ упрощается и двухкратный интеграл (7.21) вычисляется аналитически:

$$Q_A^{(B)} = \frac{\zeta(3)}{48\pi^3} \left(1 + c^2\right) G_1^2 \, eB \, m^2 \, T^5. \tag{7.22}$$

Этот результат совпадает с выражением для нейтринной светимости ультрарелятивистской невырожденной плазмы в асимптотике сверхсильного магнитного поля, полученным в [8].

Для сравнения оценим вклад в светимость первого уровня Ландау ($n = 1$), используя следующие безразмерные отношения:

$$R_S^{(1)}(T, B) = \frac{Q_S^{(1,0)}}{Q_A^{(B)}}, \tag{7.23}$$

где $Q_S^{(1,0)}$ — суммарная по электронам и позитронам светимость при синхротронном переходе с уровня $n = 1$ на уровень $n' = 0$, и

$$R_A^{(1)}(T, B) = \frac{Q_A^{(0,0)} + Q_A^{(1,0)} + Q_A^{(0,1)}}{Q_A^{(B)}}. \tag{7.24}$$

Эти отношения показывают, насколько нейтринные светимости ультрарелятивистской невырожденной плазмы в процессах (1.7) и (1.4) отличаются от асимптотического выражения (7.22). Нетрудно привести формулы (7.23) и (7.24) к виду:

$$R_S^{(1)} \;=\; \frac{64}{\pi^2\zeta(3)} \left(\frac{T}{m}\right)^2 I_S\left(\sqrt{\frac{eB}{2T^2}}\right), \tag{7.25}$$

$$R_A^{(1)} \;=\; 1+\frac{64}{\pi^2\zeta(3)} \left(\frac{T}{m}\right)^2 I_A\left(\sqrt{\frac{eB}{2T^2}}\right), \tag{7.26}$$

где введены следующие функции:

$$I_S(\alpha) = \alpha^7 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv \int\limits_{0}^{1} du \left[e^{-u}+u-1\right] \Phi_1(u,v;\alpha), \tag{7.27}$$

$$I_A(\alpha) = \alpha^7 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dv \int\limits_{1}^{\infty} du \left[e^{-u}+u-1\right] \Phi_1(u,v;\alpha), \tag{7.28}$$

$$\Phi_1(u,v;\alpha) = \left\{\exp\left[\frac{\alpha}{u}\left((1+u)\,\sqrt{u+v^2}-(u-1)\,v\right)\right]+1\right\}^{-1} \times$$
$$\times \left\{\exp\left[\frac{\alpha}{u}\,(u-1)\left(\sqrt{u+v^2}+v\right)\right]+1\right\}^{-1}.$$

Отметим, что в пределе сильного магнитного поля выражения (7.25) и (7.26) хорошо согласуются с интерполяционными формулами, приведенными для процессов (1.7) и (1.4) в обзоре [8].

Полученный результат может быть использован для оценки нейтринных потерь из приповерхностной области магнитара, заполненной электрон-позитронной плазмой, в период гигантской вспышки SGR [4]. Для характерных значений температуры $T \gtrsim 1$ МэВ и напряженности магнитного поля $10^{15} \lesssim B \lesssim 10^{16}$ Гс этой плазмы отношения (7.25) и (7.26) составляют десятки [6]. Отсюда следует, что в период вспышечной активности магнитара потери энергии плазмы за счет нейтрино велики и не оставляют необходимого энергетического запаса на радиационное излучение. Таким образом, в рамках магнитарной модели трудно объяснить энергетику гамма-излучения гигантской вспышки SGR.

8. URCA-процессы в произвольном по напряженности постоянном магнитном поле

В данном разделе рассматриваются важные в релятивистской астрофизике URCA-процессы на примере реакции рождения нейтрино при аннигиляции протона и электрона в произвольном по напряженности постоянном магнитном поле (1.1). Матричный элемент данного процесса и его квадрат приводились ранее (см. (5.6) и (5.10)), хотя и в других обозначениях. В этом разделе далее будут использованы следующие обозначения: $\{E', \vec{P}', s'\}$, $\{E_{n'}, P_2, P_3, s\}$, $\{\varepsilon_n, p_2, p_3, s_e\}$, $\{\omega, \vec{k}\}$ – энергии, импульсы и поляризации нейтрона, протона, электрона и нейтрино. Для дальнейших вычислений лептонный шпур удобно представить в виде:

$$L_{\alpha\beta} = 2\,(-1)^n e^{-u/2}\,[\tilde{L}^{(-)}_{\alpha\beta}\,L_n(u) - \tilde{L}^{(+)}_{\alpha\beta}\,L_{n-1}(u) + \tilde{L}^{(2)}_{\alpha\beta}\,L^1_{n-1}(u)], \quad (8.1)$$

где $u = 2p_\perp^2/eB$, а отдельные вклады в него определяются как

$$\tilde{L}^{(\sigma)}_{\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\hat{k}\,\gamma_\alpha\,\hat{p}_\parallel\,\Pi_\sigma\,\gamma_\beta(1+\gamma_5)\Big], \quad (8.2)$$

$$\tilde{L}^{(2)}_{\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\hat{k}\,\gamma_\alpha\,\hat{p}_\perp\,\gamma_\beta(1+\gamma_5)\Big]. \quad (8.3)$$

Нуклонный шпур может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} N^{(s',s)}_{\alpha\beta} = {} & (-1)^{n'}\,e^{-u'/2}\,m_N m_p \times \\ & \times\Big\{(1+g^2)\Big[\tilde{N}^{(s',+1)}_{1\,\alpha\beta}L_{n'}(u') - \tilde{N}^{(s',-1)}_{1\,\alpha\beta}L_{n'-1}(u')\Big] + \\ & + 2g\Big[\tilde{N}^{(s',+1)}_{2\,\alpha\beta}L_{n'}(u') - \tilde{N}^{(s',-1)}_{2\,\alpha\beta}L_{n'-1}(u')\Big] + \\ & + (1-g^2)\Big[\tilde{N}^{(s',+1)}_{3\,\alpha\beta}L_{n'}(u') - \tilde{N}^{(s',-1)}_{3\,\alpha\beta}L_{n'-1}(u')\Big]\Big\}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где $u' = 2P_\perp^2/eB$, и отдельные вклады даются следующими выражениями:

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{1\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\hat{v}_\parallel\Pi_{s'}\gamma_\alpha\hat{v}_\parallel\Pi_s\gamma_\beta\Big], \quad (8.5)$$

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{2\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\hat{v}_\parallel\Pi_{s'}\gamma_\alpha\hat{v}_\parallel\Pi_s\gamma_\beta\gamma_5\Big], \quad (8.6)$$

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{3\alpha\beta} = \mathrm{Sp}\Big[\Pi_{s'}\gamma_\alpha\Pi_s\gamma_\beta\Big]. \quad (8.7)$$

Приведенные лептонные и нуклонные шпуры могут быть вычислены с помощью полезных соотношений, сверток и шпуров, приведенных в Разделе 2. Результат вычисления нуклонных шпуров дает:

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{1\alpha\beta} = 2\left[\Big(2(\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha(\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta - \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}\Big)\delta_{s',s} + \Big(\Lambda_{\alpha\beta} + is\varphi_{\alpha\beta}\Big)\delta_{s',-s}\right], \quad (8.8)$$

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{2\alpha\beta} = 2s\left[(\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha(\upsilon\tilde{\varphi})_\beta + (\upsilon\tilde{\varphi})_\alpha(\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta\right]\delta_{s',-s}\,, \quad (8.9)$$

$$\tilde{N}^{(s',s)}_{3\alpha\beta} = 2\left[\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}\delta_{s',s} - \Big(\Lambda_{\alpha\beta} + is\varphi_{\alpha\beta}\Big)\delta_{s',-s}\right]. \quad (8.10)$$

Аналогичные вычисления для лептонных шпуров приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}^{(\sigma)}_{\alpha\beta} = 2\Big\{ &(k\tilde{\Lambda})_\alpha(p\tilde{\Lambda})_\beta + (k\tilde{\Lambda})_\beta(p\tilde{\Lambda})_\alpha - (k\tilde{\Lambda}p)\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} + \\
&+ \sigma\Big((k\tilde{\Lambda})_\alpha(p\tilde{\varphi})_\beta + (k\tilde{\varphi})_\alpha(p\tilde{\Lambda})_\beta\Big) + \\
&+ (\Lambda_{\alpha\beta} + i\sigma\varphi_{\alpha\beta})\Big((k\tilde{\Lambda}p) - \sigma(k\tilde{\varphi}p)\Big) - \\
&- \Big((k\Lambda)_\alpha - i\sigma(k\varphi)_\alpha\Big)\Big((p\tilde{\Lambda})_\beta + \sigma(p\tilde{\varphi})_\beta\Big) - \\
&- \Big((k\Lambda)_\beta + i\sigma(k\varphi)_\beta\Big)\Big((p\tilde{\Lambda})_\alpha + \sigma(p\tilde{\varphi})_\alpha\Big)\Big\},
\end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{L}^{(2)}_{\alpha\beta} = 8\Big[&(p\Lambda)_\alpha(k\tilde{\Lambda})_\beta + (p\Lambda)_\beta(k\tilde{\Lambda})_\alpha - \\
&- (p\Lambda k)\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - (k\Lambda)_\alpha(p\Lambda)_\beta + (k\varphi)_\alpha(p\varphi)_\beta + \\
&+ i\Big((k\tilde{\varphi})_\alpha(p\varphi)_\beta - (k\tilde{\varphi})_\beta(p\varphi)_\alpha - (k\varphi p)\Big)\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\Big].
\end{aligned} \quad (8.12)$$

Для астрофизических приложений интерес представляет расчет 4-импульса, уносимого нейтрино из единицы объема среды в единицу времени (5.12). При предположении $eB/m_p \ll \bar{\varepsilon}_e,\, \bar{\omega}$, где $\bar{\varepsilon}_e$, $\bar{\omega}$ – средние энергии электрона и нейтрино, которое хорошо выполняется в основных приложениях URCA-процессов к расчету нейтринного остывания оболочки сверхновой, в выражениях для энергии нуклонов можно пренебречь членами eB/m_p, $\tilde{g}_p eBs/2m_p$, $g_N eBs'/2m_N$. Это эквивалентно пренебрежению энергией взаимодействия аномального магнитного момента нуклонов с магнитным полем и формальной замене:

$$\sum_{n'=0}^{\infty}(-1)^{n'-1}L_{n'-1}(u') \Longrightarrow \sum_{n'=0}^{\infty}(-1)^{n'}L_{n'}(u'). \quad (8.13)$$

В результате замены под знаком суммы по n' выражение для нуклонного шпура (8.4) существенно упрощается:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n'=0}^{\infty} N_{\alpha\beta}^{s',s} = \sum_{n'=0}^{\infty} (-1)^{n'} m_N m_p e^{-u'/2} L_{n'}(u') \times \\
\times 4 \Big\{ (1+g^2) \Big[\Big(2(\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha (\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta - \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} \Big) \delta_{s',s} + (\Lambda_{\alpha\beta} + is\varphi_{\alpha\beta}) \delta_{s',-s} \Big] + \\
+ 2gs \Big((\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha (\upsilon\tilde{\varphi})_\beta + (\upsilon\tilde{\varphi})_\alpha (\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta \Big) \delta_{s',s} + \\
+ (1-g^2) \Big(\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} \delta_{s',s} - (\Lambda_{\alpha\beta} + is\varphi_{\alpha\beta}) \delta_{s',-s} \Big) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

Свертка этого выражения с лептонным шпуром (8.1) приводит к следующему выражению для 4-импульса, уносимого нейтрино из единичного объема среды в единицу времени:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_\mu}{dV dt} = \frac{2\tilde{G}^2}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3\vec{k}}{\omega} k_\mu (1-f_\nu) \sum_{n,n'} \sum_{s,s'} \int \frac{d^3\vec{P}'}{E'} m_N (1-f_N) \times \\
\times \int \frac{d^3\vec{p}}{\varepsilon} f_e(\varepsilon_n) \int \frac{d^3\vec{P}}{E_{n'}} m_p f_p(E_{n'}) (-1)^{n+n'} e^{-(u+u')/2} L_{n'}(u')\ \delta^{(4)} \times \\
\times \Big\{ \delta_{s',s} \Big[(1+g^2) \big(L_n(u) - L_{n-1}(u) \big) + 2gs \big(L_n(u) + L_{n-1}(u) \big) \Big] \times \\
\times \Big(2(\upsilon\tilde{\Lambda}k)(\upsilon\tilde{\Lambda}p) - (k\tilde{\Lambda}p) \Big) + \\
+ \delta_{s',s} \Big[(1+g^2) \big(L_n(u) + L_{n-1}(u) \big) + 2gs \big(L_n(u) - L_{n-1}(u) \big) \Big] \times \\
\times \Big((\upsilon\tilde{\Lambda}k)(\upsilon\tilde{\varphi}p) + (\upsilon\tilde{\Lambda}p)(\upsilon\tilde{\varphi}k) \Big) + \\
+ 2\,\delta_{s',-s}\, g^2 \Big[\Big(\big(L_n(u) - L_{n-1}(u) \big) + s \big(L_n(u) + L_{n-1}(u) \big) \Big) (p\tilde{\Lambda}k) - \\
- \Big(\big(L_n(u) + L_{n-1}(u) \big) + s \big(L_n(u) - L_{n-1}(u) \big) \Big) \Big] (p\tilde{\varphi}k) - \\
- 4\delta_{s',s}\, (1-g^2) L_{n-1}^1(u)\, (p\Lambda k) \Big\},
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

где $\delta^{(4)} {=} \delta^{(4)}(p + P - P' - k)$ – произведение δ-функций по энергии и компонентам импульса, а $\upsilon_\mu = 1/\sqrt{1-v^2}\{1, 0, 0, v\}$ – 4-скорость движения среды вдоль вектора напряженности магнитного поля. Данное выражение содержит интегралы по поперечным к направлению поля компонентам импульсов электрона и протона. Техника вычислений подобных интегралов изложена в Разделе (6.) Ниже мы приводим результат вычисления скалярного и векторного интегралов по поперечным компонентам, которые входят в выражение (8.15):

$$\int d^2\vec{p}_\perp \int d^2\vec{P}_\perp\, \delta^{(2)}(\vec{P}_\perp + \vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)\, e^{-(u+u')/2}\, L_n(u)L_m(u') =$$
$$= (-1)^{m-n}\,\frac{\pi eB}{2}\; F^2_{m,n}\left(\frac{q^2_\perp}{2eB}\right), \tag{8.16}$$

$$\int d^2\vec{p}_\perp \int d^2\vec{P}_\perp\, \delta^{(2)}(\vec{P}_\perp + \vec{p}_\perp - \vec{q}_\perp)\, e^{-(u+u')/2}\,(p\Lambda k)\, L^1_{n-1}(u)L_{n'}(u') =$$
$$= (-1)^{n'-n+1}\,\frac{\pi eB}{4}\sqrt{\frac{2eBn}{q^2_\perp}}\,(k\Lambda q)\, F_{n',n}\left(\frac{q^2_\perp}{2eB}\right) F_{n',n-1}\left(\frac{q^2_\perp}{2eB}\right), \tag{8.17}$$

где введены функции:

$$F_{m,n}(x) = (-1)^{m-n}F_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{m!}{n!}}x^{(n-m)/2}e^{-x/2}L^{n-m}_m(x) \tag{8.18}$$

В системе покоя среды $\upsilon = (1,0,0,0)$, и в предположении, что нуклоны являются нерелятивистскими $E_{n'} \approx m_p$, $E' \approx m_N$ нейтринная светимость из единицы объема приводится к виду:

$$Q = \frac{dP_0}{dV dt} = \frac{G_F^2\cos^2\theta_c eB}{(2\pi)^7}\sum_{n,n'}\sum_{s,s'}\int d^3\vec{k}\,\big(1 - f_\nu(k)\big)\,\omega\,\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} dp_3\, f_e(\varepsilon_n)\int_{-\infty}^{\infty} dP_3\, f_p(E_{n'})\int d^3\vec{P}'\,\big(1 - f_N(E')\big)\,\delta^{(2)}_{\parallel}\,\times$$
$$\times\Bigg\{\delta_{s',s}\,\frac{(1+g_a^2)}{2}\left[\Big(1+\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1+\frac{k_3}{\omega}\Big)F^2 + \Big(1-\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1-\frac{k_3}{\omega}\Big)F'^2\right] +$$
$$+\;\delta_{s',s}\,g_a s\Big[\Big(1+\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1+\frac{k_3}{\omega}\Big)F^2 - \Big(1-\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1-\frac{k_3}{\omega}\Big)F'^2\Big] +$$
$$+\;\delta_{s',-s}\,g_a^2\Big[(1+s)\Big(1+\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1-\frac{k_3}{\omega}\Big)F^2 +$$
$$+\;(1-s)\Big(1-\frac{p_3}{\varepsilon_n}\Big)\Big(1+\frac{k_3}{\omega}\Big)F'^2\Big] +$$
$$+\;\delta_{s',s}\,(1-g_a^2)\sqrt{\frac{2eBn}{q^2_\perp}}\,\frac{(\vec{k}\vec{q})_\perp}{\varepsilon_n\omega}FF'\Bigg\}.$$

Здесь введены обозначения $F = F_{n',n}\left(q_\perp^2/2eB\right)$, $F' = F_{n'-1,n}\left(q_\perp^2/2eB\right)$, $\delta_\parallel^{(2)} = \delta(\varepsilon_n + E_{n'} - E' - \omega)\,\delta(p_3 + P_3 - P_3' - k_3)$. Напомним что в данном процессе $\varepsilon_n = \sqrt{p_3^2 + 2eBn + m_e^2}$, $E_{n'} = m_p + P_3^2/2m_p + eBn'/m_p$, $E' = m_N + \vec{P}'^2/2m_N$, ω – энергии электрона, протона, нейтрона, нейтрино, $\vec{q}_\perp = (\vec{P}'+\vec{k})_\perp$ – импульс, передаваемый в реакции (1.1) поперек магнитного поля, $g_v \simeq 1$, $g_a \simeq 1{,}26$ – векторная и аксиальная константа заряженного нуклонного слабого тока в низкоэнергетическом приближении. Отметим, что полученное выражение нейтринной светимости совпадает с приведенным в обзоре [8] при умножении его на два и замене $1 - f_\nu \to 1$. Различие объясняется тем, что в цитируемой работе среда нейтронной звезды предполагалась прозрачной для нейтрино и, в дополнение к процессу (1.1), учитывался β-распад нейтрона, что привело, в конечном счете, к удвоению нейтринной светимости.

9. Рассеяние нейтрино на протоне

Реакция (1.6) рассеяния нейтрино всех сортов на протоне ($N = p$) играет важную роль при взрыве сверхновой. За счет процессов рассеяния нейтрино на нуклонах внутренняя, наиболее плотная часть оболочки сверхновой становится частично непрозрачной для нейтрино сортов μ и τ. В магниторотационной модели взрыва сверхновой, как впервые показано в [1, 2], не менее важно вычислить компоненту импульса, передаваемого от нейтрино элементу объема среды в единицу времени в данных процессах. Локальный лагранжиан процесса рассеяния нейтрино на протоне имеет вид (5.1) с константами электрослабого протонного тока (5.3), S – матричный элемент процесса может быть записан в виде (5.5), а его квадрат в виде (5.9). Основным объектом вычисления является переданный от нейтрино среде 4-импульс (5.9).

Для матрицы плотности нерелятивистского протона используем выражение (4.31) с учетом отсутствия вырождения его энергии по уровням Ландау (4.32), матрица плотности нейтрино соответствует стандартному выражению (4.34).

В таком случае нейтринный шпур в выражении (5.9) определяется стандартным образом:

$$L_{\alpha\beta}^{(\nu)} = 8\Big[k'_\alpha k_\beta + k_\alpha k'_\beta - \big(k'k\big) g_{\alpha\beta} + i\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu k'_\nu\Big]. \tag{9.1}$$

Протонный шпур с одинаковыми начальными и конечными поляризациями (без переворота спина) может быть представлен в виде:

$$N_{\alpha\beta}^{(s',s)} = (-1)^{n+n'} \delta_{s',s}\, e^{-(u+u')/2}\, m_p^2\, L_{n'}(u') L_n(u) \Big[(1-g^2)\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} + \\ + (1+g^2) \Big((\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha (\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta + (\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta (\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha - \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}(\upsilon\tilde{\Lambda}\upsilon) \Big) + \\ + 2\, gs \Big((\upsilon\tilde{\Lambda})_\alpha (\upsilon\tilde{\varphi})_\beta + (\upsilon\tilde{\varphi})_\alpha (\upsilon\tilde{\Lambda})_\beta \Big) \Big], \tag{9.2}$$

тогда как с различными начальными и конечными поляризациями (с переворотом спина) имеет вид:

$$N_{\alpha\beta}^{(s',-s)} = (-1)^{n+n'} 2\, e^{-(u+u')/2}\, m_p^2\, L_{n'}(u') L_n(u) \left(\Lambda_{\alpha\beta} + is\varphi_{\alpha\beta} \right) \times \\ \times \Big[(1-g^2) - (1+g^2)(\upsilon\Lambda\upsilon) + 2\, gs(\upsilon\tilde{\varphi}\upsilon) \Big]. \tag{9.3}$$

При переходе в систему покоя среды $\upsilon = (1,0,0,0)$, а свертка протонного и нейтринного шпуров дает:

$$N_{\alpha\,\beta}\, L_{\alpha\,\beta} = 32\, L_{n'}(u') L_n(u) \times \\ \times \Big[\delta_{s',s} \big((1-g^2)(kk')_\perp + (1+g^2)(\omega'\omega + k_3 k_3') + 2gs(\omega' k_3 + \omega k_3') \big) + \\ + \delta_{s',-s}\, 2g^2 \big(\omega\omega' - k_3 k_3' - s(\omega k_3' + \omega' k_3) \big) \Big]. \tag{9.4}$$

После подстановки шпуров в (5.9) и интегрирования по поперечным компонентам импульсов протона (см. интегралы (7.9) – (7.11)) получим:

$$\frac{dP_\alpha^{(\nu)}}{dV dt} = \frac{1}{V} \sum_{n,n';s,s'} \frac{\widetilde{G}_F^2\, eB}{(2\pi)^7} m^2 \int \frac{d^3k}{\omega}\, f_\nu(k) \int \frac{d^3k'}{\omega'} \big(1 - f_\nu(k') \big) \times \\ \times \int \frac{dp_3}{E_n}\, f_p(E_{n,s})\; q_\alpha \int \frac{dp_3'}{E_{n'}} \big(1 - f_p(E_{n,s}) \big)\, F_{n,n'}^2(\vartheta)\; \delta_\parallel^{(2)} \times \\ \times \Big\{ \delta_{s',s} \big[(1-g^2)(kk')_\perp + (1+g^2)(\omega'\omega + k_3 k_3') + 2gs(\omega' k_3 + \omega k_3') \big] + \\ + \delta_{s',-s}\, 2g^2 \big[\omega\omega' - k_3 k_3' - s(\omega k_3' + \omega' k_3) \big] \Big\}, \tag{9.5}$$

где введена $F_{n,n'}(\vartheta) = \sqrt{n!/n'!}\, \vartheta^{(n'-n)/2} e^{-\vartheta/2} L_n^{n'-n}(\vartheta)$ – функция Лагерра, $\vartheta = (k-k')_\perp^2/2eB$, $\delta_\parallel^{(2)} = \delta(p_3 - p_3' + k_3 - k_3')\, \delta(E_n - E_{n'} + \omega - \omega')$. Полученное выражение для 4-импульса справедливо в постоянном, однородном магнитном поле при предположении о нерелятивизме протонов. Дополнительные упрощения связаны с условиями в оболочке сверхновой с коллапсом центральной части при прохождении через нее основного нейтринного потока.

Предполагая, что функция распределения протонов больцмановская, пренебрегаем функцией распределения в конечном состоянии. Поскольку процесс рассеяния нейтрино на протоне почти упругий, основной интерес представляет компонета $dP_{\parallel}^{(\nu)}/dV\,dt$ переданного среде импульса вдоль направления магнитного поля. Ненулевой вклад в эту величину дают подинтегральные члены $\sim k_{\parallel}^2, k_{\parallel}'^2$. При данных условиях для компонент импульса без переворота и с переворотом спина протона получим:

$$\left.\frac{dP_{\parallel}^{(\nu)}}{dV\,dt}\right|_{s'=s} = 2gs\,\frac{\widetilde{G}_F^2\,eB}{(2\pi)^7}\int\frac{d^3k}{\omega}\,f_\nu(k)\int\frac{d^3k'}{\omega'}\,\big(1-f_\nu(k')\big)\sum_{n,\,n'=0}^{\infty}F_{n,n'}^2(\vartheta)\,\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_3\,f_p(E_{n,s})\,(\omega' k_{\parallel}^2-\omega k_{\parallel}'^2)\;\delta\big(eB(n'-n)/m_p-q_0\big), \tag{9.6}$$

$$\left.\frac{dP_{\parallel}^{(\nu)}}{dV\,dt}\right|_{s'=-s} = g^2 s\,\frac{\widetilde{G}_F^2\,eB}{(2\pi)^7}\int\frac{d^3k}{\omega}\,f_\nu(k)\int\frac{d^3k'}{\omega'}\,\big(1-f_\nu(k')\big)\sum_{n,\,n'=0}^{\infty}F_{n,n'}^2(\vartheta)\,\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_3\,f_p(E_{n,s})\,(\omega' k_{\parallel}^2-\omega k_{\parallel}'^2)\;\delta\big(eB(n'-n)/m_p+g_pBs-q_0\big). \tag{9.7}$$

Полученные выражения могут рассматриваться лишь как предварительный результат, поскольку они все еще представляют пятикратный интеграл по импульсам и двухкратное суммирование по уровням Ландау начального (конечного) протона. Важно проанализировать их при условии, что нерелятивистские протоны занимают много уровней Ландау ($n, n' \gg 1$), что хорошо выполняется при магниторотационном взрыве сверхновой.

Список литературы

[1] Гвоздев А. А., Огнев И. С. О возможном усилении магнитного поля процессами переизлучения нейтрино в оболочке сверхновой // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. С. 337.

[2] Гвоздев А. А., Огнев И. С. Процессы взаимодействия нейтрино с нуклонами оболочки коллапсирующей звезды с сильным магнитным полем // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. С. 1219.

[3] Mereghetti S. The strongest cosmic magnets: soft gamma-ray repeaters and anomalous X-ray pulsars // Astron Astrophys Rev. 2008. Vol. 15. P. 225.

[4] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // MNRAS. 1995. Vol. 275. P. 255.

[5] Thompson C., Duncan R. C. The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfven Wave Emission // ApJ. 1996. Vol. 473. P. 322.

[6] Гвоздев А. А., Огнев И. С., Осокина Е. В. Нижнее ограничение на напряженность магнитного поля магнитара из анализа гигантских вспышек SGR // Письма в Астрономический журнал. 2011. Т. 37. С. 365.

[7] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М: Наука, 1974. С. 392.

[8] Yakovlev D. G., Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Haensel P. Neutrino emission from neutron stars // Physics Reports. 2001. Vol. 354. P. 1.

Учебное издание

Гвоздев Александр Александрович
Огнев Игорь Сергеевич
Осокина Елена Владимировна

**Нейтринные процессы
во внешнем магнитном поле
в технике матрицы плотности**

Методические указания

Редактор, корректор М. В. Никулина

Компьютерная верстка И. С. Огнев

Подписано в печать 20.03.2012.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага тип.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 20 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.