Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической физики

А. А. Добрынина, А. Я. Пархоменко

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2022

УДК 530.145(075.8)
ББК В315я73
Д57

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2022 года

Рецензент
кафедра теоретической физики

Добрынина, Александра Алексеевна.
Д57 Методы вычисления петлевых диаграмм в квантовой теории поля : учебно-методическое пособие / А. А. Добрынина, А. Я. Пархоменко ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2022. — 36 с.

В пособии рассматривается формализм собственого времени Фока — Швингера и его приложение к квантовой электродинамике. Материал представлен в виде задач с подробным решением и анализом полученных результатов.

Предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Радиационные поправки и теория перенормировок» и «Квантовые процессы во внешней активной среде».

УДК 530.145(075.8)
ББК В315я73

1. Свободные поля

Задание 1.1. Вычислить пропагатор свободного скалярного поля в представлении собственного времени Фока — Швингера и найти его Фурье-образ.

Решение

Рассмотрим сначала свободное скалярное вещественное поле $\varphi(x)$, лагранжиан которого имеет вид [1–3]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial^\mu\varphi(x)\,\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}\,m^2\,\varphi^2(x), \tag{1.1}$$

где переменной x обозначены время t и три пространственные координаты $\mathbf{r}$, m — масса поля, и $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$. Уравнение Эйлера — Лагранжа для этого поля, называемое уравнением Клейна — Гордона — Фока, имеет вид:

$$\left[\partial^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0. \tag{1.2}$$

Помимо решения данного однородного уравнения, в физике частиц требуется решение $\Delta(x,y)$ неоднородного уравнения с правой частью, пропорциональной δ-функции Дирака:

$$\left[\partial_x^2 + m^2\right]\Delta(x,y) = -i\,\delta^{(4)}(x-y), \tag{1.3}$$

где $\partial_x^\mu = \partial/\partial x_\mu$. Приведенное уравнение представляет собой уравнение на функцию Грина, а его решение называется функцией распространения или пропагатором поля, в рассматриваемом случае — вещественного скалярного. Наиболее просто искать решение (1.3) не в координатном, а импульсном пространстве:

$$\Delta(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\Delta(p)\,e^{-ip(x-y)}, \tag{1.4}$$

где $\Delta(p)$ — пропагатор в импульсном представлении или Фурье-образ $\Delta(x,y)$. Здесь учли, что пропагатор свободного поля обладает трансляционной инвариантностью. В импульсном пространстве уравнение (1.3) принимает вид:

$$\left[p^2 - m^2\right]\Delta(p) = i, \tag{1.5}$$

где было использовано следующее представление δ-функции в виде Фурье-интеграла:

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x-y)}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.5) — алгебраическое и решается тривиально:

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{1.7}$$

где мнимая добавка $i\varepsilon$ в знаменателе характеризует положение полюсов пропагатора в комплексной плоскости p_0. Этот пропагатор можно также записать в следующей интегральной форме:

$$\Delta(p) = \int_0^\infty ds\, e^{-is\left(m^2 - p^2 - i\varepsilon\right)}, \tag{1.8}$$

где параметр s с размерностью обратного квадрата массы называется "собственным временем". Выражение (1.8) и будем называть представлением Фока — Швингера для пропагатора скалярного поля в импульсном пространстве.

Используя такое представление, легко найти пропагатор в координатном пространстве:

$$\Delta(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-i(pz)} \int_0^\infty ds\, e^{-is\left(m^2 - p^2 - i\varepsilon\right)}, \tag{1.9}$$

где $z = x - y$. После изменения порядка интегрирования требуется вычислить интеграл по четырехмерному импульсу, который представляет собой обобщенный гауссов интеграл:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{isp^2 - i(pz)} = \frac{-i}{16\pi^2 s^2}\, e^{-iz^2/(4s)}, \tag{1.10}$$

что приводит к следующему результату для пропагатора:

$$\Delta(z) = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\, e^{-iz^2/(4s) - is\left(m^2 - i\varepsilon\right)}. \tag{1.11}$$

Полученный интеграл и есть пропагатор вещественного скалярного поля в представлении собственного времени Фока — Швингера в координатном пространстве. Выражение (1.11) можно записать посредством модифицированной функции Бесселя $K_\nu(x)$, называемой также функцией Макдональда, которая имеет следующее интегральное представление (см.: [4, с. 181):

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\nu+1}}\, e^{-t-x^2/(4t)}. \tag{1.12}$$

Как следствие, пропагатор скалярного поля примет вид:

$$\Delta(z) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{-z^2}}\, K_1(m\sqrt{-z^2})\, \Theta(-z^2), \tag{1.13}$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда или функция единичной ступеньки. Для времениподобных z^2 аргумент функции Макдональда становится чисто мнимым и $K_1(x)$ переходит в функцию Ганкеля. Пропагатор, выраженный через функцию Ганкеля, будет приведен по мере необходимости.

Представляет интерес найти пропагатор для безмассовой частицы. Чтобы его получить, воспользуемся представлением пропагатора (1.13), а также асимптотикой $K_n(x)$ с целыми неотрицательными n при малых значениях аргумента ($x \to 0$):

$$K_0(x) \simeq \ln\frac{2}{\gamma x}, \qquad K_n(x) \simeq \frac{1}{2}\,\Gamma(n)\left(\frac{2}{x}\right)^n, \tag{1.14}$$

где γ — постоянная Эйлера — Маскерони и $\Gamma(n)$ — гамма-функция. В результате пропагатор примет следующий простой вид:

$$\Delta(z) = -\frac{1}{4\pi^2 z^2}, \tag{1.15}$$

причем это выражение справедливо как для пространственноподобных, так и для времениподобных z^2.

Рассмотрим теперь свободное скалярное комплексное поле, задаваемое лагранжианом [1–3]:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\varphi^\dagger(x)\,\partial_\mu\varphi(x) - m^2\,\varphi^\dagger(x)\varphi(x). \tag{1.16}$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа для этого поля

$$\left[\partial^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0 \tag{1.17}$$

по виду полностью совпадает с уравнением (1.2). Будут также совпадать и уравнения на функцию Грина, а значит, и их решения $\Delta(z)$ — пропагаторы вещественного и комплексного скалярных полей.

Задание 1.2. Вычислить пропагатор свободного спинорного поля в представлении собственного времени Фока — Швингера и найти его Фурье-образ.

Решение

Рассмотрим свободное спинорное комплексное поле с массой m, задаваемое лагранжианом [1–3]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\, i\hat{\partial}\psi(x) - m\,\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{1.18}$$

где $\hat{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu$, γ_μ — гамма-матрицы Дирака и $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\,\gamma_0$. Уравнение Эйлера — Лагранжа для спинорного поля, называемое уравнением Дирака, имеет вид:

$$[i\hat{\partial} - m]\,\psi(x) = 0. \tag{1.19}$$

Уравнение на функцию Грина $S(x, y)$ следующее:

$$[i\hat{\partial}_x - m]\,S(x, y) = i\,\delta^{(4)}(x - y). \tag{1.20}$$

Будем искать решение (1.20) в импульсном пространстве, записав пропагатор в форме Фурье-интеграла:

$$S(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}\, S(p)\, e^{-ip(x-y)}, \tag{1.21}$$

где $S(p)$ — пропагатор в импульсном пространстве (Фурье-образ $S(x, y)$). Здесь учли, что пропагатор свободного спинорного поля обладает трансляционной инвариантностью. В импульсном пространстве уравнение (1.20) принимает вид:

$$[\hat{p} - m]\,S(p) = i. \tag{1.22}$$

Уравнение (1.22) — алгебраическое, однако представляет собой матричное уравнение, которое формально решается как

$$S(p) = \frac{i}{\hat{p} - m + i\varepsilon'} = \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \tag{1.23}$$

где мнимая добавка $i\varepsilon$ в знаменателе последнего выражения характеризует расположение полюсов пропагатора в комплексной плоскости p_0. Этот пропагатор можно также записать в следующей интегральной форме, которая представляет собой пропагатор спинорного поля в представлении Фока — Швингера в импульсном пространстве:

$$S(p) = (\hat{p} + m) \int_0^\infty ds\, e^{-is\left(m^2 - p^2 - i\varepsilon\right)}. \tag{1.24}$$

Чтобы сделать Фурье-преобразование пропагатора, надо подставить (1.24) в (1.21), поменять порядок интегрирования и взять интеграл по четырехмерному импульсу. Однако последний интеграл можно не вычислять, а воспользоваться связью рассматриваемого пропагатора с $\Delta(z)$ — пропагатором скалярного поля (1.9):

$$S(z) = (i\hat{\partial}_z + m) \int_0^\infty ds\, e^{-is\left(m^2 - i\varepsilon\right)} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{isp^2 - i(pz)} = (i\hat{\partial}_z + m)\, \Delta(z), \tag{1.25}$$

где $\partial_z^\mu = \partial / \partial z_\mu$. Для дальнейших вычислений требуется явный вид $\Delta(z)$, который приведен в (1.11) или (1.13). Интегральная форма (1.11) позволяет получить выражение для пропагатора в представлении собственного времени Фока — Швингера:

$$S(z) = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[\frac{\hat{z}}{2s} + m\right] e^{-iz^2/(4s) - is\left(m^2 - i\varepsilon\right)}. \tag{1.26}$$

Воспользовавшись интегральным представлением функций Макдональда (1.12), пропагатор можно записать в следующем виде:

$$S(z) = \frac{m^3}{4\pi^2 \rho^2} \left[im\hat{z}\, K_2(\rho) + \rho\, K_1(\rho)\right] \Theta(\rho), \tag{1.27}$$

где $\rho = m\sqrt{-z^2}$. В безмассовом пределе ($m \to 0$) пропагатор существенно упрощается:

$$S(z) = \frac{i\hat{z}}{2\pi^2 (z^2)^2}. \tag{1.28}$$

Этот пропагатор часто используется для описания u- и d-кварков в квантовой хромодинамике, поскольку их массами можно пренебречь по сравнению с теми характерными энергиями, которые они переносят в жестких процессах рассеяния.

Задание 1.3. Показать, что использование представления Фока — Швингера позволяет получить параметризацию Фейнмана для объединения пропагаторов.

Решение

Напомним формулу для объединения двух пропагаторов в один, предложенную Фейнманом:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[Ax + B\,(1-x)\right]^2}. \tag{1.29}$$

Обобщим ее на случай произведения $A^{-\alpha}B^{-\beta}$. Запишем $1/A^\alpha$ в интегральной форме в представлении Фока — Швингера:

$$\frac{1}{A^\alpha} = \frac{i^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty ds\, s^{\alpha-1}\, e^{-iAs}, \tag{1.30}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, и аналогично для $1/B^\beta$. Тогда для их произведения получим:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{i^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty ds_1\, s_1^{\alpha-1} \int_0^\infty ds_2\, s_2^{\beta-1}\, e^{-iAs_1 - iBs_2}. \tag{1.31}$$

От s_1 и s_2 перейдем к новым переменным s и x:

$$s_1 = sx, \quad s_2 = s\,(1-x)\,, \quad ds_1\, ds_2 = s\, ds\, dx, \tag{1.32}$$

что позволяет переписать интеграл (1.31) в виде:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{i^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^\infty ds\, s^{\alpha+\beta-1} \times \\ \times \int_0^1 dx\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\, e^{-is[Ax+B(1-x)]}. \tag{1.33}$$

После изменения порядка интегрирования и взятия интеграла по s получим:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 \frac{dx\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{\left[Ax + B\,(1-x)\right]^{\alpha+\beta}}. \tag{1.34}$$

Это и есть обобщенная формула для объединения двух знаменателей пропагаторов в один с использованием параметризации

Фейнмана. При $\alpha = \beta = 1$ и учете значений гамма-функции $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ воспроизводится (1.29).

Задание 1.4. Используя представление Фока — Швингера, получить формулу для объединения пропагаторов в Эффективной теории тяжелого кварка.

Решение

В Эффективной теории тяжелого кварка пропагатор тяжелого кварка имеет вид:

$$S(k) = \frac{1}{2}\,(1+\hat{v})\,\frac{i}{(vk)+i\varepsilon}, \tag{1.35}$$

где v^μ — четырехмерный вектор скорости кварка ($v^2 = 1$), p^μ — его четырехмерный импульс ($p^2 = m_Q^2$), и $k^\mu = p^\mu - m_Q v^\mu$. Здесь предполагается, что все компоненты k^μ много меньше массы кварка m_Q.

Поскольку знаменатель пропагатора (1.35) линеен по импульсу, в отличие от пропагаторов обычных релятивистских полей, которые квадратичны ($\sim 1/(p^2 - m^2)$), то стандартная фейнмановская параметризация при объединении знаменателей пропагаторов непригодна. Однако использование интегрального представления Фока — Швингера позволяет найти аналогичную фейнмановской параметризации формулу и в этом случае.

Пусть $A \sim p^2 - m^2$, а $B \sim (vk)$. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим произведение $A^{-\alpha}B^{-\beta}$ и запишем каждый из множителей в представлении Фока — Швингера (1.31). Перейдем от s_2 к новой переменной s:

$$s_2 = 2ss_1, \quad ds_2 = 2s_1\,ds, \tag{1.36}$$

что позволяет переписать интеграл (1.31) в виде:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{i^{\alpha+\beta}2^\beta}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^\infty ds\, s^{\beta-1}\int_0^\infty ds_1\, s_1^{\alpha+\beta-1} e^{-is_1[A+2sB]}. \tag{1.37}$$

После взятия интеграла по s_1 получим:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{2^\beta\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \frac{ds\, s^{\beta-1}}{[A+2sB]^{\alpha+\beta}}. \tag{1.38}$$

Это и есть обобщенная формула для объединения двух пропагаторов в один в Эффективной теории тяжелого кварка, когда в процессе участвует тяжелый кварк. Наиболее часто в расчетах используются следующие формулы:

$$\frac{1}{AB} = 2\int_0^\infty \frac{ds}{\left[A+2sB\right]^2}, \quad \frac{1}{AB^2} = 8\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left[A+2sB\right]^3}, \tag{1.39}$$

где учли, что $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ и $\Gamma(3) = 2$.

Рассмотрим в качестве примера собственно энергетическую диаграмму тяжелого кварка в квантовой хромодинамике в однопетлевом приближении, обусловленную взаимодействием кварка с глюонами. Амплитуда, соответствующая этой диаграмме, имеет ультрафиолетовую расходимость и должна быть устранена, например, методом размерной регуляризации:

$$\mathcal{M} \sim \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{k^2\,(v(q+k))}, \tag{1.40}$$

где q^μ — четырехмерный импульс кварка и N — размерность пространства. Поскольку расходимость пропорциональна (vq), то для ее выделения предпочтительнее вычислять не саму амплитуду (1.40), а ее производную по (vq) при $q^\mu = 0$:

$$\frac{d\mathcal{M}}{d(vq)} \sim \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{k^2\,(vk)^2} = 8\int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left[k^2+2s(vk)\right]^3}, \tag{1.41}$$

которая как раз и совпадает со вторым интегралом в (1.39). После перехода к $\tilde{k}_\mu = k_\mu + sv_\mu$ и учета $v^2 = 1$, интеграл по s легко вычисляется:

$$\frac{d\mathcal{M}}{d(vq)} \sim 8\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^N} \int_0^\infty \frac{s\,ds}{\left[\tilde{k}^2 - s^2\right]^3} = -2\int \frac{d^N \tilde{k}}{(2\pi)^N} \frac{1}{\left(\tilde{k}^2\right)^2}. \tag{1.42}$$

Получившийся интеграл в методе размерной регуляризации обращается в ноль, поскольку не содержит размерных параметров, однако надо помнить, что этот ноль является следствием случайного сокращения ультрафиолетовой и инфракрасной расходимостей. Вычисление подобных интегралов выходит за рамки данной задачи и может быть найдено в многочисленных книгах по квантовой теории поля.

2. Взаимодействующие поля

Задание 2.1. В конфигурационном пространстве вычислить пропагатор спинорной заряженной частицы, распространяющейся в произвольном внешнем электромагнитном поле, в представлении собственного времени Фока — Швингера.

Решение

Лагранжиан квантовой электродинамики (КЭД) имеет вид [5]:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_f \bar{\psi}_f(x) \left[i\hat{\partial} - eQ_f \hat{A}(x) - m_f \right] \psi_f(x) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x), \tag{2.1}$$

где $e > 0$ — элементарный заряд (заряд протона), $\psi_f(x)$ — поле фермиона с относительным зарядом Q_f и массой m_f, $A^\mu(x)$ — поле фотона и $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$ — тензор электромагнитного поля. Из этого лагранжиана следует уравнение Дирака:

$$\left\{ \gamma_\mu \left[i\partial^\mu - eQ_f A^\mu(x) \right] - m_f \right\} \psi_f(x) = \left\{ \gamma_\mu \pi^\mu - m_f \right\} \psi_f(x) = 0. \tag{2.2}$$

В дальнейшем будем считать, что $A^\mu(x)$ — четырехмерный потенциал внешнего классического электромагнитного поля, явный вид которого будет уточнен позже.

Нас интересует пропагатор фермионного поля $S_f(x, y)$, вычисленный при наличии внешнего фонового поля, который является функцией Грина оператора Дирака и удовлетворяет уравнению:

$$\left\{ \gamma_\mu \left[i\partial_x^\mu - eQ_f A^\mu(x) \right] - m_f \right\} S_f(x, y) = i\delta^{(4)} (x - y) \,. \tag{2.3}$$

Решать это уравнение в координатном пространстве напрямую сложно, и для свободных полей удобным оказалось перейти сначала в импульсное пространство, где уравнение на функцию Грина сводилось к алгебраическому. Для полей, распространяющихся в электромагнитном поле или веществе, использование этого метода может оказаться затруднительным или невозможным. Красивый способ обойти эту проблему был предложен Юлианом Швингером, и здесь будет изложена суть метода Швингера.

Преобразуем (2.3) сначала в операторное уравнение и будем искать его решение. Чтобы перейти к этому уравнению, введем полный набор векторов состояния $|x, \alpha\rangle$ в пространстве-времени Минковского:

$$\langle x, \alpha | y, \beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}\left(x - y\right), \qquad \sum_{\alpha}\int dx\, |x, \alpha\rangle\langle x, \alpha| = 1, \quad (2.4)$$

где α и β — спинорные индексы. Более того, пусть эти векторы будут собственными функциями оператора 4-координаты:

$$X^{\mu}|x, \alpha\rangle = x^{\mu}|x, \alpha\rangle, \qquad \langle x, \alpha|X^{\mu}|y, \beta\rangle = x^{\mu}\delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}\left(x - y\right). \quad (2.5)$$

В дальнейшем удобно сократить запись, опустив в векторах состояния спинорный индекс, т. е. $|x, \alpha\rangle \equiv |x\rangle$, однако, по мере необходимости, этот индекс будет выписываться явно.

Имея такой набор векторов, любой функции от переменных x^{μ} и y^{μ} можно сопоставить оператор:

$$f(x, y) = \langle x|F|y\rangle, \quad (2.6)$$

в том числе и пропагатору:

$$S_f(x, y) = \langle x|\mathcal{S}_f|y\rangle. \quad (2.7)$$

В уравнение Дирака (2.3) входят обобщенный динамический импульс π^{μ} и матрицы Дирака γ^{μ}, для которых также можно ввести операторы Π^{μ} и Γ^{μ}:

$$\langle x|\Pi^{\mu}|y\rangle = \pi^{\mu}\delta^{(4)}\left(x - y\right), \qquad \langle x|\Gamma^{\mu}|y\rangle = \gamma^{\mu}\delta^{(4)}\left(x - y\right). \quad (2.8)$$

Теперь преобразовать уравнение (2.3) в операторное не составляет труда:

$$\left[\Gamma_{\mu}\Pi^{\mu} - m_f\right]\mathcal{S}_f = i. \quad (2.9)$$

В таком виде решать это уравнение не очень удобно. Предпочтительнее перейти к квадрированному уравнению:

$$\mathcal{H}\Delta_f = \left[-\Gamma_{\mu}\Pi^{\mu}\Gamma_{\nu}\Pi^{\nu} + m_f^2\right]\Delta_f = -i, \quad (2.10)$$

которое получается из (2.9) подстановкой:

$$\mathcal{S}_f = \left[\Gamma_{\mu}\Pi^{\mu} + m_f\right]\Delta_f. \quad (2.11)$$

Для дальнейших преобразований (2.10) требуется знать (анти)-коммутационные соотношения для введенных операторов. Их легко получить, заменив в (анти)коммутаторах исходные операторы новыми. Перечислим эти соотношения:

$$\begin{aligned}
&[X_\mu, X_\nu] = 0, \qquad [X_\mu, \Pi_\nu] = -ig_{\mu\nu}, \qquad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = -ieQ_f F_{\mu\nu}, \\
&\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \qquad [X_\mu, \Gamma_\nu] = 0, \qquad [\Pi_\mu, \Gamma_\nu] = 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

В дополнение нам потребуются коммутаторы этих операторов с «оператором Гамильтона» $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{H}, X_\mu] = -2i\Pi_\mu, \qquad [\mathcal{H}, \Gamma_\mu] = -2ieQ_f F_{\mu\nu}\Gamma^\nu, \\
&[\mathcal{H}, \Pi_\mu] = -2ieQ_f F_{\mu\nu}\Pi^\nu + eQ_f \partial^\nu F_{\mu\nu} - ieQ_f \Sigma^{\rho\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где введен коммутатор Г-операторов:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\right]. \tag{2.14}$$

Обратимся теперь к уравнению (2.10). Его решение удобно записать в форме интеграла:

$$\Delta_f = \frac{-i}{\mathcal{H}} = \int_0^\infty e^{-i\mathcal{H}s} ds = \int_0^\infty U(s)\, ds, \tag{2.15}$$

где переменная s называется собственным временем, поскольку оператор $U(s)$ по форме совпадает с квантовомеханическим оператором, переводящим операторы из представления Гейзенберга в представление Шрёдингера [6]. Следуя этой методике и используя оператор $U(s)$, операторы X_μ, Π_μ и Γ_μ также можно сделать зависящими от s: $X_\mu(s) = U^\dagger(s)\, X_\mu\, U(s)$ и т. д. Для этого удобно воспользоваться аналогами уравнений Эренфеста [6]:

$$\frac{d\hat{O}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{O}(t)\right], \tag{2.16}$$

где $\hat{O}(t)$ — зависящий от времени квантовомеханический оператор и $\hat{H}$ — оператор Гамильтона, а также коммутаторами (2.13). Для введенных операторов получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{dX_\mu}{ds} = i\left[\mathcal{H}, X_\mu\right] = 2\Pi_\mu, \qquad \frac{d\Gamma_\mu}{ds} = i\left[\mathcal{H}, \Gamma_\mu\right] = 2eQ_f F_{\mu\nu}\Gamma^\nu, \\
&\frac{d\Pi_\mu}{ds} = i\left[\mathcal{H}, \Pi_\mu\right] = 2eQ_f F_{\mu\nu}\Pi^\nu + ieQ_f \partial^\nu F_{\mu\nu} + eQ_f \Sigma^{\rho\nu}\partial_\rho F_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где тензор электромагнитного поля понимается как неявная функция от s, а именно $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(X(s))$. В общем случае решение приведенных уравнений невозможно, но для электромагнитных полей определенных конфигураций, например для постоянного и однородного электромагнитного поля или поля плоской электромагнитной волны, такие решения известны.

Как и в квантовой механике, можно перейти к векторам состояний, зависящим от s:

$$\langle x(s)| = \langle x(0)|\, U(s), \quad \langle x(0)| = \langle x|, \quad \langle x(s)|X_\mu(s) = x_\mu \langle x(s)|, \tag{2.18}$$

где под $\langle x|$ понимается вектор состояния в представлении Шредингера, тогда матричный элемент оператора $U(s)$, называемый функцией преобразования, можно записать как

$$\langle x(0)|\, U(s)\, |y(0)\rangle = \langle x(s)|y(0)\rangle = g(x, y; s). \tag{2.19}$$

В итоге для нахождения пропагатора заряженного фермиона $S_f(x, y)$ достаточно знать явный вид функции $g(x, y; s)$:

$$S_f(x, y) = [\gamma_\mu \pi^\mu + m_f] \int_0^\infty g(x, y; s)\, ds. \tag{2.20}$$

Исходя из определения (2.19), явный вид $g(x, y; s)$ можно найти, например, как решение дифференциального уравнения:

$$\partial g(x, y; s)/\partial s = \langle x(0)|\, dU(s)/ds\, |y(0)\rangle = -i \langle x(s)|\, \mathcal{H}\, |y(0)\rangle, \tag{2.21}$$

с начальным условием:

$$g(x, y; 0) = \langle x(0)|y(0)\rangle = \delta^{(4)}(x - y). \tag{2.22}$$

Это начальное условие следует дополнить матричными элементами операторов $\Pi^\mu(s)$ и $\Pi^\mu(0)$, связанных с функцией преобразования соотношениями:

$$\langle x(s)|\, \Pi^\mu(s)\, |y(0)\rangle = \left[i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eQ_f A^\mu(x) \right] g(x, y; s), \tag{2.23}$$

$$\langle x(s)|\, \Pi^\mu(0)\, |y(0)\rangle = \left[-i \frac{\partial}{\partial y_\mu} - eQ_f A^\mu(y) \right] g(x, y; s). \tag{2.24}$$

Из (2.21) следует, что если имеется возможность выразить «оператор Гамильтона» $\mathcal{H}$ только через операторы $X^\mu(s)$ и $X^\mu(0)$, причем так, чтобы все операторы $X^\mu(s)$ располагались левее операторов $X^\mu(0)$, то (2.21) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{\partial g(x,y;s)}{\partial s} = -i\, R(x,y;s)\, g(x,y;s), \tag{2.25}$$

найти решение которого не представляет труда:

$$g(x,y;s) = g(x,y;s_0) \exp\left\{-i \int_{s_0}^{s} R(x,y;s')\, ds'\right\}, \tag{2.26}$$

где s_0 — некоторое фиксированное значение собственного времени, выбор которого будет обсуждаться далее.

Задание 2.2. В конфигурационном пространстве найти пропагатор спинорной заряженной частицы, распространяющейся во внешнем постоянном и однородном скрещенном электромагнитном поле, в представлении собственного времени Фока — Швингера.

Решение

Пропагатор заряженного фермиона, находящегося в постоянном и однородном скрещенном электромагнитном поле, имеет наиболее простой вид. Поле называется скрещенным, если векторы напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей равны по величине и перпендикулярны:

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|, \qquad \mathbf{E} \perp \mathbf{H}. \tag{2.27}$$

Это поле не меняет своей конфигурации при переходе в любую другую инерциальную систему отсчета, поскольку в нем отсутствуют чисто полевые инварианты:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left[\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right] = 0, \\ \mathcal{G} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} = 4\,(\mathbf{EH}) = 0, \end{aligned} \tag{2.28}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — тензор Леви — Чивита пространства Минковского, определенный как $\varepsilon^{0123} = +1$ [2, 7]. Если теперь, для определенности, выбрать систему отсчета так, что вектор напряженности магнитного поля направлен по оси Oz, а электрического — по оси Oy:

$$\mathbf{H} = (0,0,H), \qquad \mathbf{E} = (0,H,0), \tag{2.29}$$

то тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальному к нему тензору $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}/2$ соответствуют следующие матрицы [7].

$$F^{\mu\nu} = H \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = H \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

В дальнейшем будем пользоваться их безразмерными аналогами:

$$\varphi^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}/H = k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu, \quad \tilde{\varphi}^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}/H = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho a_\sigma, \quad (2.31)$$

где оба тензора записаны посредством двух ортогональных векторов, которые в выбранной нами системе отсчета равны:

$$k^\mu = (1, 1, 0, 0)\,, \qquad a^\mu = (0, 0, -1, 0)\,, \qquad (ka) = 0. \qquad (2.32)$$

Из их явного вида следует, что k^μ — изотропный ($k^2 = 0$), а a^μ — пространственноподобный ($a^2 = -1$) вектор. Дуальный тензор $\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$ (2.31) также может быть записан в виде разности прямых произведений двух векторов, а $\varphi^{\mu\nu}$ — через тензор Леви — Чивита:

$$\tilde{\varphi}^{\mu\nu} = k^\mu b^\nu - k^\nu b^\mu, \qquad \varphi^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho b_\sigma, \qquad (2.33)$$

причем в этом представлении тензоры опять же содержат вектор k^μ. В выбранной системе отсчета компоненты нового вектора b^μ следующие:

$$b^\mu = (0, 0, 0, -1)\,, \qquad (kb) = 0, \qquad (ab) = 0. \qquad (2.34)$$

Как и a^μ, вектор b^μ — пространственноподобный ($b^2 = -1$) и ортогонален не только k^μ, но и a^μ. Чтобы получить полный набор базисных векторов пространства Минковского, введенные три взаимно ортогональные векторы k^μ, a^μ и b^μ должны быть дополнены четвертым вектором n^μ, который в выбранной системе отсчета имеет вид:

$$n^\mu = (1, -1, 0, 0)\,, \quad (kn) = 2, \quad (na) = 0, \quad (nb) = 0. \qquad (2.35)$$

Как и k^μ, вектор n^μ — изотропный, т. е. $n^2 = 0$. Такой набор векторов соответствует базису, определенному на световом конусе в пространстве Минковского. Метрический тензор имеет следующее разложение по этому базису:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu\right] - a^\mu a^\nu - b^\mu b^\nu, \tag{2.36}$$

а тензор Леви — Чивита можно записать как

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left[n^\mu k^\nu - n^\nu k^\mu\right] a^\rho b^\sigma + \mathrm{perm.}, \tag{2.37}$$

где perm. обозначает всевозможные перестановки лоренцевских индексов, учитывающие полную антисимметрию тензора.

Помимо безразмерных тензоров поля (2.31), в пропагаторе возникают их бинарные свертки:

$$\Lambda^{\mu\nu} = (\varphi\varphi)^{\mu\nu} = \varphi^{\mu\rho}\varphi_\rho{}^\nu = k^\mu k^\nu, \quad (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})^{\mu\nu} = k^\mu k^\nu, \quad (\varphi\tilde{\varphi})^{\mu\nu} = 0. \tag{2.38}$$

Всевозможные свертки трех и более тензоров обращаются в ноль:

$$(\varphi\varphi\varphi)^{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})^{\mu\nu} = \ldots = 0. \tag{2.39}$$

Если встречаются свертки безразмерных тензоров с γ-матрицами, то в выбранном базисе они имеют вид:

$$(\gamma\varphi\gamma) = \gamma_\mu\varphi^{\mu\nu}\gamma_\nu = -i\sigma_{\mu\nu}\varphi^{\mu\nu} = i\,(\sigma\varphi) = 2\,(k\gamma)\,(a\gamma)\,,$$
$$(\gamma\tilde{\varphi}\gamma) = i\,(\sigma\tilde{\varphi}) = 2\,(k\gamma)\,(b\gamma)\,, \quad (\gamma\Lambda\gamma) = k^2 = 0. \tag{2.40}$$

Перейдем теперь к вычислению пропагатора заряженного фермиона. Найдем решения уравнений (2.17), которые в постоянном и однородном скрещенном поле следующие:

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = 2\beta_f\varphi_{\mu\nu}\Pi^\nu, \quad \frac{d\Gamma_\mu}{ds} = 2\beta_f\varphi_{\mu\nu}\Gamma^\nu, \quad \frac{dX_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \tag{2.41}$$

где введено обозначение $\beta_f = eQ_fH$. Решение первого уравнения находится легко и имеет вид:

$$\Pi_\mu(s) = \left[\exp\left(2\beta_f s\varphi\right)\right]_{\mu\nu}\Pi^\nu(0) = \left[g_{\mu\nu} + 2\beta_f s\varphi_{\mu\nu} + 2\beta_f^2 s^2\Lambda_{\mu\nu}\right]\Pi^\nu(0), \tag{2.42}$$

где экспонента от тензора понимается в смысле ее разложения в ряд. Второе уравнение отличается от первого только оператором (Γ_μ вместо Π_μ), поэтому его решение может быть легко получено из решения первого (2.42) соответствующей заменой:

$$\Gamma_\mu(s) = \left[\exp\left(2\beta_f s\varphi\right)\right]_{\mu\nu}\Gamma^\nu(0) = \left[g_{\mu\nu} + 2\beta_f s\varphi_{\mu\nu} + 2\beta_f^2 s^2\Lambda_{\mu\nu}\right]\Gamma^\nu(0). \tag{2.43}$$

Найти решение третьего уравнения из (2.41) также не представляет труда, поскольку его правая часть известна:

$$\begin{aligned} X_\mu(s) &= X_\mu(0) + 2\int_0^s \Pi_\mu(s')\,ds' = \\ &= X_\mu(0) + 2s\left[g_{\mu\nu} + \beta_f s\varphi_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\beta_f^2 s^2 \Lambda_{\mu\nu}\right]\Pi^\nu(0). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Из этого уравнения теперь можно выразить оператор $\Pi_\mu(0)$ через разность операторов координаты $\Delta X_\mu = X_\mu(s) - X_\mu(0)$ как

$$\Pi_\mu(0) = \frac{1}{2s}\left[g_{\mu\nu} - \beta_f s\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\,\beta_f^2 s^2 \Lambda_{\mu\nu}\right]\Delta X^\nu. \tag{2.45}$$

Подставив это выражение в (2.42), получим:

$$\Pi_\mu(s) = \frac{1}{2s}\left[g_{\mu\nu} + \beta_f s\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\,\beta_f^2 s^2 \Lambda_{\mu\nu}\right]\Delta X^\nu, \tag{2.46}$$

и для их разности

$$\Delta\Pi_\mu \equiv \Pi_\mu(s) - \Pi_\mu(0) = \beta_f\varphi_{\mu\nu}\,\Delta X^\nu. \tag{2.47}$$

Для свертки Π_μ с Γ-оператором следует:

$$\Gamma^\mu(s)\,\Pi_\mu(s) = \Gamma^\mu(0)\,\Pi_\mu(0). \tag{2.48}$$

Перейдем теперь к вычислению «оператора Гамильтона» (2.10):

$$\mathcal{H} = m_f^2 - \Gamma_\mu(s)\Pi^\mu(s)\Gamma_\nu(s)\Pi^\nu(s) = m_f^2 - \Gamma_\mu(0)\Pi^\mu(0)\Gamma_\nu(0)\Pi^\nu(0), \tag{2.49}$$

который можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= m_f^2 - \Pi^\mu(0)\Pi_\mu(0) + i\Pi^\mu(0)\Sigma_{\mu\nu}(0)\Pi^\nu(0) = \\ &= m_f^2 - \frac{1}{4s^2}\,\Delta X^\nu\left[g_{\nu\rho} - \frac{1}{3}\,\beta_f^2 s^2\Lambda_{\nu\rho}\right]\Delta X^\rho + i\Pi^\mu(0)\Sigma_{\mu\nu}(0)\Pi^\nu(0). \end{aligned} \tag{2.50}$$

Чтобы упростить это выражение, требуются два коммутатора:

$$[\Pi_\mu(0), \Pi_\nu(0)] = -i\beta_f\varphi_{\mu\nu}, \tag{2.51}$$

$$[X_\mu(0), X_\nu(s)] = -2is\left(g_{\mu\nu} - \beta_f s\,\varphi_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\,\beta_f^2 s^2\Lambda_{\mu\nu}\right), \tag{2.52}$$

после учета которых в «операторе Гамильтона» получим:

$$\mathcal{H} = m_f^2 - \frac{1}{4s^2}\left[X^2(s) + X^2(0) - 2X^\mu(s)X_\mu(0)\right] - \frac{2i}{s} - \frac{\beta_f}{2}\,\varphi^{\mu\nu}\Sigma_{\nu\mu} +$$
$$+\frac{\beta_f^2}{12}\left[X_\mu(s)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(s) + X_\mu(0)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(0) - 2X^\mu(s)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(0)\right]. \quad (2.53)$$

Для записанного в таком виде оператора не составляет труда найти матричный элемент в базисе векторов состояния с определенным значением координаты:

$$\langle x(s)|\,\mathcal{H}\,|y(0)\rangle = R(x,y;s)\,g(x,y;s) = \quad (2.54)$$
$$= \left[m_f^2 - \frac{z^2}{4s^2} - \frac{2i}{s} + \frac{\beta_f^2}{12}\,(z\Lambda z) - \frac{\beta_f}{2}\,(\varphi\sigma)\right] g(x,y;s),$$

где $g(x,y;s) = \langle x(s)|y(0)\rangle$, $z^\mu = x^\mu - y^\mu$, $(z\Lambda z) = z_\mu\Lambda^{\mu\nu}z_\nu$, $(\varphi\sigma) = \varphi^{\mu\nu}\sigma_{\nu\mu}$, и $\sigma_{\mu\nu} = i\,[\gamma_\mu,\,\gamma_\nu]/2$. Поскольку матричный элемент (2.54) факторизуется в соответствии с (2.25), то его формальное решение в форме интеграла (2.26) имеет следующий вид:

$$g(x,y;s) = g(x,y;s_0)\,\exp\left\{-i\int_{s_0}^{s}\left[A - \frac{z^2}{4s'^2} - \frac{2i}{s'}\right]ds'\right\} =$$
$$= g(x,y;s_0)\,\frac{s_0^2}{s^2}\,\exp\left\{\frac{iz^2}{4s_0} - \frac{iz^2}{4s} - iA\,(s - s_0)\right\}, \quad (2.55)$$

где s_0 — некоторое фиксированное значение собственного времени и не зависящая от s' часть обозначена как

$$A = m_f^2 + \frac{\beta_f^2}{12}\,(z\Lambda z) - \frac{\beta_f}{2}\,(\varphi\sigma). \quad (2.56)$$

Отметим, что слагаемое, линейное по полю в показателе экспоненты, входящей в (2.55), — матрица в пространстве Дирака и его следует понимать как ряд Тейлора:

$$\exp\left\{\frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right\} = 1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma) - \frac{\beta_f^2 s^2}{8}\,(\varphi\sigma)^2 + \cdots, \quad (2.57)$$

и аналогично — для s_0. Легко проверить, что $(\varphi\sigma)^2 = 0$, поэтому в разложении в ряд выживают только первые два члена. В итоге для $g(x,y;s)$ получим выражение:

$$g(x,y;s) = g(x,y;s_0)\,\frac{s_0^2}{s^2}\left[1 - \frac{i\beta_f s_0}{2}\,(\varphi\sigma)\right]\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[m_f^2 s_0 + h_{\mathrm{CF}}(z,s_0)\right] - i\left[m_f^2 s + h_{\mathrm{CF}}(z,s)\right]\right\}, \quad (2.58)$$

где для простоты представления результатов введена функция:

$$h_{\mathrm{CF}}(z,s) = \frac{z^2}{4s} + \frac{\beta_f^2 s}{12}\,(z\Lambda z). \tag{2.59}$$

В бесполевом пределе ($\beta_f \to 0$) эта функция упрощается:

$$\begin{aligned} g_0(x,y;s) &= g_0(x,y;s_0)\,\frac{s_0^2}{s^2}\,\exp\left\{\frac{iz^2}{4s_0} - \frac{iz^2}{4s} + im_f^2\,(s_0 - s)\right\} = \\ &= \frac{-i}{16\pi^2 s^2}\,\exp\left\{-i\left[\frac{z^2}{4s} + m_f^2 s\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Во второй строке приведено полученное ранее значение (1.11) для этого выражения. Из их сравнения видно, что

$$g_0(x,y;s_0) = \frac{-i}{16\pi^2 s_0^2}\,\exp\left\{-i\left[\frac{z^2}{4s_0} + m_f^2 s_0\right]\right\}. \tag{2.61}$$

Потребуем, чтобы $g_0(x,y;s)$ и $g(x,y;s)$ имели одинаковую нормировку при $s = s_0$, то есть $g(x,y;s_0)$ подбирается так, чтобы полностью удалить из (2.58) зависимость от s_0. В итоге выражение для функции $g(x,y;s)$ сводится к виду:

$$g(x,y;s) = \frac{-i}{16\pi^2 s^2}\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right] e^{-i\left[m_f^2 s + h_{\mathrm{CF}}(z,s)\right]}, \tag{2.62}$$

где числовой коэффициент выбран так, чтобы в бесполевом пределе воспроизводилось выражение (2.60). Следует отметить, что, несмотря на то что полученная функция преобразования зависит только от тензора напряженностей электромагнитного поля и его бинарной свертки $\Lambda_{\mu\nu}$, которые не зависят от выбора калибровки внешнего поля, у нее тем не менее имеется калибровочная зависимость. Обсуждению этого вопроса будет посвящена следующая задача.

Для того чтобы получить пропагатор заряженного фермиона, воспользуемся (2.20):

$$\begin{aligned} S_f(x,y) = \frac{-i}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\,e^{-im_f^2 s}\,\times \\ \times\left[i\hat\partial - eQ_f\hat A(x) + m_f\right]\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right] e^{-ih_{\mathrm{CF}}(z,s)}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

На данном этапе требуется определиться с четырехмерным потенциалом внешнего поля $A_\mu(x)$, который удобно выбрать как

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{2}\, F_{\mu\nu}\,(x-y)^\nu\,, \quad eQ_f A_\mu(x) = -\frac{1}{2}\,\beta_f\,\varphi_{\mu\nu} z^\nu. \tag{2.64}$$

Калибровка, в которой 4-потенциал имеет такой вид, называют калибровкой Фока — Швингера. Ее преимущество состоит в том, что пропагатор (2.63) становится трансляционно-инвариантным:

$$S_f(z) = \frac{-i}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\, e^{-i\left[m_f^2 s + h_{\mathrm{CF}}(z,s)\right]}\times \tag{2.65}$$
$$\times\left[\frac{\hat{z}}{2s} + \frac{\beta_f^2 s}{6}\,(z\Lambda\gamma) - \frac{1}{2}\beta_f\,(z\varphi\gamma) + m_f\right]\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right].$$

Произведение в последней строке можно упростить, что дает:

$$S_f(z) = \frac{-i}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\, e^{-i\left[m_f^2 s + h_{\mathrm{CF}}(z,s)\right]}\times \tag{2.66}$$
$$\times\left\{\frac{\hat{z}}{2s} + \frac{i\beta_f}{2}\,(z\tilde{\varphi}\gamma)\,\gamma_5 - \frac{\beta_f^2 s}{3}\,(z\Lambda\gamma) + m_f\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right]\right\}.$$

Здесь было использовано разложение произведения трех γ-матриц по стандартному базисному набору дираковских матриц [2]:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = g_{\mu\nu}\gamma_\rho - g_{\mu\rho}\gamma_\nu + g_{\nu\rho}\gamma_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\sigma\gamma_5. \tag{2.67}$$

Матрица в последней строке (2.66) включает слагаемые, пропорциональные как нечетному, так и четному числу γ-матриц. Представляется удобным разбить пропагатор на кирально-нечетную $S_f^{(-)}(z)$ и кирально-четную $S_f^{(+)}(z)$ составляющие:

$$S_f(z) = S_f^{(-)}(z) + S_f^{(+)}(z), \tag{2.68}$$

удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$S_f^{(\pm)}(z)\,\gamma_5 = \pm\gamma_5\, S_f^{(\pm)}(z). \tag{2.69}$$

Кирально-четная часть пропагатора пропорциональна массе:

$$S_f^{(+)}(z) = \frac{-im_f}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\, e^{-i\left[m_f^2 s + h_{\mathrm{CF}}(z,s)\right]}\left[1 + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right], \tag{2.70}$$

а нечетная — четырехмерному вектору $z^\mu = x^\mu - y^\mu$.

Задание 2.3. Найти выражение для фермионного пропагатора для случая произвольной калибровки внешнего электромагнитного поля.

Решение

Начнем с уравнения (2.3) для пропагатора заряженного фермиона, которое перепишем в виде:

$$\left[i\hat{\partial}_x - eQ_f\hat{A}(x) - m_f\right] S_f(x,y;A) = i\delta^{(4)}\left(x-y\right). \qquad (2.71)$$

Перейдем к новому четырехмерному потенциалу:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x). \qquad (2.72)$$

В новой калибровке (2.71) запишется как

$$\left[i\hat{\partial}_x - eQ_f\hat{A}(x) + eQ_f\hat{\partial}\chi(x) - m_f\right] S_f(x,y;A{-}\partial\chi) = i\delta^{(4)}\left(x-y\right). \qquad (2.73)$$

Учтем соотношение:

$$i\hat{\partial}_x\, e^{-ieQ_f\chi(x)} = e^{-ieQ_f\chi(x)}\, eQ_f\hat{\partial}\chi(x), \qquad (2.74)$$

которое позволяет переписать (2.73) в форме:

$$e^{ieQ_f\chi(x)}\left[i\hat{\partial}_x - eQ_f\hat{A}(x) - m_f\right] e^{-ieQ_f\chi(x)} S_f(x,y;A{-}\partial\chi) = i\delta^{(4)}\left(x-y\right). \qquad (2.75)$$

Наличие δ-функции в правой части позволяет изменить аргумент в первой экспоненте, а именно $e^{ieQ_f\chi(x)} = e^{ieQ_f\chi(y)}$. Теперь ее можно прокоммутировать с оператором Дирака и после сравнения полученного уравнения с (2.71) можно найти следующую связь между функциями Грина:

$$e^{ieQ_f[\chi(y)-\chi(x)]} S_f(x,y;A-\partial\chi) = S_f(x,y;A). \qquad (2.76)$$

Показатель экспоненты можно также записать как

$$\chi(x) - \chi(y) = \int_y^x d\xi^\mu\, \partial_\mu\chi(\xi) = \int_y^x d\xi^\mu\, \left[A_\mu(\xi) - A'_\mu(\xi)\right]. \qquad (2.77)$$

В итоге при переходе от одной калибровки к другой пропагатор фермиона приобретает дополнительный фазовый множитель:

$$S_f(x,y;A') = e^{-ieQ_f\int_y^x d\xi^\mu\left[A'_\mu(\xi)-A_\mu(\xi)\right]} S_f(x,y;A) = e^{-i\Omega(x,y)} S_f(x,y;A). \qquad (2.78)$$

Можно показать, что интеграл не зависит от выбора пути интегрирования между x и y [3], поэтому этот путь можно выбрать как отрезок прямой, проходящей через эти точки.

В задаче 2.2 для получения пропагатора в трансляционно-инвариантной форме использовалась калибровка Фока — Швингера (2.64). При переходе от этой калибровки к произвольной получим следующий показатель экспоненты:

$$\Omega(x,y) = eQ_f \int_y^x d\xi^\mu \, \left[A'_\mu(\xi) + \frac{1}{2}\, F_{\mu\nu}\, (\xi - y)^\nu\right]. \qquad (2.79)$$

Если теперь выбрать 4-потенциал как

$$A'_\mu(x) = -\frac{1}{2}\, F_{\mu\nu} x^\nu, \qquad (2.80)$$

где все компоненты тензора внешнего электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ постоянны, то $\Omega(x,y)$ можно записать в виде:

$$\Omega(x,y) = -\frac{eQ_f}{2}\, F_{\mu\nu} y^\nu \int_y^x d\xi^\mu = -\frac{eQ_f}{2}\, x^\mu F_{\mu\nu} y^\nu = -\frac{eQ_f}{2}\, (xFy)\,. \qquad (2.81)$$

Полученное выражение явно демонстрирует, что зависящая от выбора калибровки фаза трансляционно неинвариантна.

Следует отметить, что формулу (2.78) с фазой (2.79) можно также получить, исходя из дополнительных условий (2.23) и (2.24), налагаемых на функцию преобразования.

Задание 2.4. Показать, что в петлевых диаграммах произведение зависящих от выбора калибровки фазовых множителей во внешнем постоянном электромагнитном поле обладает свойством трансляционной инвариантности.

Решение

Рассмотрим в качестве примера фермионные петлевые диаграммы.

Простейшая диаграмма представляет собой две вершины, расположенные в точках x и y и соединенные двумя пропагаторами заряженных фермионов. В амплитуде процесса от каждого из пропагаторов будет множитель (2.78), а именно

$$e^{-i\Omega(x,y)}\, e^{-i\Omega(y,x)} = e^{-i[\Omega(x,y) - \Omega(x,y)]} = 1, \qquad (2.82)$$

где учтены явный вид фазы (2.81) и ее антисимметричность относительно перестановки аргументов.

Более сложная — это трехточечная диаграмма. В амплитуде этой диаграммы появится множитель с фазой вида:

$$\begin{aligned}
&\Omega(x,y)+\Omega(y,z)+\Omega(z,x)= \\
&\quad=\Omega(x,y-x)+\Omega(y,z-y)+\Omega(z,x-y)+\Omega(z,y-z)= \\
&\quad=\Omega(x,y-x)+\Omega(y,z-y)-\Omega(z,y-x)-\Omega(z,z-y)= \\
&\quad=\Omega(x-z,y-x)+\Omega(y-z,z-y)=-\Omega(z-x,y-x),
\end{aligned} \tag{2.83}$$

где учтено, что функция $\Omega(x,y)$ линейна по каждому из аргументов и $\Omega(x,x)=0$. Поскольку в фазу входят разности четырехмерных координат вершин диаграммы, которые не зависят от выбора начала системы отсчета, то фазовый множитель явно трансляционно инвариантен.

В общем случае в амплитуде N-точечной диаграммы будет множитель со следующей фазой:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N-1}\Omega(x_i,x_{i+1})+\Omega(x_N,x_1)= \\
&\qquad=\Omega(x_1,x_2)+\sum_{i=2}^{N-1}\Omega(x_i,x_{i+1}-x_i)-\Omega(x_1,x_N)= \\
&\qquad=\sum_{i=2}^{N-1}\Omega(x_i,x_{i+1}-x_i)-\sum_{i=2}^{N-1}\Omega(x_1,x_{i+1}-x_i)= \\
&\qquad=\sum_{i=2}^{N-1}\Omega(x_i-x_1,x_{i+1}-x_i).
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Как и следовало ожидать, число слагаемых уменьшилось на 2. При $x_1=z$, $x_2=x$ и $x_3=y$ воспроизводится (2.83).

Задание 2.5. В конфигурационном пространстве найти пропагатор спинорной заряженной частицы, распространяющейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле, в представлении собственного времени Фока — Швингера.

Решение

Из электродинамики известно [7], что электромагнитное поле полностью определяется тензором напряженностей $F_{\mu\nu}$. В дополнение к нему также вводится дуально сопряженный тензор $\tilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}/2$, где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор Леви — Чивита. Определим отличный от нуля элемент как $\varepsilon^{0123} = +1$ [2, 7]. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль напряженности магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. В такой системе отсчета $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ принимают следующий вид:

$$F_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.85}$$

В дальнейшем удобно пользоваться не самим тензором электромагнитного поля и дуальным к нему, а их безразмерными аналогами $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}/B$, явный вид которых в выбранной системе отсчета представлен числовыми матрицами в (2.85).

Проанализируем алгебру безразмерных тензоров $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$. Начнем с бинарных произведений:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} &= (\varphi\varphi)_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\rho}\, g^{\rho\sigma} \varphi_{\sigma\nu} = \varphi_{\mu\rho}\, \varphi^{\rho}{}_{\nu}, \\ \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} &= (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\, g^{\rho\sigma} \tilde{\varphi}_{\sigma\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\, \tilde{\varphi}^{\rho}{}_{\nu}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

В отличие от антисимметричных тензоров $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$, тензоры $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ симметричны в соответствии с общими свойствами сверток тензоров. В выбранной нами системе координат эти тензоры имеют следующий явный вид:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

Видно, что они не являются линейно независимыми, а связаны друг с другом посредством метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{2.88}$$

Проведенный анализ показывает, что наличие постоянного однородного внешнего магнитного поля естественным образом разбивает четырехмерное пространство Минковского на два непересекающихся подпространства: двумерное евклидово подпространство с метрическим тензором $\Lambda_{\mu\nu}$, ортогональное вектору напряженности магнитного поля $\mathbf{B}$, и двумерное псевдоевклидово подпространство с метрическим тензором $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. Безразмерные тензоры электромагнитного поля $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ играют роль тензоров Леви — Чивита (полностью антисимметричных тензоров) этих подпространств и обладают следующими свойствами:

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} = \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}, \tag{2.89}$$

$$\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - \Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho}. \tag{2.90}$$

Для введенного набора тензоров справедливы следующие бинарные соотношения:

$$\begin{aligned} &(\tilde{\varphi}\varphi)_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\Lambda)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\varphi)_{\mu\nu} = (\tilde{\Lambda}\Lambda)_{\mu\nu} = 0, \\ &(\tilde{\Lambda}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \qquad (\tilde{\Lambda}\tilde{\varphi})_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\Lambda})_{\mu\nu} = \tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \\ &(\Lambda\Lambda)_{\mu\nu} = -\Lambda_{\mu\nu}, \quad (\Lambda\varphi)_{\mu\nu} = (\varphi\Lambda)_{\mu\nu} = -\varphi_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.91}$$

а также тождества Якоби:

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\varphi}_{\mu\rho}\tilde{\varphi}_{\sigma\nu} + \tilde{\varphi}_{\mu\sigma}\tilde{\varphi}_{\nu\rho} = 0, \\ &\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\varphi}_{\sigma\nu} + \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\varphi}_{\nu\rho} = 0, \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} + \varphi_{\mu\rho}\varphi_{\sigma\nu} + \varphi_{\mu\sigma}\varphi_{\nu\rho} = 0, \\ &\Lambda_{\mu\nu}\varphi_{\rho\sigma} + \Lambda_{\mu\rho}\varphi_{\sigma\nu} + \Lambda_{\mu\sigma}\varphi_{\nu\rho} = 0. \end{aligned} \tag{2.93}$$

При проведении вычислений оказывается удобным ввести специальные обозначения для каждого из подпространств: $\perp$ — для евклидова подпространства с метрикой $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\|$ — для псевдоевклидова подпространства с метрикой $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$. При таком соглашении произвольный четырехмерный вектор $A^\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ можно разбить на две ортогональные составляющие:

$$A^\mu = \tilde{\Lambda}^{\mu\nu}A_\nu - \Lambda^{\mu\nu}A_\nu = A^\mu_\| - A^\mu_\perp, \tag{2.94}$$

где $A^\mu_\| = (A_0, 0, 0, A_3)$ и $A^\mu_\perp = (0, A_1, A_2, 0)$ в соответствии с (2.88). Такое разбиение позволяет ввести скалярное произведение векторов в каждом подпространстве по отдельности:

$$(AB) = (AB)_\| - (AB)_\perp = (A\tilde{\Lambda}B) - (A\Lambda B), \tag{2.95}$$

где A_μ и B_μ — произвольные четырехмерные векторы.

Проведение аналитических расчетов упрощается, если представить тензоры $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ в виде прямого произведения четырехмерных векторов:

$$\varphi_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho b^\sigma, \tag{2.96}$$

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = u_\mu b_\nu - u_\nu b_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho a^\sigma. \tag{2.97}$$

Если $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ задаются числовыми матрицами из (2.85), то введенные векторы можно записать в следующем явном виде:

$$\begin{aligned} u^\mu &= (1, 0, 0, 0), \quad a^\mu = (0, 0, -1, 0), \\ k^\mu &= (0, 1, 0, 0), \quad b^\mu = (0, 0, 0, -1). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Видно, что эти четыре вектора образуют ортонормированный базис четырехмерного пространства-времени Минковского и одновременно являются базисными векторами продольного (u^μ и b^μ) и поперечного (k^μ и a^μ) подпространств. Как следствие, метрические тензоры продольного $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ и поперечного $\Lambda_{\mu\nu}$ подпространств также могут быть разложены по этим векторам:

$$\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - b_\mu b_\nu, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu + a_\mu a_\nu. \tag{2.99}$$

Потенциал внешнего постоянного и однородного магнитного поля легко также записать в терминах этих векторов:

$$A^\mu(x) = B\,(kx)\,a^\mu. \tag{2.100}$$

Иногда может встретиться свертка всех четырех базисных векторов (2.98) с тензором Леви — Чивита:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\mu k_\nu a_\rho b_\sigma = -1. \tag{2.101}$$

Обратив это соотношение, можно записать тензор Леви — Чивита в терминах базисных векторов следующим образом:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = u^{[\mu} k^\nu a^\rho b^{\sigma]}, \tag{2.102}$$

где $[\cdots]$ означает полную антисимметризацию индексов. Приведем также выражение для тензора Леви — Чивита в форме прямого произведения $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \tilde{\varphi}^{\mu\nu}\varphi^{\rho\sigma} + \tilde{\varphi}^{\rho\sigma}\varphi^{\mu\nu} - \tilde{\varphi}^{\mu\rho}\varphi^{\nu\sigma} - \tilde{\varphi}^{\nu\sigma}\varphi^{\mu\rho} + \tilde{\varphi}^{\mu\sigma}\varphi^{\nu\rho} + \tilde{\varphi}^{\nu\rho}\varphi^{\mu\sigma}. \tag{2.103}$$

Перейдем теперь к вычислению пропагатора фермиона. Поскольку магнитное поле постоянное и однородное, то «уравнения Эренфеста» точно такие же, как в скрещенном поле, а именно (2.17) с $\beta_f = eQ_f B$. Решения первого и второго уравнений находятся легко и имеют вид:

$$\Pi_\mu(s) = \left[\exp\left(2\beta_f s\varphi\right)\right]_{\mu\nu} \Pi^\nu(0) = \tag{2.104}$$
$$= \left[\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \cos(2\beta_f s)\Lambda_{\mu\nu} + \sin(2\beta_f s)\varphi_{\mu\nu}\right] \Pi^\nu(0),$$

$$\Gamma_\mu(s) = \left[\exp\left(2\beta_f s\varphi\right)\right]_{\mu\nu} \Gamma^\nu(0) = \tag{2.105}$$
$$= \left[\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \cos(2\beta_f s)\Lambda_{\mu\nu} + \sin(2\beta_f s)\varphi_{\mu\nu}\right] \Gamma^\nu(0),$$

где экспонента от тензора понимается в смысле ее разложения в ряд и учтены свойства (2.88) и (2.91). Поскольку правая часть третьего уравнения из (2.41) известна, то найти его решение труда не представляет:

$$X_\mu(s) = X_\mu(0) + 2\int_0^s \Pi_\mu(s')\, ds' = \tag{2.106}$$
$$= X_\mu(0) + 2s\left\{\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{\sin(\beta_f s)}{\beta_f s}\left[\cos(\beta_f s)\Lambda_{\mu\nu} - \sin(\beta_f s)\varphi_{\mu\nu}\right]\right\}\Pi^\nu(0).$$

Из этого уравнения теперь можно выразить оператор $\Pi_\mu(0)$ через разность операторов координаты $\Delta X_\mu = X_\mu(s) - X_\mu(0)$ как

$$\Pi_\mu(0) = \frac{1}{2s}\left[\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \beta_f s\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\Lambda_{\mu\nu} - \beta_f s\varphi_{\mu\nu}\right]\Delta X^\nu. \tag{2.107}$$

Подставив это выражение в (2.104), получим:

$$\Pi_\mu(s) = \frac{1}{2s}\left[\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \beta_f s\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\Lambda_{\mu\nu} + \beta_f s\varphi_{\mu\nu}\right]\Delta X^\nu, \tag{2.108}$$

и для их разности:

$$\Delta\Pi_\mu \equiv \Pi_\mu(s) - \Pi_\mu(0) = \beta_f\varphi_{\mu\nu}\,\Delta X^\nu. \tag{2.109}$$

Для свертки Π_μ с Γ-оператором следует:

$$\Gamma^\mu(s)\,\Pi_\mu(s) = \Gamma^\mu(0)\,\Pi_\mu(0). \tag{2.110}$$

Перейдем теперь к вычислению «оператора Гамильтона» (2.10):

$$\mathcal{H} = m_f^2 - \Gamma_\mu(0)\Pi^\mu(0)\Gamma_\nu(0)\Pi^\nu(0), \tag{2.111}$$

который можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{H} = m_f^2 - \Pi^\mu(0)\Pi_\mu(0) + i\Pi^\mu(0)\Sigma_{\mu\nu}(0)\Pi^\nu(0) = \tag{2.112}$$
$$= m_f^2 - \frac{1}{4s^2}\,\Delta X^\mu \left[\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{\beta_f^2 s^2\,\Lambda_{\mu\nu}}{\sin^2(\beta_f s)}\right]\Delta X^\nu + i\Pi^\mu(0)\Sigma_{\mu\nu}(0)\Pi^\nu(0).$$

Чтобы упростить это выражение, требуются два коммутатора:

$$[\Pi_\mu(0), \Pi_\nu(0)] = -i\beta_f\varphi_{\mu\nu}, \tag{2.113}$$
$$[X_\mu(0), X_\nu(s)] = -2is\,\times \tag{2.114}$$
$$\times\left\{\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{\sin(\beta_f s)}{\beta_f s}\left[\cos(\beta_f s)\,\Lambda_{\mu\nu} + \sin(\beta_f s)\,\varphi_{\mu\nu}\right]\right\},$$

после учета которых в «операторе Гамильтона» получим:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4s^2}\left[X_\mu(s)\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}X_\nu(s) + X_\mu(0)\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}X_\nu(0) - 2X^\mu(s)\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}X_\nu(0)\right] +$$
$$+\frac{\beta_f^2}{4\sin^2(\beta_f s)}\left[X_\mu(s)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(s) + X_\mu(0)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(0) - 2X^\mu(s)\Lambda^{\mu\nu}X_\nu(0)\right] -$$
$$-\frac{i}{s}\left[1 + \beta_f s\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\right] + m_f^2 - \frac{\beta_f}{2}\,\varphi^{\mu\nu}\Sigma_{\nu\mu}. \tag{2.115}$$

Для записанного в таком виде оператора не составляет труда найти матричный элемент в базисе векторов состояния с определенным значением координаты:

$$\langle x(s)|\,\mathcal{H}\,|y(0)\rangle = R(x,y;s)\,g(x,y;s) = \tag{2.116}$$
$$= \left[m_f^2 - \frac{(z\tilde{\Lambda}z)}{4s^2} + \frac{\beta_f^2\,(z\Lambda z)}{4\sin^2(\beta_f s)} - \frac{i}{s} - i\beta_f\,\mathrm{ctg}(\beta_f s) - \frac{\beta_f}{2}\,(\varphi\sigma)\right] g(x,y;s),$$

где $g(x,y;s) = \langle x(s)|y(0)\rangle$, $z^\mu = x^\mu - y^\mu$, $(z\tilde{\Lambda}z) = z_\mu\tilde{\Lambda}^{\mu\nu}z_\nu$, $(z\Lambda z) = z_\mu\Lambda^{\mu\nu}z_\nu$ и $(\varphi\sigma) = \varphi^{\mu\nu}\sigma_{\nu\mu}$. Поскольку матричный элемент (2.116) факторизуется в соответствии с (2.25), то можно найти его формальное решение в форме интеграла (2.26). Следует отметить, что выбор нижнего предела интегрирования $s_0 \neq 0$ обусловлен тем, что интеграл при $s = 0$ может расходиться и его в этом случае надо регуляризовать. Если регуляризованный пропагатор не требуется, то достаточно взять неопределенный интеграл.

Для нерегуляризованной функции преобразования следует:

$$g(x,y;s) = C(x,y)\, e^{-i\int R(x,y;s)\,ds} = \frac{C(x,y)}{s\sin(\beta_f s)} \times \tag{2.117}$$
$$\times \exp\left[-im_f^2 s - \frac{i(z\tilde{\Lambda}z)}{4s} + \frac{i\beta_f}{4}\,(z\Lambda z)\ \mathrm{ctg}(\beta_f s) + \frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right],$$

где $C(x,y)$ — константа интегрирования. Слагаемое, линейное по полю в показателе экспоненты, — матрица в пространстве Дирака, и его следует понимать в смысле разложения в ряд Тейлора. С учетом $(\varphi\sigma)^2 = 4$, получим:

$$\exp\left\{\frac{i\beta_f s}{2}\,(\varphi\sigma)\right\} = \cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma). \tag{2.118}$$

В итоге для $g(x,y;s)$ получим выражение:

$$g(x,y;s) = \frac{C(x,y)}{s\sin(\beta_f s)}\left[\cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)\right] \times \tag{2.119}$$
$$\times \exp\left[-im_f^2 s - \frac{i(z\tilde{\Lambda}z)}{4s} + \frac{i\beta_f}{4}\,(z\Lambda z)\ \mathrm{ctg}(\beta_f s)\right].$$

Найдем теперь функцию $C(x,y)$, воспользовавшись уравнениями (2.23) и (2.24), в левые части которых надо подставить (2.108) и (2.107) соответственно, что дает:

$$\left[i\partial_x^\mu - eQ_f A^\mu(x)\right] g(x,y;s) = \tag{2.120}$$
$$= \frac{1}{2s}\left[\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} - \beta_f s\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\Lambda^{\mu\nu} + \beta_f s\varphi^{\mu\nu}\right](x-y)_\nu\, g(x,y;s),$$
$$\left[-i\partial_y^\mu - eQ_f A^\mu(y)\right] g(x,y;s) = \tag{2.121}$$
$$= \frac{1}{2s}\left[\tilde{\Lambda}^{\mu\nu} - \beta_f s\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\Lambda^{\mu\nu} - \beta_f s\varphi^{\mu\nu}\right](x-y)_\nu\, g(x,y;s).$$

После подстановки $g(x,y;s)$ из (2.119) следуют уравнения:

$$\left[i\partial_x^\mu - eQ_f A^\mu(x) - \frac{1}{2}\,\beta_f\,\varphi^{\mu\nu}\,(x-y)_\nu\right] C(x,y) = 0, \tag{2.122}$$

$$\left[i\partial_y^\mu + eQ_f A^\mu(y) - \frac{1}{2}\,\beta_f\,\varphi^{\mu\nu}\,(x-y)_\nu\right] C(x,y) = 0. \tag{2.123}$$

Для первого уравнения решение можно записать в виде:

$$C(x,y) = \bar{C}(y)\exp\left\{-ieQ_f\int_y^x\left[A^\mu(\xi) + \frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,(\xi - y)_\nu\right]d\xi_\mu\right\}, \tag{2.124}$$

где показатель экспоненты содержит функцию $\Omega(x,y)$ из задачи 2.3 [см. (2.79)]. После подстановки (2.124) в (2.123) получим:

$$\partial_y^\mu \bar{C}(y) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \bar{C}(y) = C_0 = \text{const.} \tag{2.125}$$

В результате функция преобразования примет вид:

$$g(x,y;s) = \frac{C_0\,e^{-i\Omega(x,y)}}{s\sin(\beta_f s)}\left[\cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)\right]\times \tag{2.126}$$
$$\times\exp\left[-im_f^2 s - \frac{i(z\tilde{\Lambda}z)}{4s} + \frac{i\beta_f}{4}\,(z\Lambda z)\,\operatorname{ctg}(\beta_f s)\right].$$

Константа C_0 определяется после перехода к бесполевой функции преобразования $g_0(x,y;s)$ и ее сравнения с (2.60), что приводит к следующему окончательному результату:

$$g(x,y;s) = \frac{-i\beta_f}{16\pi^2}\,\frac{e^{-i\Omega(x,y)}}{s\sin(\beta_f s)}\left[\cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-im_f^2 s - \frac{i(z\tilde{\Lambda}z)}{4s} + \frac{i\beta_f}{4}\,(z\Lambda z)\,\operatorname{ctg}(\beta_f s)\right]. \tag{2.127}$$

Для вычисления пропагатора фермиона воспользуемся (2.20):

$$S_f(x,y) = \frac{-i\beta_f}{16\pi^2}\,e^{-i\Omega(x,y)}\int_0^\infty\frac{ds}{s\sin(\beta_f s)}\,e^{-im_f^2 s}\times \tag{2.128}$$
$$\times\left[i\hat{\partial} - eQ_f\hat{A}(x) + m_f\right]\left[\cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)\right]\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{i}{4s}\left[(z\tilde{\Lambda}z) - \beta_f s\,\operatorname{ctg}(\beta_f s)\,(z\Lambda z)\right]\right\}.$$

Как и в задаче 2.2, выберем четырехмерный потенциал внешнего поля $A_\mu(x)$ в калибровке Фока — Швингера (2.64). Отметим, что в этой калибровке $\Omega(x,y) = 0$ и пропагатор (2.128) становится трансляционно-инвариантным:

$$S_f(z) = \frac{-i\beta_f}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2 \sin(\beta_f s)}\, e^{-im_f^2 s - \frac{i}{4s}\left[(z\tilde{\Lambda}z) - \beta_f s\ \mathrm{ctg}(\beta_f s)\,(z\Lambda z)\right]} \times$$
$$\times \left[(z\tilde{\Lambda}\gamma) - \beta_f s\ \mathrm{ctg}(\beta_f s)\,(z\Lambda\gamma) - \beta_f s\ (z\varphi\gamma) + 2m_f s\right] \times$$
$$\times \left[\cos(\beta_f s) + \frac{i}{2}\,\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)\right]. \qquad (2.129)$$

После упрощений пропагатор примет следующий вид:

$$S_f(z) = \frac{-i\beta_f}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2 \sin(\beta_f s)}\, e^{-im_f^2 s - \frac{i}{4s}\left[(z\tilde{\Lambda}z) - \beta_f s\ \mathrm{ctg}(\beta_f s)\,(z\Lambda z)\right]} \times$$
$$\times \left\{\cos(\beta_f s)\,(z\tilde{\Lambda}\gamma) - \frac{\beta_f s}{\sin(\beta_f s)}\,(z\Lambda\gamma) + i\sin(\beta_f s)\,(z\tilde{\varphi}\gamma)\,\gamma_5 + \right.$$
$$\left. + m_f s\,[2\cos(\beta_f s) + i\sin(\beta_f s)\,(\varphi\sigma)]\right\}. \qquad (2.130)$$

При $\beta_f \to 0$, сделав замену $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}$ и удерживая слагаемые $\sim \beta_f \tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ и $\sim \beta_f^2 \Lambda_{\mu\nu}$, можно воспроизвести как предельный случай пропагатор в скрещенном поле (2.66).

В произвольной калибровке пропагатор будет следующим:

$$S_f(x, y) = e^{-i\Omega(x,y)}\, S_f(x - y). \qquad (2.131)$$

Как и в скрещенном поле (см задачу 2.2), пропагатор (2.130) можно разбить на кирально-нечетную $S_f^{(-)}(x, y)$ и кирально-четную $S_f^{(+)}(x, y)$ части. Для полноты изложения приведем здесь выражение для кирально-четной части пропагатора:

$$S_f^{(+)}(x, y) = -\frac{i\beta_f m_f}{32\pi^2}\, e^{-i\Omega(x,y)} \int_0^\infty \frac{ds}{s}\,[2\,\mathrm{ctg}(\beta_f s) + i\,(\varphi\sigma)] \times$$
$$\times \exp\left\{-im_f^2 s - \frac{i}{4s}\left[(z\tilde{\Lambda}z) - \beta_f s\ \mathrm{ctg}(\beta_f s)\,(z\Lambda z)\right]\right\}. \quad (2.132)$$

Кирально-нечетная часть $S_f^{(-)}(x, y)$ — это оставшаяся часть пропагатора (2.131), пропорциональная $z_\mu = (x - y)_\mu$.

Задание 2.6. Вычислить эффективный лагранжиан Гейзенберга — Эйлера, воспользовавшись пропагатором фермиона, распространяющегося в постоянном однородном магнитном поле.

Решение

Эффективный лагранжиан Гейзенберга — Эйлера был получен для расчета реакции рассеяния $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$. Он может быть обобщен на случай эффективной вершины взаимодействия N фотонов при условии, что заряженные фермионы удалены из теории. На языке диаграмм Фейнмана это означает, что фермионы образуют замкнутые петли, с которых испускаются фотоны. Вывод эффективного лагранжиана в формализме собственного времени Фока — Швингера представлен в [8, 9], которым и воспользуемся:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}^{\mathrm{QED}}(x) = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\mathrm{Sp}\,\langle x\,|U(s)|\,x\rangle = \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\,\mathrm{Sp}\,\{g(x,x;s)\}\,, \tag{2.133}$$

где Sp означает взятие шпура по матрицам Дирака. Воспользуемся (2.127) для функции преобразования в магнитном поле при $z = 0$. Если учесть, что $\mathrm{Sp}\{I\} = 4$, $\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu\nu}\} = 0$, $\Omega(x,x) = 0$, то для эффективного лагранжиана получим:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}^{\mathrm{QED}}(x) = \frac{\beta_f}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^2}\,\mathrm{ctg}(\beta_f s)\,e^{-im_f^2 s}. \tag{2.134}$$

На нижнем пределе этот интеграл расходится. Расходящиеся слагаемые следует вычесть, оставив только конечный вклад. Наиболее просто это сделать, удалив первые два члена разложения котангенса в ряд Тейлора:

$$\mathrm{ctg}(\beta_f s) \to \mathrm{ctg}(\beta_f s) - \frac{1}{\beta_f s} + \frac{\beta_f s}{3} = -\frac{\beta_f^3 s^3}{45} - \frac{2\beta_f^5 s^5}{945} + \cdots\,. \tag{2.135}$$

В КЭД такое разложение допустимо в силу малости постоянной тонкой структуры: $\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$. Более того, в КЭД отсутствуют эффективные вершины с нечетным числом фотонов [1–3], поэтому вычитание слагаемых в (2.135) на языке диаграмм Фейнмана означает удаление двух диаграмм, а именно чисто фермионную петлю и двухточечную петлевую диаграмму, определяющую поляризационный оператор фотона. В итоге первое слагаемое, дающее вклад в эффективный лагранжиан, — четырехфотонное взаимодействие:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HE}}^{(4)}(x) = -\frac{\beta_f^4}{360\pi^2}\int_0^\infty ds\,s\,e^{-im_f^2 s} = \frac{\beta_f^4}{360\pi^2 m_f^4} = \frac{\alpha^2 Q_f^4}{90 m_f^4}\,\mathcal{F}^2, \tag{2.136}$$

где $\mathcal{F} = 2B^2$ — один из полевых инвариантов (2.28). Это и есть часть эффективного лагранжиана Гейзенберга — Эйлера, обусловленная чисто магнитным полем. В общем случае оба инварианта дают вклад в этот лагранжиан, причем получить его можно, если рассматривать распространение фермиона в поле как с электрической, так и магнитной составляющими. Следует отметить, что в скрещенном электромагнитном поле эффективный лагранжиан не возникает по причине обращения в ноль обоих полевых инвариантов.

Задания для самостоятельной работы

1. Получить формулу (1.27) как результат действия оператора $(i\hat{\partial}_z + m)$ на выражение (1.13) для пропагатора скалярного поля с использованием свойств функций Макдональда.

2. В спинорной КЭД вычислить поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении, воспользовавшись координатным представлением фермионных пропагаторов.

3. Найти пропагатор скалярной заряженной частицы, распространяющейся во внешнем постоянном электромагнитном поле, в конфигурационном пространстве в представлении собственного времени Фока — Швингера.

4. Найти пропагатор спинорной заряженной частицы, распространяющейся во внешнем постоянном электромагнитном поле, в конфигурационном пространстве в представлении собственного времени Фока — Швингера.

5. Найти пропагатор заряженного фермиона, распространяющегося во внешнем постоянном и однородном электромагнитном скрещенном поле, в импульсном пространстве в представлении собственного времени Фока — Швингера.

6. Найти пропагатор заряженного фермиона, распространяющегося во внешнем постоянном и однородном магнитном поле, в импульсном пространстве в представлении собственного времени Фока — Швингера.

7. Найти эффективный лагранжиан Гейзенберга — Эйлера, обусловленный заряженными фермионами, в постоянном и однородном электромагнитном поле, когда напряженности электрического и магнитного полей параллельны.

Литература

1. Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. Ициксон, К. Квантовая теория поля: в 2 т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. — М. : Мир, 1984.
4. Никифоров, А. Ф. Специальные функции математической физики / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. — М. : Наука, 1984.
5. Workman, R. L. Review of Particle Physics / R. L. Workman [et al.] [Particle Data Group] // Progress of Theoretical and Experimental Physics. 2022. V. 2022, No. 8. P. 1.
6. Ландау, Л. Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
7. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
8. Schwartz, M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model / M. D. Schwartz. — Cambridge : Cambridge University Press, 2014.
9. Сатунин, П. С. Квантовая теория поля при конечной температуре и во внешних полях / П. С. Сатунин. — М. : МГУ, 2020.

Оглавление

Учебное издание

Добрынина Александра Алексеевна
Пархоменко Александр Яковлевич

Методы вычисления петлевых диаграмм в квантовой теории поля

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова

Компьютерная верстка А. Я. Пархоменко

Подписано в печать 19.09.2022.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,0.
Тираж 2 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.