

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

Е. П. Кубышкин

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА В РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям Математика
и Прикладная математика и информатика*

ЯРОСЛАВЛЬ
ЯРГУ
2014

УДК 517.1(075)
ББК В161.55я73-4
К 88

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2014 года*

Рецензенты:

М. Е. Соловьев, доктор физико-математических наук, профессор;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета

Кубышкин, Евгений Павлович.

К 88 Методы комплексного анализа в решении прикладных задач /
Е. П. Кубышкин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль :
ЯрГУ, 2014. – 136 с.

ISBN 978-5-8397-1042-9

Изложены основные положения курса «Комплексный анализ» и его приложение к конформным отображениям, исследованию нулей характеристических полиномов и квазиполиномов, построению решений краевых задач и линейных уравнений с запаздывающим аргументом.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 (010400.62) Прикладная математика и информатика (дисциплина «Комплексный анализ», цикл Б2), очной формы обучения.

Материал пособия может быть использован при выполнении студентами курсовых и выпускных квалификационных работ.

УДК 517.1(075)
ББК В161.55я73-4

ISBN 978-5-8397-1042-9

© ЯрГУ, 2014

Оглавление

1. Элементы комплексного анализа	6
1.1. Функции комплексного переменного	6
1.1.1. Поле комплексных чисел	6
1.1.2. Комплексная плоскость и ее топология	8
1.1.3. Числовые ряды	10
1.1.4. Сфера Римана	11
1.1.5. Функция комплексной переменной. Понятие аналитической функции	13
1.1.6. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного	17
1.1.7. Понятие интеграла по комплексной переменной	19
1.1.8. Теорема Коши	21
1.1.9. Неопределенный интеграл	23
1.1.10. Логарифмическая функция	24
1.1.11. Элементарные функции комплексного переменного	26
1.1.12. Интеграл Коши	31
1.1.13. Интегралы, зависящие от комплексного параметра	33
1.1.14. Существование производных любого порядка у функций, аналитических в области	35
1.2. Ряды аналитических функций	37
1.2.1. Равномерно сходящиеся ряды	37
1.2.2. Степенные ряды. Ряд Тейлора	40
1.2.3. Нули аналитической функции. Единственность пред- ставления аналитической функции	44
1.2.4. Аналитическое продолжение функций с вещественной оси комплексной плоскости	46
1.2.5. Аналитическое продолжение многозначной функции. Понятие римановой поверхности	47
1.3. Изолированные особые точки. Ряд Лорана. Теория вычетов	51

1.3.1.	Поведение функции в окрестности изолированной особой точки	51
1.3.2.	Вычет функции в изолированной особой точке	55
1.3.3.	Логарифмический вычет	56
2.	Прикладные аспекты комплексного анализа	61
2.1.	Конформные отображения	61
2.1.1.	Дробно-линейные отображения	61
2.1.2.	Построение дробно-линейного преобразования	65
2.1.3.	Функция Жуковского	71
2.2.	Анализ распределения нулей некоторых аналитических функций	75
2.2.1.	Проблема Рауса – Гурвица	75
2.2.2.	Критерий Михайлова	81
2.2.3.	Метод D -разбиений	85
2.2.4.	Асимптотическое распределение нулей характеристических квазиполиномов	99
2.3.	Методы комплексного анализа в решении краевых задач математической физики	103
2.3.1.	Уравнение Лапласа. Свойства его решений	103
2.3.2.	Задача Дирихле	109
2.3.3.	Методы построения решения задачи Дирихле	110
2.3.4.	Метод функции источника	112
2.3.5.	Метод аналитических функций построения решения задачи Дирихле и бигармонической краевой задачи	114
2.3.6.	Задача Неймана	118
2.4.	Применение комплексного анализа к построению решений дифференциальных уравнений	122
2.4.1.	Элементы операционного исчисления	122
2.4.2.	Построение решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	128
2.4.3.	Построение решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Построение полугруппы линейных операторов	130
	Литература	135

- Нет, – ответила Маргарита, – более всего меня поражает, где все это помещается. – Она повела рукой, подчеркивая этим необъятность зала. Коровьев сладко ухмыльнулся, отчего тени шевельнулись в складках у его носа.
- Самое несложное из всего! – ответил он. – Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением, ничего не стоит раздвинуть помещение до желаемых пределов. Скажу вам более, уважаемая госпожа, до черт знает каких пределов!

М.Булгаков. Мастер и Маргарита

Понятие комплексного числа возникло из потребностей вычислений и было связано с определением квадратного корня из отрицательного числа как числа «мнимого». Переход от поля действительных чисел к более широкому алгебраически замкнутому полю комплексных чисел оказался единственно возможным расширением поля действительных чисел. Построение теории функций комплексного переменного и развитие методов комплексного анализа дали мощный аппарат как для исследований различных разделов математики, так и решения многих прикладных задач. Методы комплексного анализа оказались весьма эффективными при вычислении интегралов, получении асимптотических оценок, исследовании решений дифференциальных уравнений, построении решений краевых задач. Они оказались удобными для описания плоских векторных полей, нашли применение в гидродинамике, теории электромагнитных колебаний. Также нашли широкое применение в теории электрических цепей, теории сигналов, теории изображений и др. областях науки и техники.

Настоящее пособие состоит из двух частей. Первая часть составляет основу читаемого автором курса «Комплексный анализ» и содержит основные понятия, определения и утверждения, составляющие основу комплексного анализа. Вторая часть пособия посвящена приложениям комплексного анализа к исследованию различных прикладных задач. Рассмотрены приложение комплексного анализа к конформным отображениям и исследованию распределения нулей полиномов и квазиполиномов; приложение теории аналитических функций к построению решений краевых задач для уравнения Лапласа и багармонического уравнения; применение преобразования Лапласа к построению решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом – построена полугруппа линейных операторов, определяющая решения линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

При написании пособия использовались замечательные учебники и монографии [1–6]. Помощь в написании пособия также оказал незримый гений М.Булгакова.

Глава 1.

Элементы КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

1.1. Функции комплексного переменного

1.1.1. Поле комплексных чисел

Комплексным числом z будем называть пару действительных чисел (x, y) с установленным порядком их следования и формой записи $z = (x, y)$.

Первое число x пары (x, y) называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, второе число y пары (x, y) называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2, y_1 = y_2$, т. е. когда их действительные и мнимые части совпадают.

Определим следующие алгебраические операции над комплексными числами.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ назовем комплексное число $z = (x, y)$, в котором $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$, обозначая при этом $z = z_1 + z_2$. При таком определении выполнимы коммутативный и ассоциативный законы сложения, т. е. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. Число $z = (0, 0)$ называется нулем и обозначается 0 . Очевидно, что $z = z + 0$ для любого комплексного числа z . Существует единственное число, обладающее таким свойством.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ назовем комплексное число $z = (x, y)$, в котором $x = x_1x_2 - y_1y_2, y = x_1y_2 + x_2y_1$.

При таком определении выполнены коммутативный и ассоциативный законы умножения, т. е. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. Число $1 = (1, 0)$ называется единицей. Очевидно, что $z = z \cdot 1$ для любого комплексного числа. Число, обладающее таким свойством, единственно.

Комплексные числа вида $z = (x, 0)$ являются действительными. Как следует из определения операций сложения и умножения комплексных чисел, для таких чисел сохраняются известные правила действий над действительными числами. Таким образом, множество комплексных чисел можно рассматривать как расширение множества действительных чисел.

Комплексное число вида $z = (0, y)$ называется мнимым. Для числа $(0, 1)$ используется символ i , и оно называется мнимой единицей. Легко проверяется, что $i \cdot i = i^2 = (-1, 0) = -1$. Это число позволяет придать записи комплексного числа алгебраическую форму записи $z = (x, y) = (1, 0)x + (0, 1)y = 1 \cdot x + iy = x + iy$ и производить операции сложения и умножения комплексных чисел, используя правила алгебры многочленов.

Операция, обратная сложению, называется вычитанием комплексных чисел. Комплексное число $z = (x, y)$ называется разностью комплексных чисел z_1 и z_2 , если $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$.

Операция, обратная умножению, называется делением комплексных чисел. Комплексное число $z = (x, y)$ называется частным комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, если $z_1 = z \cdot z_2$, т. е. $x_2x - y_2y = x_1$, $y_2x + x_2y = y_1$. Таким образом, x и y определяются как решение линейной алгебраической системы с определением $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$. С необходимостью имеем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Комплексное число вида $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным числу $z = x + iy$.

Множество комплексных чисел с введенными бинарными операциями, обладающими перечисленными выше свойствами, является алгебраической структурой, именуемой полем. Поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел, а также непрерывным полем (в смысле полноты), т. к. его определение основано на использовании поля действительных чисел, которое является непрерывным. В отличие от поля действительных чисел, поле комплексных чисел не является упорядоченным. Поле комплексных чисел принято обозначать буквой \mathbb{C} .

1.1.2. Комплексная плоскость и ее топология

Комплексное число вида $z = (x, y)$ удобно обозначать точкой на декартовой плоскости xOy . Такую плоскость, в которой ось абсцисс обозначает действительную часть комплексного числа, а ось ординат – мнимую часть комплексного числа, называют комплексной плоскостью. При такой геометризации поля устанавливается взаимно-однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости.

Для определения положения точки на плоскости иногда удобно воспользоваться полярными координатами (ρ, φ) , где ρ – полярный радиус, равный расстоянию от точки до начала координат (точка O), φ – полярный угол – угол между осью Ox и полярным радиусом, отсчитываемый в направлении против хода часовой стрелки.

Из связи декартовых и полярных координат имеем

$$z = (x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.1)$$

Форма записи комплексного числа z в виде (1.1) называется тригонометрической, при этом ρ называется модулем комплексного числа, φ – аргументом комплексного числа, для которых приняты обозначения:

$$\rho = |z|, \quad \varphi = \arg z, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \rho = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2} = (z \cdot \bar{z})^{1/2}.$$

Аргумент z определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого кратного 2π . Ниже используется обозначение

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots), \quad 0 \leq \arg z < 2\pi. \quad (1.2)$$

Для $|z|$ справедливы легко проверяемые, согласно (1.1), неравенства:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$$

Множество точек $z \in \mathbb{C}$, лежащих внутри окружности радиуса ε с центром в точке z_0 ($|z - z_0| < \varepsilon$), будем называть ε -окрестностью точки z_0 и обозначать $u(z_0, \varepsilon)$.

Кривой Γ назовем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ действительной оси в \mathbb{C} . Т. е. кривая – это комплекснозначная функция $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ действительного переменного t , непрерывная в каждой точке $t_0 \in [a, b]$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $|t - t_0| < \delta$ точек $t \in [a, b]$, для которых $|z(t) - z(t_0)| < \varepsilon$. Точка $z(a)$ называется началом кривой, точка $z(b)$ – ее концом. Если отображение

$z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ взаимно однозначное, то такую кривую принято называть *жордановой*. Кривую назовем замкнутой, если $z(a) = z(b)$. Если действительные функции $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ и $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ (в концах отрезка неравенство понимается для односторонних производных), то такую кривую будем называть гладкой. Кривую, состоящую из конечного числа гладких кривых, будем называть кусочно-гладкой. Отметим, что такая кривая имеет конечную длину.

Областью Ω будем называть множество точек $z \in \mathbb{C}$, обладающих следующими свойствами:

- для любой точки $z_0 \in \Omega$ существует ε -окрестность $u(z_0, \varepsilon)$, принадлежащая Ω (z_0 – внутренняя точка Ω);
- для любых точек $z_1, z_2 \in \Omega$ существует лежащая в Ω кривая Γ с концами в z_1 и z_2 (связность области).

Последовательностью $\{z_n\}$ будем называть отображение в \mathbb{C} множества натуральных чисел $n = 1, 2, \dots$

Точку $z_* \in \mathbb{C}$ назовем предельной для последовательности $\{z_n\}$, если в любой ε -окрестности $u(z_*, \varepsilon)$ точки z_* найдется бесконечно много элементов последовательности $\{z_n\}$. Последовательность $\{z_n\}$, имеющую единственную предельную точку z_* , будем называть сходящейся и обозначать $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_*$.

Точки $z_* \in \mathbb{C}$, не принадлежащие области Ω , но являющиеся предельными для ее точек, называются граничными точками области Ω и обозначаются Γ_Ω . Множество $\Gamma_\Omega \cup \Omega$ называется замыканием области Ω и обозначается $\bar{\Omega}$. Если Γ_Ω – связное множество, то множество Ω называется односвязным. Число связных компонент Γ_Ω называется порядком связности области Ω .

Под многосвязной областью будем понимать область, имеющую конечный порядок связности. Границу области будем называть кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Множество Ω будем называть ограниченным, если существует круг $K_R = \{z : |z| < R\}$ такой, что $\Omega \subset K_R$.

Положительным направлением обхода области по границе будет считаться такое, при котором область остается слева.

Легко доказываются следующие утверждения.

Утверждение 1.1. *Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{z_n\}$ ($z_n = (x_n, y_n)$) является сходимость последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.*

Утверждение 1.2. (Критерий Коши¹)

Последовательность $\{z_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что $|z_n - z_{n+m}| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и любом $m \geq 0$.

Утверждение 1.3. Из всякой ограниченной последовательности $\{z_n\}$, т. е. такой, что $|z_n| \leq M$, где $M > 0$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

В некоторых задачах комплексную плоскость удобно компактифицировать. Это делается добавлением бесконечной точки $z = \infty$. В отличие от конечных точек, бесконечная точка не участвует в алгебраических операциях.

Комплексную плоскость, пополненную бесконечной точкой, будем называть замкнутой комплексной плоскостью и обозначать $\overline{\mathbb{C}}$.

1.1.3. Числовые ряды

Выражение вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j, \quad (1.3)$$

где a_j – заданная последовательность комплексных чисел, называется числовым рядом.

Ряд (1.3) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$, $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Предел s последовательности $\{s_n\}$ называется суммой ряда (1.3). При этом ряд $\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j$ называется остатком ряда,

его сумма обозначается r_n , $s = s_n + r_n$.

Следствием утверждения 1.2 является следующий критерий Коши сходимости ряда (1.3).

Ряд (1.3) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , что при $n \geq N$ и любого $m \geq 0$ $\left| \sum_{j=n}^{n+m} a_j \right| < \varepsilon$.

¹ Коши Огюстен Луи (фр. Augustin Louis Cauchy, 1789–1857) — великий французский математик и механик. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику. Один из основоположников механики сплошных сред. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, который помещён на первом этаже Эйфелевой башни.

Ряд (1.3) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|. \quad (1.4)$$

Отметим, что с рядами вида (1.3) могут выполняться операции сложения и умножения рядов по аналогии с рядами вещественных чисел.

Сформулируем критерии Даламбера² и Коши, обеспечивающие сходимость ряда (1.4) и тем самым ряда (1.3).

Ряд (1.4) сходится, если начиная с некоторого номера N для всех $j \geq N$ $|a_{j+1}/a_j| \leq q < 1$. Если начиная с некоторого номера N для всех $j \geq N$ $|a_{j+1}/a_j| \geq 1$, то ряд (1.4) расходится.

Ряд (1.4) сходится, если начиная с некоторого N для всех $j \geq N$ $\sqrt[j]{|a_j|} \leq q < 1$. Если начиная с некоторого N для всех $j \geq N$ $\sqrt[j]{|a_j|} \geq 1$, то ряд (1.4) расходится.

1.1.4. Сфера Римана

Иногда вместо точек комплексной плоскости используют их сферическое изображение. Для этого выберем в трехмерном евклидовом пространстве декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$, оси $O\xi$, $O\eta$ которой соответственно совпадают с осями Ox и Oy комплексной плоскости, и рассмотрим в этом пространстве сферу S

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (1.5)$$

диаметра 1, касающуюся плоскости Oxy в точке $x = y = 0$. Эта сфера носит название сферы Римана³. Каждой точке $z = (x, y)$ комплексной плоскости на сфере Римана поставим точку $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ пересечения S с лучом, соединяющим точку $z \in \mathbb{C}$ с «северным» полюсом сферы $N = (0, 0, 1)$ (см. рис. 1.1). Такое соответствие $z \longleftrightarrow Z$ называется стереографической проекцией. Уравнение луча $Nz : \xi = xt, \eta = yt, \zeta = 1 - t$ подставим в (1.5). В результате имеем $x^2t^2 + y^2t^2 + (1 - t)^2 = (1 - t)$. Отсюда получим равенство $(1 + |z|^2)t = 1$

² Даламбер Жан Лерон (фр. Jean Le Rond D'Alembert, 1717–1783) – французский математик, механик и философ-просветитель. Сформулировал правила составления дифференциальных уравнений движения материальных систем. Обосновал теорию возмущения планет. Имеет труды по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, теории рядов, алгебре.

³ Риман Георг Фридрих Бернхард (нем. Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) – немецкий математик, известный своими работами по теории функций комплексного переменного и новаторскими теориями в области дифференциальной геометрии.

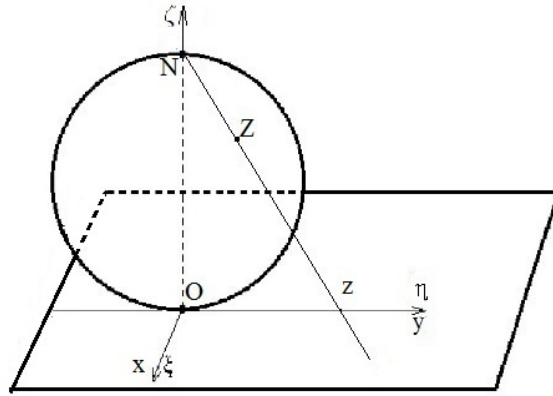


Рис. 1.1. Сфера Римана

и уравнения стереографической проекции:

$$\xi = \frac{x}{(1 + |z|^2)}, \quad \eta = \frac{y}{(1 + |z|^2)}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{(1 + |z|^2)}. \quad (1.6)$$

Из последнего уравнения (1.6) находим $1 - \zeta = (1 + |z|^2)^{-1}$. Подставляя это в первые два равенства (1.6), имеем

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{(1 - \zeta)}. \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) видно, что стереографическая проекция $z \longleftrightarrow Z$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости \mathbb{C} и точками $S \setminus N$. Точке N не соответствует ни одна точка плоскости. Поставим в соответствие точке N бесконечную точку $z = \infty$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками $\overline{\mathbb{C}}$ и S .

Отметим важное свойство стереографической проекции. При стереографической проекции всякая окружность в плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ переходит в окружность на S . Здесь окружность понимается в широком смысле – в окружности включены прямые, как окружности бесконечного радиуса. Действительно, общий вид окружности в плоскости Oxy имеет вид

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

где A, B, C, D – действительные числа, $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. На S , согласно (1.7) и с учетом равенства $|z|^2 = \zeta/(1 - \zeta)$, будем иметь уравнение

$$(A\xi + B\eta + C\eta)/(1 - \zeta) + D = 0,$$

или

$$B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0. \quad (1.8)$$

Полученное уравнение определяет плоскость, которая в пересечении со сферой S дает искомую окружность. Обратно, всякая окружность на сфере S есть результат пересечения сферы и плоскости, которую легко записать в виде (1.8). Далее все очевидно.

Отметим также, что при стереографической проекции сохраняются углы между гладкими кривыми, исходящими из одной точки z_* плоскости и Z_* сферы соответственно. Это несложно доказывается с учетом преобразований (1.6) (1.7).

1.1.5. Функция комплексной переменной. Понятие аналитической функции

Будем говорить, что на множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ комплексной плоскости z задана функция $w = f(z)$, если задан закон, по которому каждой точке $z \in \Omega$ ставится в соответствие определенная точка или совокупность точек комплексной плоскости w . Множество точек Ω называется областью определения. Множество G точек вида $w = f(z), z \in \Omega$ плоскости w называется множеством значений функции $f(z)$.

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция в окрестности $z = z_0$. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если для $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$.

Однозначная функция $w = f(z)$, отображающая Ω в G , называется однолистной, если для любой $z_1, z_2 \in \Omega$ из условия $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Однозначная функция $f(z)$, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, называется дифференцируемой в точке z_0 , если существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0), \quad (1.9)$$

который называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 .

Выведем условие дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), (z = x + iy)$ в терминах функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Воспользуемся условием независимости предела (1.9) от способа приближения к нулю переменной $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Предположим, что $\Delta z = \Delta x$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} = \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Аналогично при $\Delta z = i\Delta y$ имеем

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Сопоставляя (1.10) и (1.11), имеем равенства:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0), \quad (1.12)$$

которые носят название условий Коши–Римана.

Покажем обратное утверждение. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) и удовлетворяют в этой точке условиям (1.12). Покажем, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ является дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. В окрестности точки (x_0, y_0) можно записать

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \xi(\Delta x, \Delta y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

где

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \xi(\Delta x, \Delta y)/(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} = 0, \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \eta(\Delta x, \Delta y)/(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} = 0.$$

С учетом (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= u_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x + i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \\ &+ v_x(x_0, y_0) \frac{i\Delta x - \Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{\xi(\Delta x, \Delta y) + i\eta(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{\xi(\Delta x, \Delta y) + i\eta(\Delta x, \Delta y)}{(\Delta x^2 + i\Delta y^2)^{1/2}} \cdot \frac{\Delta x - i\Delta y}{(\Delta x^2 + i\Delta y^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Устремляя $\Delta z \rightarrow 0$, получим равенство $f'(z_0) = v_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$. Отсюда можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1.4. *Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ($z = x + iy$) дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям (1.12).*

Отметим важность условия дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в утверждении 1.4. Это покажем на следующем примере, приведенном в [1, с. 74]. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

В точке $z = 0$ имеем

$$u_x + iv_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{-1/\Delta x^4} / \Delta x = 0, \quad u_y + iv_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} e^{-1/\Delta y^4} / \Delta y = 0.$$

Отсюда в точке $z=0$

$$u_x = v_y = 0, \quad u_y = -v_x = 0,$$

т. е. условия Коши–Римана выполнены. Однако функция $f(z)$ не будет дифференцируемой в точке $z=0$. Действительно, выбрав стремление к точке $z = 0$ вдоль направления $x = y$, имеем

$$z = x + iy = (1 + i)x, \quad z^4 = -4x^4, \quad f(z) = e^{1/(4x^4)} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

В рассмотренном примере функция $f(z)$ не является ограниченной в окрестности точки $z = 0$, однако удовлетворяет условиям Коши–Римана.

Как отмечено в [1, с. 75], для непрерывной в точке функции $f(z)$ выполнение условий Коши–Римана в этой точке является необходимым и достаточным условием существования конечной производной в этой точке. В дальнейшем, говоря о дифференцируемости функции комплексного переменного в точке, будем ее понимать с учетом этого замечания.

Отметим также, что из (1.9) следует выражение

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \sigma(\Delta z),$$

где $\sigma(\Delta z) = o(|\Delta z|)$ при $|\Delta z| \rightarrow 0$. Таким образом, в случае дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0 , малое изменение величины Δz приводит к малому изменению функции $f(z)$ в окрестности этой точки. Следовательно, дифференцируемая в точке z_0 функция является в этой точке непрерывной.

Однозначную функцию $f(z)$, дифференцируемую в каждой точке области Ω , будем называть аналитической в области Ω функцией.

Отметим некоторые свойства аналитических функций, следующие из определения аналитичности.

1. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в Ω функции, то их сумма и произведение являются аналитическими функциями, а функция $f_1(z)/f_2(z)$ аналитическая всюду, где $f_2(z) \neq 0$.
2. Если $w = f(z)$ аналитическая в области Ω со значениями в области G плоскости w , $\zeta = \varphi(w)$ аналитическая в G функция, то функция $\zeta = \varphi(f(z))$ аналитическая в Ω .
3. Пусть $w = f(z)$ аналитическая в области Ω функция и в точке $z_0 \in \Omega$ $|f'(z_0)| \neq 0$. Тогда в окрестности $w_0 = f(z_0)$ области G определена обратная функция $z = g(w)$ и $f'(z_0) = 1/g'(w_0)$. Действительно, покажем, что уравнения $u = u(x, y), v = v(x, y)$ ($f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$) разрешимы относительно u и v в окрестности точки $(u_0, v_0), u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие теоремы о неявной функции (см., например [7, т.1 с. 455]):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} &= u_x(x_0, y_0)v_y(x_0, y_0) - u_y(x_0, y_0)v_x(x_0, y_0) = \\ &= u_x^2(x_0, y_0) + v_y^2(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Это условие выполнено. Следовательно, в окрестности точки (x_0, y_0) существуют обратные функции $x = x(u, v), y = y(u, v), z = g(w) = x(u, v) + iy(u, v)$. При этом $\Delta z / \Delta w = 1/(\Delta w / \Delta z)$. Отсюда следует непрерывность $g'(z_0)$.

4. Пусть в односвязной области Ω задана действительная часть $u(x, y)$ аналитической функции $f(z)$. Тогда ее мнимая часть может быть определена с точностью до аддитивной постоянной. Действительно, на основании условий Коши–Римана

$$dv(x, y) = v_x(x, y)dx + v_y(x, y)dy = -u_y(x, y)dx + u_x(x, y)dy.$$

Отсюда

$$v(x, y) = \int_{\gamma} -u_{y_1}(x_1, y_1)dx_1 + u_{x_1}(x_1, y_1)dy_1 + v(x_0, y_0),$$

где γ – произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в Ω и соединяющая точки (x_0, y_0) и (x, y) (см., например [7, т.3 с. 50]).

5. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая в области Ω функция. Пусть $u(x, y) = c, v(x, y) = c$ – линии уровня функций $u(x, y), v(x, y)$. Тогда $\nabla u = (u_x, u_y), \nabla v = (v_x, v_y)$ удовлетворяют соотношению $(\nabla u, \nabla v) = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0$. Так как градиент ортогонален линии уровня, то линии уровня $u(x, y) = c$ и $v(x, y) = c$ взаимно ортогональны.

1.1.6. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного

Пусть в области Ω задана аналитическая функция $f(z)$. Выберем $z_0 \in \Omega$ и проведем через z_0 гладкую кривую γ_1 . В плоскости $w = u + iv$ образом области Ω , отображаемой $w = f(z)$, будет область G , при этом $w_0 = f(z_0)$ и кривая γ_1 перейдет в гладкую кривую Γ_1 , проходящую через w_0 . Пусть $|f'(z_0)| \neq 0$. Представим производную в тригонометрической форме

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (0 \leq \alpha < 2\pi) \quad (1.13)$$

и выясним геометрический смысл ее модуля ρ и аргумента α . Выберем в (1.13) Δz таким образом, чтобы точка $z_0 + \Delta z$ двигалась по кривой γ_1 . При этом точка $w_0 + \Delta w$ будет, очевидно, двигаться по кривой Γ_1 . В соответствии с (1.13) имеем

$$\rho = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|, \alpha = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1, \quad (1.14)$$

где Φ_1, φ_1 – углы, которые образуют касательные к кривым γ_1 и Γ_1 в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями осей Ox и Ou соответственно.

Рассмотрим еще одну гладкую кривую γ_2 , проходящую через точку z_0 и ее образ Γ_2 . Углы, образованные касательными к этим кривым в точках z_0 и w_0 с положительными направлениями осей Ox и Ou , обозначим соответственно Φ_2, φ_2 . Из (1.14) следует, что $\alpha = \Phi_2 - \varphi_2$. Отсюда имеем равенство $\varphi_2 - \varphi_1 = \Phi_2 - \Phi_1$. Таким образом, угол между двумя пересекающимися в точке z_0 гладкими кривыми равен углу между их образами, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. При этом сохраняется не только величина углов, но и их направления. Это свойство отображения называется свойством сохранения (консерватизма) углов.

Величины $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ определяют соответственно расстояния между точками $z_0 + \Delta z$ и z_0 и их образами $w_0 + \Delta w$ и w_0 .

Из (1.14) имеем

$$|\Delta w| = \rho |\Delta z| + o(|\Delta z|). \quad (1.15)$$

Геометрический смысл равенства (1.15) состоит в следующем: отображение, осуществляемое аналитической в области Ω функцией $f(z)$ и удовлетворяющее условию $f'(z_0) \neq 0$, преобразует бесконечно малые линейные расстояния в подобные. При этом коэффициент подобия в окрестности точки z_0 определяется величиной $|f'(z_0)| \neq 0$. Это свойство называется свойством постоянства растяжений.

Отображение окрестности точки z_0 , осуществляемое аналитической функцией $w = f(z)$ на окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ и обладающее в точке z_0 свойством сохранения углов, их направления и постоянства растяжений, называется конформным отображением.

Из этого определения следует, что $f'(z_0) \neq 0$. Таким образом, существует в окрестности точки w_0 обратная функция $z = g(w)$, осуществляющая взаимно однозначное отображение окрестности точки w_0 на окрестность точки z_0 . Применительно к области определение конформности выглядит следующим образом.

Взаимно однозначное непрерывное отображение $w = f(z)$ области Ω на область G называется конформным, если оно во всех точках $z \in \Omega$ обладает свойством сохранения углов, их направления и постоянства растяжений.

Взаимно однозначное непрерывное отображение $w = f(z)$ области Ω на область G называется конформным отображением второго рода, если оно во всех точках $z \in \Omega$ обладает свойством сохранения углов и постоянства растяжений, а направление углов меняет на противоположное.

Выясним свойства функции $f(z)$, осуществляющей конформное отображение.

Утверждение 1.5. *Функция $f(z)$ тогда и только тогда осуществляет конформное отображение области Ω в область G , когда $f(z)$ является однозначной, однолистной аналитической функцией в Ω и $f'(z) \neq 0$ для всех $z \in \Omega$.*

◀ Пусть $f(z)$ осуществляет конформное отображение области Ω в область G . Из определения конформности отображения следует однозначность и однолистность функции $f(z)$. Выберем точку $z_0 \in \Omega$. Т. к. $f(z)$ сохраняет углы и постоянства растяжений, то для любых точек z_1 и z_2 , принадлежащих

ε -окрестности $u(z_0, \varepsilon)$ точки z_0 , выполнены равенства:

$$\frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = \frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = \rho \neq 0, \arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1,$$

$$\Delta w_j = w_j - w_0, \Delta z_j = z_j - z_0 \quad (j = 1, 2). \quad (1.16)$$

Первое равенство (1.16) выполняется с точностью до величин более высокого порядка малости по ε . Отсюда

$$\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha.$$

Таким образом, с точностью до величины более высокого порядка малости по ε имеем

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \rho e^{i\alpha}. \quad (1.17)$$

В силу произвольности $z_1, z_2 \in u(z_0, \varepsilon)$ и равномерности выполнения равенств (1.16), (1.17)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0), \quad |f'(z_0)| = \rho \neq 0.$$

Так как z_0 произвольная точка области Ω , то $f(z)$ является аналитической в области Ω функций.

Обратно. Если $f(z)$ однозначная и однолистная в Ω функция, имеющая $|f'(z_0)| \neq 0$, то во всех точках отображение $w = f(z)$ является непрерывным, взаимно однозначным, сохраняет углы и постоянство растяжений. ►

1.1.7. Понятие интеграла по комплексной переменной

Пусть в области Ω комплексной плоскости z задана непрерывная функция $f(z)$, а γ – кусочно-гладкая кривая, принадлежащая этой области, задаваемая функцией $z(t) = x(t) + iy(t)$ ($a \leq t \leq b$) и имеющая длину L . Разобьем кривую γ точками z_0, z_1, \dots, z_n в соответствии с возрастанием t . Обозначив $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$, составим сумму

$$S_n = \sum_{j=1}^n f(\zeta_j) \Delta z_j,$$

где ζ_j – некоторая точка на части дуги кривой γ , расположенной между точками z_j и z_{j+1} . Обозначим $\Delta z = \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta z_j|$.

Если при $\Delta z \rightarrow 0$ существует предел S_n , не зависящий от разбиения кривой γ и точек ζ_j , то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z) dz. \quad (1.18)$$

С учетом $z = x + iy$, $\Delta z_j = \Delta x_j + i\Delta y_j$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ выражение S_n представим в виде

$$S_n = \sum_{j=1}^n u(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j - v(\xi_j, \eta_j) \Delta y_j + i \sum_{j=1}^n u(\xi_j, \eta_j) \Delta x_j + v(\xi_j, \eta_j) \Delta y_j.$$

Устремляя теперь $\Delta z \rightarrow 0$, получим для (1.18) следующее выражение:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} u(x, y) dy + v(x, y) dx. \quad (1.19)$$

Таким образом, задача определения интеграла (1.18) свелась к задаче определения двух криволинейных интегралов второго рода, входящих в (1.19), от функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по кривой γ в плоскости (x, y) . Для их существования достаточно (см., например, [7, т. 3 с. 22]), чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывными на кривой γ , а кривая γ – кусочно-гладкой.

Из свойств криволинейных интегралов второго рода следуют следующие свойства интегралов вида (1.19):

1. $\int_{\gamma_+} f(z) dz = - \int_{\gamma_-} f(z) dz$, где γ_+ и γ_- – кривая γ , проходимая в положительном и отрицательном направлениях.
2. $\int_{\gamma} a f(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz$, где a – произвольное комплексное число.
3. $\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz$.
4. $\int_{\gamma} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_{\gamma} f_1(z) dz + \int_{\gamma} f_2(z) dz$.
5. $|\int_{\gamma} f(z) dz| = \int_{\gamma} |f(z)| ds$, где ds – дифференциал дуги кривой γ , а интеграл в правой части неравенства является криволинейным интегралом первого рода.

6. $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(g(\xi))g'(\xi)d\xi$, где $g(\xi)$ аналитическая функция переменной ξ , определенная в окрестности кривой Γ и взаимно однозначно отображающая кривую Γ на кривую γ . В частном случае, когда кривая γ задается гладкой функцией $z(t)$, $a \leq t \leq b$, имеем $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$.

1.1.8. Теорема Коши

Из определения интеграла от непрерывной функции $f(z)$ по заданной кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей две точки z_0 и z_1 области определения функции, следует зависимость значения интеграла от кривой γ . Возникает естественный вопрос: в каких случаях значение интеграла зависит только от начальной и конечной точек, а не зависит от кривой γ ? Для получения ответа на этот вопрос воспользуемся следующим утверждением из математического анализа функций действительного переменного, которое приведем без доказательства. Доказательство можно посмотреть, например, в [7, т. 3 с. 174].

Утверждение 1.6. (Теорема Грина⁴) Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой ограниченной области в $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей γ , тогда

$$\int_{\gamma} u(x, y)dx + v(x, y)dy = \int_{\Omega} (v_x(x, y) - u_y(x, y))dxdy. \quad (1.20)$$

Предположим, что функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в односвязной области Ω и имеет в каждой точке области непрерывную производную. Отсюда следует, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в Ω вместе с частными производными первого порядка и удовлетворяют условиям (1.12) (условиям Коши–Римана).

Обозначим через γ замкнутую кусочно-гладкую кривую (замкнутый контур), лежащую в Ω и ограничивающую область G . Для интеграла

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy.$$

⁴ Грин Джордж (англ. George Green, 1793–1841) — английский математик, внёсший значительный вклад во многие разделы математической физики. Главные заслуги Грина заключаются в введении потенциальных функций, выводе основной теоремы теории потенциальных функций и в открытии особого метода вывода дифференциальных уравнений теории упругости.

С учетом (1.12) и (1.20) будем иметь

$$\int_{\gamma} u dx - v dy = - \int_G (v_x + u_y) dx dy = 0, \quad \int_{\gamma} v dx + u dy = \int_G (u_x + v_y) dx dy = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.21)$$

Это позволяет сформулировать следующее

Утверждение 1.7. (Теорема Коши) Пусть в односвязной области Ω задана аналитическая функция $f(z)$, производная которой в каждой точке непрерывна. Тогда интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой, лежащей в области, равен нулю.

Следствие. Пусть в односвязной ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей задана аналитическая функция $f(z)$, непрерывная вместе с $f'(z)$ в $\bar{\Omega}$. Тогда интеграл от этой функции по границе области равен нулю.

Утверждение 1.8. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в многосвязной области Ω , имеющей кусочно-гладкую границу Γ и ограниченной замкнутой кривой Γ_0 , непрерывная вместе с $f'(z)$ в $\bar{\Omega}$. Тогда интеграл от функции $f(z)$ по полной границе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ равен нулю.

◀ Проведем кусочно-гладкие кривые p_j , соединяющие границу Γ_0 с внутренними кусками границы γ_j . В результате получили односвязную область Ω с границей Γ , состоящей из кривых $\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n, p_1, \dots, p_n$. Находимся в условиях утверждения 1.7. В соответствии с этим

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_0} f(z) dz + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz + \sum_{j=1}^n \left(\int_{p_j^+} f(z) dz + \int_{p_j^-} f(z) dz \right) = 0. \quad (1.22)$$

В (1.22) p_j^+ и p_j^- – кривые, проходимые в разных направлениях, поэтому интегралы, стоящие в круглых скобках в последней сумме, равны по величине и противоположны по знаку. Это доказывает утверждение. ▶

Замечание к утверждениям 1.7, 1.8. При доказательстве этих утверждений использовалось предположение непрерывности первых производных. Это предположение не является необходимым, а обусловлено лишь

методом доказательства. Утверждения 1.7, 1.8 справедливы для любой аналитической в области Ω функции, т. е. функции, имеющей в каждой точке области конечную производную (см., например, [1, с. 149]).

В дальнейшем ссылки на утверждения 1.7, 1.8 будут проводиться с учетом этого замечания.

1.1.9. Неопределенный интеграл

Пусть $f(z)$ – аналитическая в односвязной области Ω функция. Значение интеграла $\int_{\gamma} f(z)dz$, вычисленного вдоль кривой γ , принадлежащей Ω на основании утверждения 1.7 не будет зависеть от вида кривой, а лишь от начальной z_0 и конечной z точек. Это позволяет для любых $z_0, z \in \Omega$ определить выражение

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta, \quad (1.23)$$

где за контур интегрирования может быть взята любая кривая, соединяющая точки z_0 и z и лежащая в Ω . Функция $F(z)$, таким образом, является однозначной функцией в области Ω . Покажем, что $F(z)$ в каждой точке $z \in \Omega$ является аналитической функцией.

Утверждение 1.9. Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна в односвязной области Ω , а интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой, принадлежащей области, равен нулю. Тогда функция (1.23), определяемая по $f(z)$, для любых $z_0, z \in \Omega$, где интегрирование ведется по любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки z_0 и z , является аналитической в области Ω функцией. При этом $F'(z) = f(z)$.

◀ Обозначим $z + \Delta z \in \Omega$ произвольную точку из окрестности точки z и рассмотрим выражения:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right) / \Delta z = \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta / \Delta z. \quad (1.24)$$

Последнее равенство следует из свойств интегралов и независимости интеграла от кривой интегрирования. Выберем в последнем интеграле в качестве

кривой интегрирования прямую, соединяющую точки z и $z + \Delta z$. Отметим, что в этом случае $\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$. Из (1.24) и свойств интегралов имеем

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_z^{z+\Delta z} \frac{(f(\zeta) - f(z))d\zeta}{\Delta z} \right| \leq \max_{z \leq \zeta \leq z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)|.$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|\Delta z| < \delta$, $|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$. Отсюда $F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (F(z + \Delta z) - F(z)) / \Delta z = f(z)$. ►

Эта теорема позволяет ввести понятие первообразной функции комплексного переменного. Аналитическую в области Ω функцию $F(z)$ будем называть первообразной функции $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$.

Понятно, что первообразная определяется с точностью до постоянной. Множество всех первообразных функции $f(z)$ принято называть неопределенным интегралом функции $f(z)$.

Утверждение 1.10. *Для аналитической в односвязной области Ω функции $f(z)$ имеет место формула*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) - F(z_1),$$

где $F(z)$ – некоторая первообразная функции $f(z)$.

◄ С учетом представления первообразной $F(z)$, имеем

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad \int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_0}^{z_2} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) - F(z_1).$$

Здесь z_0 – произвольная точка $z_0 \in \Omega$. ►

1.1.10. Логарифмическая функция

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (1.25)$$

где интегрирование производится по любой кривой, соединяющей точку 1 с точкой z и не проходящей через $z = 0$.

Подынтегральная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$.

Возьмем замкнутую кусочно-гладкую кривую (замкнутый контур) γ и рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z}. \quad (1.26)$$

Если точка $z = 0$ не принадлежит области Ω , ограниченной кривой γ , то $I = 0$. Если же точка $z = 0$ принадлежит области Ω , то $I \neq 0$. Значение можно вычислить, взяв в качестве γ окружность C_R радиуса R с центром в нуле. В этом случае имеем $z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), $dz = R(-\sin \varphi + i \cos \varphi)d\varphi = iR(\cos \varphi + i \sin \varphi)d\varphi$, $dz/z = i d\varphi$,

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = i2\pi. \quad (1.27)$$

Это число выражает значения интеграла (1.26) вдоль любого замкнутого контура, окружающего точку $z = 0$.

Пусть z принимает действительные значения и кривой интегрирования служит отрезок $[1, x]$ действительной прямой. А этом случае имеем $f(x) = \ln x$. Естественно, функцию $f(z)$ будем считать продолжением функции $\ln x$ на комплексную плоскость.

Изучим свойства этой функции. Заметим, что значение интеграла (1.25) зависит от того, по какой кривой движемся от точки 1 до точки z . Так, если кривая не делает ни одного оборота вокруг точки 0, то такое значение интеграла обозначим $(\ln z)_0$. Если же кривая делает один оборот, то значение такого интеграла увеличивается согласно (1.27) на $2\pi i$, т. к.

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i + (\ln z)_0 = (\ln z)_1 \quad (1.28)$$

(см. рис. 1.2 б). Первый интеграл в правой части равенства (1.28) совпадает с (1.27), второй интеграл совпадает с первым случаем (рис. 1.2 а).

Если кривая интегрирования делает n оборотов вокруг нуля, то значение функции $f(z) = (\ln z)_n$ увеличивается (уменьшается) на $2\pi i n$ по сравнению с $(\ln z)_0$.

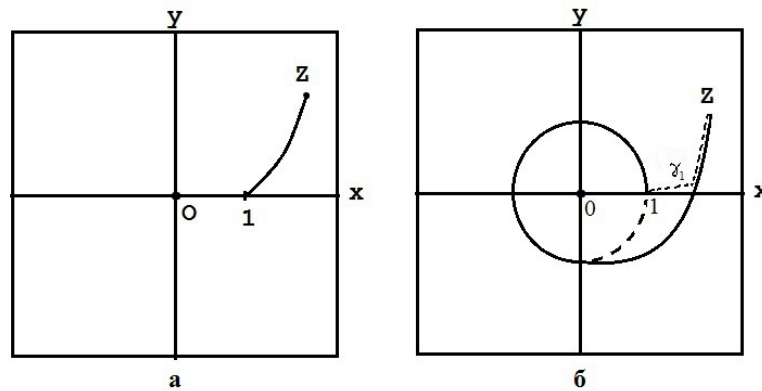


Рис. 1.2.

Таким образом, функция $f(z)$ принимает для каждого z счетное число значений, которые отличаются друг от друга на величину, кратную $2\pi i$.

Если z – вещественное положительное число, то только одна из $(\ln z)_n$ принимает вещественные значения, а именно $f(z) = (\ln z)_0$.

Чтобы рассмотреть однозначную функцию (1.25), выберем в комплексной плоскости такую область, чтобы было невозможно провести замкнутую кривую вокруг точки $z = 0$. В качестве такой области возьмем комплексную плоскость и разрежем ее вдоль отрицательной оси, т. е. $z \in \mathbb{C}$; $-\pi < \arg z < \pi$. Для $f(z)$, определенной в этой области согласно (1.25), принято использовать обозначения $\ln z$. Она является продолжением функции $\ln x$. Для всей счетнозначной функции используется обозначение

$$Lnz = \ln z + i2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots). \quad (1.29)$$

1.1.11. Элементарные функции комплексного переменного

Функция

$$w = z^n, \quad (1.30)$$

где n – любое целое положительное число. Функция однозначная. Введем в плоскостях z и w полярные координаты $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и $w = r(\cos \psi + i \sin \psi)$. В результате получим равенства:

$$r = \rho^n, \psi = n\varphi. \quad (1.31)$$

Из (1.31) видно, что отображение (1.30) для любой точки $z \neq 0$ сводится к повороту радиус-вектора $|z|$ на угол $(n - 1) \arg z$ и его растяжению в $|z|^{n-1}$

раз. При этом точки z_1 и z_2 с одинаковыми модулями, аргументы которых отличаются на целое кратное $2\pi/n$, и только они, переходят при отображении (1.30) в одну точку. Поэтому для выделения области однолиственности функции (1.30) необходимо и достаточно, чтобы область не содержала таких точек, для которых

$$|z_1| = |z_2|, \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi/nk \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Этому условию удовлетворяет последовательность секторов

$$2\pi/nk \leq \varphi < 2\pi/n(k+1) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

каждый из которых отображается на всю плоскость w .

Отметим, что функция (1.30) аналитична во всей комплексной плоскости, при этом $w' = nz^{n-1}$.

Функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad (1.32)$$

где n – любое целое число. Эта функция обратная к (1.30) и является n -значной. Рассмотрим для простоты изложения случай $n = 2$. Представив z и w в полярных координатах, с необходимостью получаем

$$r = \rho^{1/2}, \psi_j = \frac{\varphi}{2} + \pi j, (j = 0, 1),$$

которым соответствуют два значения корня:

$$w_0(z) = \rho^{1/2}(\cos(\frac{\varphi}{2}) + i \sin(\frac{\varphi}{2})), w_1(z) = \rho^{1/2}(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)). \quad (1.33)$$

Выберем на плоскости z замкнутую кривую γ без самопересечений. Фиксируем на этой кривой z_0 , которой соответствует определенное значение аргумента φ_0 . Определим $w_0(z_0)$ и $w_1(z_0)$ и изучим изменения функций $w_0(z)$ и $w_1(z)$ при движении по кривой γ . Возможны два случая расположения кривой. В первом случае точка $z = 0$ не содержится в области, ограниченной кривой γ . В этом случае значение аргумента точки z при обходе по кривой γ не изменится, а значения функций $w_0(z)$ и $w_1(z)$ останутся первоначальными. Таким образом, на кривой γ определены две различные функции $w_0(z)$ и $w_1(z)$. Если область Ω не содержит точку $z = 0$, то в области определены, согласно (1.33), две однозначные непрерывные функции $w_0(z)$ и $w_1(z)$, которые называются ветвями многозначной функции (1.32). Во втором случае точка $z_0 = 0$ содержится внутри области, ограниченной кривой γ . Тогда при обходе кривой γ значение аргумента точки z_0 не вернется к первоначальному, а увеличится на 2π , т. е. $\arg z_0 = \varphi_0 + 2\pi$. При этом значения функций

$w_0(z)$ и $w_1(z)$ станут равными согласно (1.33) соответственно $w_1(z_0)$ и $w_0(z_0)$, т. е. $w_0(z_0)$ перейдет в $w_1(z_0)$, и наоборот.

Точка z_0 называется точкой ветвления (разветвления) многозначной функции, если существует такая ε -окрестность $u(z_0, \varepsilon)$ точки, что при однократном обходе этой точки по любой замкнутой кривой $\gamma \in u(z_0; \varepsilon)$ одна ветвь многозначной функции переходит в другую.

В рассмотренном примере точками ветвления являются точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В окрестности точки ветвления отдельные ветви многозначной функции уже нельзя рассматривать как различные однозначные функции, поскольку при обходе такой точки ветви меняются.

Показательная функция

$$w = e^z. \quad (1.34)$$

Показательную функцию определим следующим соотношением:

$$w = e^z = u(x, y) + iv(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy. \quad (1.35)$$

Покажем, что для (1.35) выполнены все свойства функций e^x действительного переменного.

При действительных $z = x$ (1.35) совпадает с e^x .

Покажем, что (1.35) аналитическая функция в \mathbb{C} . Действительно, для $z \in \mathbb{C}$ выполнены условия (1.12) (Коши–Римана)

$$(e^x \cos y)_x = (e^x \sin y)_y, \quad (e^x \cos y)_y = -(e^x \sin y)_x$$

и производные являются непрерывными функциями.

Вычислив производную функции (1.35) по направлению x , имеем

$$(e^z)' = (e^x)'(\cos y + i \sin y) = e^z,$$

т. е. имеем обычную формулу для производной функции.

Покажем, что справедливо равенство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad (1.36)$$

для любых z_1, z_2 . Положив в $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, имеем

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Отметим $|e^z| = e^x$, т. е. e^z ни для какого аргумента не обращается в нуль. Полагая $x = 0, y = \varphi$, имеем формулу Эйлера⁵

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

которая позволяет любое комплексное число z записать в показательной форме

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}. \quad (1.37)$$

Покажем, что функция e^z является периодической по мнимому аргументу с периодом $2\pi k$, где k – целое число. Действительно, взяв $z = x + iy$ и положив $z + i2\pi k$, согласно (1.36), (1.37) имеем

$$e^{z+i2\pi k} = e^z \cdot e^{i2\pi k} = e^z.$$

Введем в плоскости w полярные координаты и представим $w = re^{i\psi}$, тогда из (1.35) имеем

$$r = e^x, \psi = y.$$

Таким образом, отображение $w = e^z$ преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $\psi_0 = y_0$, а отрезки $x = x_0, 0 \leq y \leq 2\pi$ в окружности $\rho = e^{x_0}$.

Покажем, что логарифмическая функция (1.29) является обратной к функции (1.34). Рассмотрим сначала функцию $w = \ln z, -\pi < \arg z \leq \pi$, т. е. покажем, что

$$e^w = z. \quad (1.38)$$

Так как число $|e^w| \neq 0$ для любых w , то $z \neq 0$. Представим произвольное z в виде (1.37), где $-\pi < \varphi \leq \pi$. Полагая $w = u + iv$, из (1.38) получим

$$e^u = \rho, v = \varphi + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Отсюда $u = \ln \rho$. Таким образом, если $z = \rho e^{i\varphi}, -\pi < \varphi \leq \pi$, то общее решение уравнения (1.38) будет иметь вид

$$w = \ln \rho + i\varphi + i2\pi k, (k = 0, \pm 1, \dots). \quad (1.39)$$

Если z изменяется в «разрезанной» плоскости, то в (1.39) $k = 0$ и значение w будет однозначным.

⁵ Эйлер Леонард (нем. Leonhard Euler, 1707–1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук. Автор более чем 850 работ (включая два десятка фундаментальных монографий) по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям.

Дифференцируя соотношение (1.38) по z , будем иметь

$$e^w \frac{dw}{dz} = 1, \quad \frac{dw}{dz} = e^{-w} = \frac{1}{z}.$$

Таким образом, функция $w(z)$, обращающаяся в ноль при $z = 1$, является первообразной для функции $1/z$. Отсюда

$$w(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где интегрирование ведется по любой кривой, не проходящей через точку $z = 0$. В «разрезанной» плоскости $z \in \mathbb{C}$, $-\pi < \arg z < \pi$ имеем

$$w(z) = \ln z = \ln \rho + i\varphi \quad (\rho = |z|, \varphi = \arg z). \quad (1.40)$$

Таким образом, получили еще одно представление функции $\ln z$. Сравнивая (1.29), (1.39) и (1.40), легко сделать вывод, что (1.29) является решением (1.38).

Тригонометрические и гиперболические функции комплексной переменной. Примем по определению для любого комплексного z

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}). \quad (1.41)$$

На вещественной оси $z = x$ имеем на основании формулы Эйлера

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

т. е. функции (1.41) совпадают с обычными синусом и косинусом. Функции (1.41) являются аналитическими во всей комплексной плоскости, подчиняются обычным формулам дифференцирования

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z,$$

являются периодическими по действительному аргументу с периодом 2π . Функция $\sin z$ нечетная, $\cos z$ – четная, подчинены всем тригонометрическим соотношениям

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (\sin 2z) = 2 \sin z \cos z,$$

и т. д.

Эти соотношения легко устанавливаются непосредственно из определения функций согласно (1.41). Отметим, что функции $|\sin z|$ и $|\cos z|$ не являются ограниченными. В этом легко убедиться, взяв в качестве $z = iy$.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Гиперболические функции в комплексной области определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Они просто выражаются через тригонометрические функции:

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz.$$

1.1.12. Интеграл Коши

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией в односвязной области Ω . Возьмем производную точку $z_0 \in \Omega$ и построим замкнутую кусочно-гладкую кривую γ , целиком лежащую в Ω и содержащую точку z_0 внутри области, ограниченной γ . Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}, \quad (1.42)$$

которая является аналитической всюду в области Ω , за исключением точки z_0 . Проведем окружность γ_ε радиуса ε с центром в точке z_0 , а соответствующий круг обозначим K_ε . Рассмотрим область $\Omega' = \Omega \setminus K_\varepsilon$. Функция (1.42) является аналитической в Ω' , поэтому, согласно утверждению 1.8,

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = 0. \quad (1.43)$$

Во втором интеграле (1.43) интегрирование ведется в направлении хода часовой стрелки.

Положим во втором интеграле (1.43) $\zeta = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}$. С учетом $d\zeta = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$, перепишем (1.43) в виде

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = -i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (1.44)$$

Выражение (1.44) справедливо при любых достаточно малых ε . В силу непрерывности $f(z)$ последний интеграл в (1.44) при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к $2\pi i f(z_0)$. В результате в силу произвольности $z_0 \in \Omega$ имеем следующую формулу (интеграл Коши):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1.45)$$

устанавливающую взаимосвязь между значением аналитической функции в точке области и значением на любой кусочно-гладкой замкнутой кривой, лежащей в области и содержащей точку внутри себя.

В случае дополнительной непрерывности функции $f(z)$ в $\overline{\Omega}$ с кусочно-гладкой границей γ , формула (1.45) устанавливает взаимосвязь между значением функции в произвольной точке области и значениями на границе γ .

Отметим, что формула (1.45) остается справедливой и для многосвязной области с кусочно-гладкой границей. Для доказательства этого утверждения достаточно, используя «разрезы», перейти к односвязной области и воспользоваться полученными результатами. При интегрировании по границе области берется полная граница многосвязной области.

Рассмотрим некоторые следствия из интеграла Коши (1.45).

1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области Ω и z_0 некоторая точка области. Опишем окружность γ_R радиуса R вокруг точки z_0 так, чтобы круг K_R лежал в Ω . Тогда, положив на окружности $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$, имеем $d\zeta = Rie^{i\varphi}d\varphi$ и на основании (1.45)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma_R} f(\zeta) ds. \quad (1.46)$$

Эта формула носит название формулы среднего значения аналитической функции.

2. Справедливо

Утверждение 1.11. (Принцип максимума модуля аналитической функции) Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей γ и непрерывная $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{\gamma} |f(z)|.$$

◀ Так как $|f(z)|$ – непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция $z = x + iy$, то она достигает своего максимального значения в некоторой точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Предположим, что $z_0 \in \Omega$, т. е.

$$M = |f(z_0)| \geq |f(z)|, z \in \bar{\Omega}. \quad (1.47)$$

Проведем окружность γ_R с центром в z_0 так, чтобы круг $K_R \in \Omega$. С учетом (1.46), (1.47) будем иметь

$$M \cdot 2\pi = \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\varphi})| d\varphi \leq M \cdot 2\pi.$$

Следовательно, на основании (1.47) $|f(z)| \equiv M$ на окружности γ_R , а в силу произвольности R и во всем K_R . Проведем теперь кривую Γ , лежащую в Ω и соединяющую точку z_0 с произвольной точкой границы γ . Обозначим через z_1 точку пересечения Γ с границей окружности γ_R . В этой точке $|f(z)| \equiv M$. Проведем в этой точке окружность γ_{R_1} радиуса R_1 так, чтобы круг $K_{R_1} \subset \Omega$. Внутри этого круга функция $|f(z)| = M$. Обозначим через z_2 точку пересечения Γ с γ_{R_1} и т. д.

Продолжая этот процесс, дойдем до границы γ области Ω . Так как кривая Γ является компактным множеством, то существует конечное покрытие кривой Γ пересекающимися окружностями, лежащими в области Ω . ►

1.1.13. Интегралы, зависящие от комплексного параметра

Рассмотрим функцию $F(z, \zeta)$ двух комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$. Под функцией двух комплексных переменных будем понимать закон, посредством которого каждой паре значений (z, ζ) из области определения $F(z, \zeta)$ ставится в соответствие число w (или несколько комплексных чисел). Здесь рассматриваем однозначную функцию комплексного переменного. Функцию $F(z, \zeta)$ будем называть непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки (z_0, ζ_0) из области определения $F(z, \zeta)$ существует такое $\delta > 0$, что для любых (z, ζ) , удовлетворяющих условию $|z - z_0|, |\zeta - \zeta_0| < \delta$, следует $|F(z, \zeta) - F(z_0, \zeta_0)| < \varepsilon$.

Утверждение 1.12. Пусть задана непрерывная по совокупности переменных функция $F(z, \zeta)$, где переменная z принимает значение в некоторой

области Ω , а переменная ζ на некоторой кусочно-гладкой кривой Γ . При этом функция $F(z, \zeta)$ при каждом $\zeta \in \Gamma$ является аналитической функцией $z \in \Omega$ и функция $F_z(z, \zeta)$ является непрерывной по совокупности переменных при $z \in \Omega$ и $\zeta \in \Gamma$.

Тогда функция

$$\Phi(z) = \int_{\Gamma} F(z, \zeta) d\zeta$$

является аналитической в области Ω и

$$\Phi_z(z) = \int_{\Gamma} F_z(z, \zeta) d\zeta. \quad (1.48)$$

◀ Обозначив $F(z, \zeta) = u(x, y, \xi, \eta) + iv(x, y, \xi, \eta)$, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= U(x, y) + iV(x, y) = \int_{\Gamma} F(z, \zeta) d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta + i \int_{\Gamma} v(x, y, \xi, \eta) d\xi + u(x, y, \xi, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Интегралы (1.49) при сделанных предположениях относительно свойств функции $F(z, \xi)$, очевидно, существует. Покажем, что функция $\Phi(z)$ является аналитической в области Ω . В силу предположения о непрерывности $F(z, \zeta)$, $F_z(z, \zeta)$, функции u_x, u_y, v_x, v_y являются непрерывными по совокупности переменных x, y, ξ, η . Поэтому функции

$$\begin{aligned} U_x &= \int_{\Gamma} u_x d\xi - v_x d\eta, & U_y &= \int_{\Gamma} u_y d\xi - v_y d\eta, \\ V_x &= \int_{\Gamma} v_x d\xi + u_x d\eta, & V_y &= \int_{\Gamma} v_y d\xi + u_y d\eta \end{aligned}$$

являются непрерывными функциями x, y . При этом, с учетом равенств $u_x = v_y, u_y = -v_x$, имеем

$$U_x = V_y, \quad U_y = -V_x,$$

т. е. находимся в условиях утверждения 1.4. Таким образом, $\Phi(z)$ – аналитическая функция и справедлива формула (1.48). ►

1.1.14. Существование производных любого порядка у функций, аналитических в области

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области Ω . Обозначим через Γ замкнутую кусочно-гладкую кривую, расположенную в Ω , ограничивающую односвязную подобласть области Ω , которую обозначим через Ω' . Через Ω'' обозначим некоторую подобласть Ω' , такую, чтобы $d = \inf_{\{z \in \Omega'', \zeta \in \Gamma\}} |z - \zeta| > 0$. Тогда, согласно интегралу Коши (1.45), для $z \in \Omega''$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (1.50)$$

Подынтегральная функция в (1.50) удовлетворяет условиям утверждения 1.12. Воспользуемся формулой (1.48):

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Здесь подынтегральная функция также удовлетворяет условиям утверждения 1.12. Этот процесс может быть продолжен до бесконечности. В силу произвольности Γ и Ω'' имеем следующие утверждения.

Утверждение 1.13. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области Ω . Тогда в любой точке z области

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{(n+1)}}, \quad (1.51)$$

где Γ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, ограничивающий односвязную подобласть области Ω , содержащую внутри себя точку z .

Утверждение 1.14. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывная в $\bar{\Omega}$. Тогда во всех внутренних точках области существует производная любого порядка функции $f(z)$, для которой имеет место формула (1.51).

Полученные результаты позволяют доказать два важных утверждения.

Утверждение 1.15. (Теорема Лиувилля⁶) Пусть $f(z)$ - аналитическая во всей комплексной плоскости функция и ее модуль равномерно ограничен числом M . Тогда $f(z)$ тождественно равна постоянной.

◀ На основании (1.51) запишем для производной $f'(z)$ в произвольной точке z :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}, \quad |f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(\xi)|}{R^2} ds \leq \frac{M}{R},$$

где C_R - окружность радиуса R с центром в точке z . Устремляя $R \rightarrow \infty$, замечаем, что $|f'(z)| \rightarrow 0$. В силу произвольности z , $f'(z) \equiv 0$. ►

Следующее утверждение является обратным к утверждению 1.7 (Теорема Коши).

Утверждение 1.16. (Теорема Морера⁷) Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в односвязной области Ω и интеграл по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой γ , принадлежащей области, равен нулю. Тогда $f(z)$ является аналитической в области Ω функцией.

◀ Функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi,$$

где z_0 и z - некоторые точки области и интеграл берется по произвольной кусочно-гладкой кривой, соединяющей эти точки, является аналитической функцией в области Ω . При этом $F'(z) = f(z)$. Но на основании утверждения 1.13 $F''(z) = f'(z)$ для всех $z \in \Omega$, т.е. $f(z)$ аналитическая функция. ►

⁶ Лиувиль Жозеф (фр. Joseph Liouville, 1809—1882) — французский математик. Дал строгое определение понятию элементарной функции и квадратуры, исследовал разрешимость ряда математических задач. В честь Лиувилля были названы поверхность Лиувилля и сеть Лиувилля, дробный интеграл Лиувилля, а также несколько математических теорем.

⁷ Морера Джачинто (итал. Morera Dzachinto, 1856—1909) — итальянский математик. Занимался различными вопросами рациональной механики, математической физики, математического анализа. Впервые систематически исследовал эллипсоидальные гармонические функции. Основные труды по математической физике и теории функций.

1.2. Ряды аналитических функций

1.2.1. Равномерно сходящиеся ряды

Пусть в некоторой области Ω определена последовательность $\{U_n(z)\}$ однозначных функций комплексного переменного.

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) \quad (1.52)$$

называется функциональным рядом. Если ряд сходится в каждой точке $z \in \Omega$, то ряд (1.52) называется сходящимся в области Ω . Соответствующая сумма ряда в каждой точке $z \in \Omega$ определяет однозначную функцию $f(z)$. Эта функция называется суммой ряда. Важную роль в теории рядов играет понятие равномерно сходящегося ряда.

Ряд (1.52) называется равномерно сходящимся в области Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ неравенство

$$|f(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z)| < \varepsilon$$

выполняется для всех $z \in \Omega$.

Утверждение 1.17. (Критерий Коши) Для того, чтобы ряд (1.52) равномерно сходиллся в области Ω , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ и любого m

$$|\sum_{j=n}^{n+m} U_j(z)| < \varepsilon \quad (1.53)$$

для любого $z \in \Omega$.

◀ Из равномерной сходимости (1.52) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ и любых m и $z \in \Omega$

$$|f(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(z) - \sum_{j=1}^{n+m} U_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$|\sum_{j=n}^{n+m} U_j(z)| < |\sum_{j=1}^{n+m} U_j(z) - f(z)| + |f(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z)|,$$

то имеем (1.53).

В силу выполнения критерия (1.53) в каждой точке $z \in \Omega$, ряд (1.52) поточечно сходится к некоторой функции $f(z)$. Но тогда на основании (1.53) равномерно относительно $z \in \Omega$ при $n \geq N(\varepsilon)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{j=n}^{n+m} U_j(z) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{n+m} U_i(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z) \right| = \left| f(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z) \right| < \varepsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость. ►

Утверждение 1.18. (*Признак равномерной сходимости ряда (1.52)*) Если все члены ряда (1.52) в области Ω удовлетворяют условию $|U_n(z)| \leq a_n$, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд (1.52) в области Ω сходится равномерно и абсолютно.

◄ Равномерно относительно $z \in \Omega$

$$\left| \sum_{j=n}^{\infty} U_j(z) \right| \leq \sum_{j=n}^{\infty} |U_j(z)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} a_j < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq N(\varepsilon)$ в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ►

Рассмотрим свойства равномерно сходящихся рядов.

Утверждение 1.19. Пусть функции $U_n(z)$ непрерывны в области Ω и ряд (1.52) равномерно сходится в области Ω к функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ непрерывная в Ω функция.

◄ Из равномерной сходимости (1.52) имеем

$$\left| f(z + \Delta z) - \sum_{j=1}^n U_j(z + \Delta z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| f(z) - \sum_{j=1}^n U_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.54)$$

для любого $\varepsilon > 0$, любых точек $z + \Delta z, z$ при $n \geq N(\varepsilon)$. В силу непрерывности $U_n(z)$

$$\left| \sum_{j=1}^n U_j(z + \Delta z) - \sum_{j=1}^n U_j(z) \right| \leq \sum_{j=1}^n |U_j(z + \Delta z) - U_j(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.55)$$

при $|\Delta z| < \delta$.

Объединяя неравенства (1.54) и (1.55), имеем, что при $|\Delta z| < \delta$ $|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$. ►

Утверждение 1.20. Пусть ряд непрерывных функций (1.52) равномерно сходится в области Ω к функции $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой кривой Γ , лежащей в области Ω , можно вычислить почленным интегрированием ряда (1.52), т. е.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} U_n(z)dz.$$

◀ Ввиду того, что ряд (1.52) сходится равномерно, можно для любого $\varepsilon > 0$ указать такой $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ $|\sum_{j=n}^{\infty} U_j(z)| < \varepsilon/L$, где L – длина кривой. Тогда

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\Gamma} U_j(z)dz \right| = \left| \int_{\Gamma} \sum_{j=n}^{\infty} U_j(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} \left| \sum_{j=n}^{\infty} U_j(z) \right| dz < \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. ▶

Рассмотрим теперь ряд (1.52), члены которого аналитические функции в области Ω .

Утверждение 1.21. (1я теорема Вейерштрасса⁸) Пусть $U_n(z)$ аналитические в области Ω функции, а ряд (1.52) сходится равномерно к функции $f(z)$ в любой замкнутой подобласти Ω' . Тогда $f(z)$ является аналитической в области Ω функцией; ряд $\sum_{j=1}^{\infty} U_j^{(k)}(z)$ сходится равномерно в любой подобласти Ω' области Ω ; $f^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} U_j^{(k)}(z)$.

◀ Возьмем в области Ω произвольную точку z и построим односвязную подобласть Ω' области Ω , содержащую выбранную точку. Рассмотрим интеграл от $f(z)$ по произвольной кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ , лежащей в Ω' . В силу аналитичности функций $U_n(z)$ в Ω на основании утверждений 1.7 (теорема Коши) и 1.20 имеем

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} U_n(z)dz = 0.$$

⁸ Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897) – выдающийся немецкий математик, «отец» современного математического анализа. Он заложил основы современной общей теории функций комплексного переменного и начал их систематическую разработку. Ему принадлежат важные результаты в вариационном исчислении, которое вошло в современные университетские курсы.

В силу произвольности кривой Γ на основании утверждения 1.15 (теорема Морера) $f(z)$ является аналитической функцией в области Ω' . Отсюда следует аналитичность $f(z)$ всюду в Ω . Отметим, что функция $r_n(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n U_i(z) = \sum_{i=n+1}^{\infty} U_i(z)$ является аналитической в Ω .

Рассмотрим производную подобласть $\overline{\Omega'}$ области Ω и выберем кусочно-гладкую замкнутую кривую Γ таким образом, чтобы область Ω' содержалась внутри кривой Γ и $\min_{z \in \overline{\Omega'}, \xi \in \Gamma} |z - \xi| = d > 0$. Ввиду того, что $r_n(z)$ – аналитическая функция в Ω , то для $z \in \Omega'$ имеет место равенство

$$r_n^{(k)}(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} U_j^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{r_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}.$$

В силу равномерной сходимости ряда (1.52) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ равномерно относительно $z \in \Omega$ $|r_n(z)| < \varepsilon / (k!L)2\pi d^{k+1}$, где L – длина кривой Γ . Отсюда $|r_n^{(k)}(z)| < \varepsilon$. ►

Утверждение 1.22. (2я теорема Вейерштрасса) Пусть $U_n(z)$ – аналитические функции в области Ω с кусочно-гладкой границей и непрерывные в $\overline{\Omega}$. Пусть ряд (1.52) сходится равномерно на границе Γ области Ω . Тогда ряд (1.52) равномерно сходится в $\overline{\Omega}$.

◄ Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, что для $n \geq N(\varepsilon)$ и любого $m > 0$ равномерно относительно $z \in \Gamma$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{j=n}^{n+m} U_j(z) \right| < \varepsilon. \quad (1.56)$$

В силу утверждения 1.11 (принцип максимума модуля аналитической функции) неравенство (1.56) справедливо для $z \in \overline{\Omega}$. ►

1.2.2. Степенные ряды. Ряд Тейлора

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.57)$$

где z_0 – фиксированная точка, c_n – некоторые комплексные числа. Ряд вида (1.57) называется степенным.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.23. (Теорема Абеля⁹) Пусть степенной ряд (1.57) сходится в некоторой точке $z = z_1$. Тогда он абсолютно сходится в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. При этом в круге $|z - z_0| \leq \rho$, где $\rho < |z_1 - z_0|$, ряд (1.57) сходится равномерно.

◀ Выберем точку z , удовлетворяющую условию $|z - z_0| = q|z_1 - z_0|$, $q < 1$. Так как ряд (1.57) сходится в точке z_1 , то $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z_1 - z_0) = 0$. Следовательно, существует $M > 0$, что $|c_n||z_1 - z_0|^n \leq M$, или $|c_n| \leq M/|z_1 - z_0|^n$, отсюда

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z - z_0|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |z - z_0|^n / |z_1 - z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty. \quad (1.58)$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (1.57) в круге $|z - z_0| \leq \rho$ достаточно заметить, что (1.58) выполнено для всех z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$. ►

Следствие. Если ряд (1.57) расходится в точке $z_1 \neq z_0$. Тогда ряд (1.57) расходится во всех точках z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Действительно, предположив противное, т. е. сходимость ряда (1.57) хотя бы в одной точке z_2 , $|z_2 - z_0| > |z_1 - z_0|$, приходим к противоречию. Согласно утверждению 1.23 ряд (1.57) сходится во всех точках z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$, т. е. и в точке z_1 .

Область $|z - z_0| < R$, ($R > 0$) называется кругом сходимости ряда (1.57), если во всех точках z , удовлетворяющих этому неравенству, ряд (1.57) сходится, а в точках z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| > R$, расходится.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда (1.57).

Отметим, что в точках z , удовлетворяющих условию $|z - z_0| = R$, ряд (1.57) может как сходиться, так и расходиться.

Утверждение 1.24. (Формула Коши-Адамара¹⁰) Радиус сходимости ряда (1.57) определяется формулой

$$R = \frac{1}{l}, \quad l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (1.59)$$

⁹ Абель Нильс Хенрик (норв. Niels Henrik Abel, 1802–1829) — норвежский математик. Основатель теории эллиптических и гиперэллиптических функций, в которую внес большой вклад, а также общей теории интегралов алгебраических функций. Другие важные работы Абеля относятся к теории рядов.

¹⁰ Адамар Жак Саломон (фр. Jacques Salomon Hadamard, 1865–1963) — французский математик и механик. Автор множества фундаментальных работ по алгебре, геометрии, функциональному анализу, дифференциальной геометрии, математической физике, топологии, теории вероятностей, механике, гидродинамике.

◀ Пусть сначала $0 < l < \infty$. Из (1.59) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$. Выберем точку z_1 , удовлетворяющую неравенству $|z_1 - z_0| < 1/l$, и выберем $\varepsilon = (1 - l|z_1 - z_0|)/(2|z_1 - z_0|)$. Имеем неравенство $\sqrt[n]{|c_n|}|z_1 - z_0| < (l + \varepsilon)|z_1 - z_0| = (1 + l|z_1 - z_0|)/2 = q < 1$. Отсюда следует, что члены ряда (1.57) мажорируются геометрической прогрессией со знаменателем $q < 1$. Таким образом, ряд (1.57) в точке z_1 сходится.

Взяв теперь точку z_2 , удовлетворяющую условию $|z_2 - z_0| > 1/l$, и выбрав $\varepsilon = (l|z_2 - z_0| - 1)/|z_2 - z_0| > 0$, получим, что $\sqrt[n]{|c_n|}|z_2 - z_0| > (l - \varepsilon)|z_2 - z_0| = 1$ для бесконечного числа значений n . Отсюда следует расходимость ряда (1.57) в точке z_2 .

При $l = 0$ ряд (1.57) сходится в любой точке z комплексной плоскости. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geq N(\varepsilon)$ $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$. Отсюда, выбрав в качестве $\varepsilon = q/|z - z_0|$, $q < 1$, получим $|c_n||z - z_0|^n < q^n$, что и доказывает сходимость (1.57) в точке z .

При $l = \infty$ ряд (1.57) расходится в любой точке $z \neq z_0$. Согласно (1.59) существует бесконечно много коэффициентов c_n таких, что $\sqrt[n]{|c_n|} > M$ для любого $M > 0$. Выбрав M таким образом, чтобы $M|z - z_0| = q > 1$, имеем для бесконечного числа членов $|c_n(z - z_0)^n| > 1$, что и доказывает расходимость ряда (1.57) в точке z . ▶

Отметим, что функция $f(z)$, к которой сходится степенной ряд (1.57), на основании утверждения (1.21) является аналитической функцией внутри круга сходимости $|z - z_0| < R$. При этом для коэффициентов ряда (1.57) справедливо выражение

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (1.60)$$

Для получения формулы (1.60) необходимо вычислить n -ю производную от ряда (1.57) и перейти к пределу при $z \rightarrow z_0$.

Утверждение 1.25. (Ряд Тейлора¹¹.) Функция $f(z)$, аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$, может быть представлена в этом круге степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (1.61)$$

¹¹ Тейлор Брук (англ. Brook Taylor, 1685—1731) — английский математик. Нашёл общую формулу для разложения функций в степенные ряды, положил начало математическому изучению задачи о колебании струны, ему принадлежат заслуги в разработке теории конечных разностей. Он также автор работ о перспективе, центре качания, полёте снарядов, взаимодействии магнитов, капиллярности и др. К концу жизни занимался вопросами философии.

Такое представление единственно.

◀ Выберем точку z внутри круга $|z - z_0| < R$ и построим окружность Γ_ρ радиуса ρ с центром в точке z_0 так, чтобы $|z - z_0| < \rho < R$. Представим $f(z)$ в этой точке согласно (1.45) (интеграл Коши):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (1.62)$$

Преобразуем

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\xi - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n}. \quad (1.63)$$

Так как $(z - z_0)/(\xi - z_0) < 1$ при $\xi \in \Gamma_\rho$, то ряд (1.63) сходится равномерно относительно $\xi \in \Gamma_\rho$. Подставим представление (1.63) в (1.62) и проинтегрируем почленно. В результате получим ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \quad (1.64)$$

В (1.64) окружность Γ_ρ может быть заменена любым замкнутым контуром δ , лежащим в круге $|z - z_0| < R$ и содержащим внутри себя точку z . Сравнивая (1.64) с (1.51), имеем $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. Для доказательства единственности представления (1.61) предположим противное, т. е. существует еще одно представление (1.61) с коэффициентами $c'_n \neq c_n$. При этом соответствующий степенной ряд сходится внутри круга $|z - z_0| < R$ к аналитической функции $f(z)$. Но тогда $c'_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, что совпадает с c_n . ►

Следствие. (Неравенство Коши) Пусть $|f(z)| < M$ при $|z - z_0| < R$. Тогда имеют место неравенства

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1.65)$$

Действительно, согласно (1.64)

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{|f(\xi)| ds}{\rho^{n+1}}.$$

Так как последнее неравенство выполнено для всех $\rho < R$, то имеем (1.65).

Следствие. Если $f(z)$ – аналитическая в области Ω функция и $z_0 \in \Omega$, то радиус сходимости ряда (1.64) не меньше расстояния от точки z_0 до границы области Ω .

Следующий пример подтверждает следствие. Рассмотрим функцию $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$, которая является аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z_{1,2} = \pm i$. Взяв в качестве $z_0 = 0$, имеем

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

и $R = 1$ – расстояние от z_0 до точек $z_{1,2}$.

Возьмем в качестве $z_0 = 1$ и найдем разложение $f(z)$ по степеням $(z - 1)$. Представим

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + z^2} &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i} - \frac{1}{z + i} \right), \\ \frac{1}{z \pm i} &= \frac{1}{z - 1 + 1 \pm i} = \frac{1}{1 \pm i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - 1)^n}{(1 \pm i)^n}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(1 - i)^{n+1}} - \frac{1}{(1 + i)^{n+1}} \right] (z - 1)^n.$$

Так как $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, то имеем

$$\frac{1}{1 + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin((n+1)\pi/4)}{2^{(n+1)/2}} (z - 1)^n. \quad (1.66)$$

Согласно (1.59) для ряда (1.66) $R = \sqrt{2}$, т. е. равен расстоянию от точки z_0 до точек $z_{1,2}$.

1.2.3. Нули аналитической функции. Единственность представления аналитической функции

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области Ω . Точка $z_0 \in \Omega$ называется нулем функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Из представления (1.61) $f(z)$ в окрестности z_0 следует, что $c_0 = 0$. Если не только c_0 , но и $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$, а $c_k \neq 0$, то точка z_0 называется нулем функции $f(z)$

кратности k . Согласно (1.61) в этом случае $f^{(j)}(z_0) = 0$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ и ряд (1.61) примет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \phi(z), \phi(z_0) \neq 0.$$

Утверждение 1.26. Пусть $f(z)$ – аналитическая в области Ω функция, обращающаяся в ноль в точках z_n ($n = 1, 2, \dots$). Если последовательность z_n сходится к точке $z_0 \in \Omega$, то $f(z) \equiv 0$ в области Ω .

◀ Представим $f(z)$ в окрестности точки z_0 сходящимся рядом Тейлора, вида (1.61), радиус сходимости которого $R > 0$ не меньше расстояния от точки z_0 до границы области Ω . Из непрерывности $f(z)$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0) = 0$. Следовательно, в (1.61) $c_0 = 0$. Представим $f(z) = (z-z_0)f_1(z)$, где $f_1(z)$ – непрерывная в точке z_0 функция. Т. к. $f(z_n) = (z_n - z_0)f_1(z_n) = 0$, то $f_1(z_n) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(z_n) = 0$. Следовательно, в (1.61) $c_1 = 0$ и $f(z) = (z-z_0)^2 f_2(z)$. Продолжая этот процесс, получим, что в (1.61) все $c_n = 0$. Отсюда следует, что $f(z) \equiv 0$ при всех $z \in \Omega$.

Пусть z_* – произвольная точка Ω . Проведем кривую σ , соединяющую точки z_0 и z_* и лежащую в Ω . Обозначим z_{**} точку пересечения окружности радиуса R с центром в точке z_0 и кривой σ . В этой точке $f(z_{**}) = 0$. Выберем некоторую последовательность точек z_{*n} , $|z_{*n} - z_0| < R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{*n} = z_{**}$. Представив теперь $f(z)$ в окрестности точки z_{**} рядом Тейлора вида (1.61), заметим, что этот ряд имеет радиус сходимости $R_* > 0$. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что $f'(z) \equiv 0$ при $|z - z_{**}| < R_*$. Продолжая описанный процесс, дойдем до точки z_* . Ввиду компактности кривой σ в Ω , этот процесс имеет конечное число шагов. ►

Следствие. Если $f(z)$ – аналитическая в области Ω функция и $z_0 \in \Omega$, в любой ограниченной замкнутой подобласти $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ функция $f(z)$ может иметь лишь конечное число нулей. $f(z)$ может иметь бесконечное число нулей лишь в открытой или неограниченной области.

Функция, аналитическая во всей открытой комплексной плоскости ($z \neq \infty$), называется целой функцией комплексного переменного. Целая функция в любой ограниченной области может иметь лишь конечное число нулей.

Утверждение 1.27. (Теорема единственности аналитической функции) Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в области Ω . Если в области Ω существует последовательность точек z_n ($n = 1, 2, \dots$),

сходящаяся к $z_0 \in \Omega$, и значения $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в этих точках совпадают, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

◀ Доказательство опирается на утверждение 1.26. Положим $u(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Имеем $u(z_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Отсюда $u(z) \equiv 0$ для $z \in \Omega$. ▶

Следствие. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно и совпадающие в области $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_0 \neq \emptyset$. Тогда существует единственная аналитическая в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ функция $f(z)$ такая, что

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \Omega_1, \\ f_2(z), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Функция $f_2(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ на области Ω_2 , и, наоборот, $f_1(z)$ - аналитическое продолжение $f_2(z)$ на Ω_1 .

1.2.4. Аналитическое продолжение функций с вещественной оси комплексной плоскости

Пусть на отрезке $[a, b]$ вещественной оси задана непрерывная функция $f(x)$ вещественной переменной. В силу утверждения 1.27 в некоторой области Ω комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a, b]$, может существовать лишь одна аналитическая функция $f(z)$, совпадающая на $[a, b]$ с функцией $f(x)$. При этом функцию $f(z)$ называют аналитическим продолжением функции $f(x)$ в комплексную область Ω .

Простейшим примером такого продолжения будут функции:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (1.67)$$

которые совпадают с e^x , $\cos x$, $\sin x$ на вещественной оси, являются их аналитическими продолжениями на комплексную плоскость и представлены рядами Тейлора (см. утверждение 1.25) с разложением в окрестности точки $z_0 = 0$. Радиус сходимости рядов (1.67) $R = \infty$. Представления (1.67) могут служить определением соответствующих функций, отличным от определений используемых в 1.1.11.

Рассмотрим еще одну функцию:

$$\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}. \quad (1.68)$$

Ряд, стоящий в (1.68), имеет радиус сходимости $R = 1$ и представляет собой ряд Тейлора функции $\ln z$ в окрестности точки $z_0 = 1$. На вещественной оси (1.68) совпадает с функцией $\ln x$ при $0 < x < 2$ и является ее аналитическим продолжением на область $|z - 1| < 1$.

1.2.5. Аналитическое продолжение многозначной функции. Понятие римановой поверхности

Утверждение 1.28. Пусть заданы две области Ω_1 и Ω_2 , $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, имеющие один общий кусок границы σ , представляющий собой кусочно-гладкую кривую. Пусть в этих областях заданы аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, которые непрерывны в $\Omega_1 \cup \sigma$ и $\Omega_2 \cup \sigma$ соответственно, и $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в точках кривой σ . Тогда $f_1(z)$ является аналитическим продолжением функции $f_2(z)$ на область Ω_1 , и наоборот.

◀ Функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), z \in \Omega_1, \\ f_2(z), z \in \Omega_2, \\ f_1(z) = f_2(z), z \in \sigma \end{cases} \quad (1.69)$$

является непрерывной функцией в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \sigma$. Покажем, что интеграл от этой функции по любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ , лежащей в области Ω , равен нулю. Если Γ лежит в Ω_1 , то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f_1(z) dz = 0. \quad (1.70)$$

Такая же ситуация, если Γ лежит в Ω_2 . Пусть Γ лежит и в Ω_1 , и в Ω_2 . Обозначим через σ_0 кусок кривой σ , лежащий в области Ω' , ограниченной кривой σ , через Γ_1 и Γ_2 куски кривой Γ , лежащие в Ω_1 и Ω_2 соответственно. Тогда на основании следствия к утверждению 1.7 имеем

$$\int_{\Gamma_1 \cup \sigma_0} f_1(z) dz = \int_{\Gamma_2 \cup \sigma_0} f_2(z) dz = 0,$$

но, т. к. кривая σ_0 в первом и втором интегралах проходится в разных направлениях, с учетом (1.70) получим

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1 \cup \sigma_0} f(z) dz + \int_{\Gamma_2 \cup \sigma_0} f(z) dz = 0.$$

В силу произвольности кривой Γ , осталось сослаться на утверждение 1.16 (Теорема Морера). ►

Доказанное утверждение означает, что если аналитическая функция является непрерывным продолжением аналитической функции через кусочно-гладкую кривую σ , то она является и аналитическим ее продолжением. В случае функций вещественного переменного это не так.

Рассмотрим функцию $w = \sqrt{z}$ с точки зрения аналитического продолжения, используя утверждение 1.28.

В 1.1.11 уже рассматривалась эта функция, где было показано, что для любого $z = \rho e^{i\phi}$, $0 \leq \phi < 2\pi$ функция $w = \sqrt{z}$ имеет две ветви:

$$w_0(z) = \rho^{1/2} e^{i\phi/2}, \quad w_1(z) = \rho^{1/2} e^{i(\phi/2+\pi)}.$$

Выберем ветвь $w_0(z)$. Она является аналитическим продолжением вещественной функции $w = \sqrt{x}$, $x > 0$. Областью определения функции $w_0(z)$ является область $\overline{\Omega}_0$, представляющая собой плоскость, разрезанную по положительной части вещественной оси. Верхний берег разреза ($\arg z = 0$) является одной границей области $\overline{\Omega}_0$, нижний берег ($\arg z = 2\pi$) – другой границей. Область $\overline{\Omega}_0$ отображением $w_0(z)$ непрерывно отображается в верхнюю замкнутую полуплоскость w ($0 \leq \arg w \leq \pi$) и является в $\overline{\Omega}_0$ аналитической функцией. Действительно, для $w_0(z) = w_0(\rho, \phi) = u(\rho, \phi) + iv(\rho, \phi) = \rho^{1/2} \cos(\phi/2) + i\rho^{1/2} \sin(\phi/2)$. Выполнены условия Коши–Римана:

$$\rho u_\rho = v_\phi, \quad \rho v_\rho = -u_\phi \quad (0 \leq \rho < \infty, \quad 0 < \phi < 2\pi). \quad (1.71)$$

При этом производные в (1.71) непрерывные.

Рассмотрим область $\overline{\Omega}_1$, которая представляет собой такую же плоскость с разрезом по положительной части вещественной оси, но аргумент z изменяется от 2π до 4π . При этом верхний берег разреза плоскости ($\arg z = 2\pi$) соответствует одной границе области $\overline{\Omega}_1$, нижний берег ($\arg z = 4\pi$) – другой границе. Рассмотрим функцию $w_1(z)$, которая взаимно однозначно отображает область $\overline{\Omega}_1$ на область $\pi \leq \arg w \leq 2\pi$ в плоскости w (нижнюю полуплоскость). Функция $w_1(z)$ является аналитической в $\overline{\Omega}_1$. Области Ω_0 и Ω_1 имеют общую границу Γ_{01} – луч $\arg z = 2\pi$, на которой $w_0(z) = w_1(z)$. Поэтому на основании утверждения 1.28 функция

$$w(z) = \begin{cases} w_0(z), & z \in \Omega_0 \cup \Gamma_{01}, \\ w_1(z), & z \in \Omega_1 \cup \Gamma_{01} \end{cases} \quad (1.72)$$

является аналитической функцией в области $\Omega_0 \cup \Gamma_{01} \cup \Omega_1$. У этой области остались свободными две границы: у области Ω_0 – луч $\arg z = 0$, у области

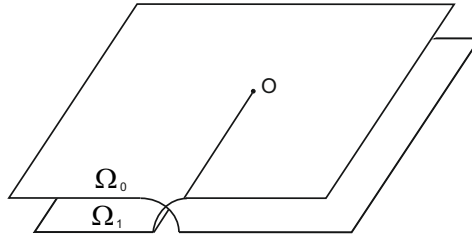


Рис. 1.3. Риманово многообразие

Ω_1 – луч $\arg z = 4\pi$. Значения функций $w_0(z)$ и $w_1(z)$ на этих лучах совпадают. Склеив эти лучи, получим границу Γ_{10} и непрерывное замкнутое многообразие $R = \Omega_0 \cup \Gamma_{01} \cup \Omega_1 \cup \Gamma_{10}$ (см. рис. 1.3), которое называется полным римановым многообразием функции $w = \sqrt{z}$, определенной согласно (1.71) с непрерывным продолжением на луч Γ_{10} . При этом точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются точками разветвления функции $w(z)$ (см. п.1.1.11).

Рассмотрим еще один механизм аналитического продолжения аналитической функции за границу области определения. Пусть в области Ω_1 задана аналитическая функция $f_1(z)$. Выберем некоторую точку $z_1 \in \Omega_1$ и разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности этой точки. Вычислим радиус сходимости этого ряда R_1 . Возможны два случая: в первом – радиус сходимости может оказаться меньше или равным расстоянию до границы Γ_1 области Ω_1 , во втором – больше этой величины. Рассмотрим второй случай. Обозначим K_{R_1} круг $|z - z_1| < R_1$. Функцию, определенную в этом круге рядом Тейлора, естественно считать аналитическим продолжением $f_1(z)$ на всю область $\Omega_2 = \Omega_1 \cup K_{R_1}$ и обозначить $f_2(z)$. Выберем теперь точку $z_2 \in \Omega_2 \setminus \Omega_1$ и представим $f_2(z)$ в окрестности z_2 рядом Тейлора. Вычислим его радиус сходимости R_2 . Также возможны два случая: в первом R_2 меньше расстояния до границы Γ_2 области Ω_2 , во втором – R_2 больше этого расстояния. Рассмотрев второй случай, построим область $\Omega_3 = \Omega_2 \cup K_{R_2}$ и определим в Ω_3 функцию $f_3(z)$ исходя из ряда Тейлора в окрестности некоторой z_2 . $f_3(z)$ является аналитическим продолжением $f_2(z)$. Продолжая этот процесс в различных направлениях, получим максимально возможную область определения аналитической функции, которая может оказаться как всей комплексной плоскостью (или ее частью), так и римановым многообра-

зием. При этом получим максимальное аналитическое расширение исходной функции.

Функция $f(z)$, полученная путем аналитического продолжения вдоль всевозможных цепочек областей, выходящих из первоначальной области Ω_1 аналитической функции $f_1(z)$, называется полной аналитической функцией, а ее область определения R – естественной областью определения полной аналитической функции.

Для аналитической функции выделяют правильные и особые точки.

Пусть $f(z)$ определена в области Ω , имеющей границу Γ .

Точка $z_0 \in \Omega$ называется правильной для функции $f(z)$, если существует такое $\rho(z_0) > 0$ и степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, сходящийся в круге $|z - z_0| < \rho(z_0)$ к функции $f(z)$.

Точка $z_0 \in \bar{\Omega}$, не являющаяся правильной, называется особой.

Все точки аналитической в области Ω функции являются правильными, на границе области Ω могут быть как правильные, так и особые точки.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1.29. *На границе круга K_R сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ существует хотя бы одна особая точка функции $f(z)$, к которой этот ряд сходится.*

◀ Предположим противное, что все точки границы Γ круга K_R правильные. Выберем произвольную точку $z_1 \in \Gamma$. Тогда существует $\rho(z_1) > 0$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^1(z - z_1)^n$, сходящийся в $K_{\rho_1} = \{z : |z - z_1| < \rho(z_1)\}$, а в $K_R \cup K_{\rho_1}$ к $f(z)$. Выбирая произвольные точки z_j на окружности, покроем окружность пересекающимися кругами K_{ρ_j} . Так как Γ – компактное множество, таких кругов будет конечное число. В связи с этим функция $\rho(z)$ будет равномерно непрерывной, а, следовательно, $\min_{z \in \Gamma} \rho(z) = \rho_0 > 0$. В кругах K_{ρ_j} определены функции $f_j(z)$, являющиеся аналитическим продолжением $f(z)$. Таким образом, в круге $|z - z_0| < R + \rho_0$ определена аналитическая функция $F(z)$, являющаяся аналитическим продолжением $f(z)$. В силу единственности представления аналитической функции рядом Тейлора, радиус его сходимости не может быть меньше $R + \rho_0$. Получили противоречие. ►

Таким образом, радиус круга сходимости степенного ряда определяется расстоянием от центра круга до ближайшей особой точки аналитической функции, к которой этот ряд сходится.

1.3. Изолированные особые точки. Ряд Лорана. Теория вычетов

1.3.1. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

Точка z_0 ($z_0 \neq \infty$) называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ – аналитическая функция в кольце $0 < |z - z_0| < R$, а точка z_0 является особой точкой функции $f(z)$.

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1.30. Пусть $f(z)$ – аналитическая в кольце $K_{R_1 R_2} = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ функция. Тогда $f(z)$ может быть представлена в этом кольце сходящимся рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (1.73)$$

Разложение (1.73) единственно. Ряд (1.73) называется рядом Лорана¹².

◀ Выберем точку $z \in K_{R_1 R_2}$. Построим в $K_{R_1 R_2}$ две окружности $\Gamma_{R'_1}$ и $\Gamma_{R'_2}$ с центром в точке z_0 радиуса $R'_1 > R_1$ и $R'_2 < R_2$ таким образом, чтобы точка z принадлежала кольцу $K_{R'_1 R'_2}$. Согласно интегралу Коши (1.45)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_1}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_2}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (1.74)$$

В первом интеграле (1.74), с учетом $|\zeta - z_0|/|z - z_0| < 1$, представим

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z - z_0) [1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0)]} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (1.75)$$

а во втором, с учетом неравенства $|z - z_0|/|\zeta - z_0| < 1$, —

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) [1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \quad (1.76)$$

¹² Лоран Пьер Альфонс (фр. Pierre Alphonse Laurent, 1813—1854) – французский математик, по профессии военный инженер. Основные труды относятся к теории аналитических функций комплексного переменного.

Подставим выражения (1.75) и (1.76) в (1.74) и выполним почленное интегрирование. Это возможно делать, так как ряды сходятся равномерно относительно ζ . В результате получим представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_1}} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_2}} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (1.77)$$

в котором ряды сходятся.

Обозначив

$$\begin{aligned} c_n^1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_1}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, \dots), \\ c_n^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'_2}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n d\zeta \quad (n = 0, -1, \dots), \end{aligned} \quad (1.78)$$

заметим, что коэффициенты (1.78) могут быть объединены единой формулой

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (1.79)$$

где Γ — произвольная окружность радиуса R : $R_1 < R < R_2$, а ряд (1.77) записан в виде (1.73). В силу произвольности z , ряд (1.73), в котором c_n определены согласно (1.79), сходится для любого $z \in K_{R_1 R_2}$, причем для $z \in \overline{K_{R'_1 R'_2}}$ — равномерно.

Покажем единственность представления (1.73). Предположим, что существует еще одно разложение, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z - z_0)^n. \quad (1.80)$$

Умножая обе части равенства на $(z - z_0)^{-k-1}$ и интегрируя по произвольной окружности с центром в z_0 , лежащей внутри $K_{R_1 R_2}$, получим, что $c_k = c'_k$ ($k = 0, \pm 1, \dots$). ►

Согласно утверждению 1.30 функцию $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки, т. е. в кольце $0 < |z - z_0| < R$, можно представить рядом Лорана (1.73), который равномерно сходится к $f(z)$ в любом кольце $0 < < R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2 < R$.

При этом возможны следующие случаи.

а. Полученный ряд (1.73) не имеет членов с отрицательными степенями, т. е. $c_n = 0$ ($n = -1, -2, \dots$). Такая особая точка z_0 называется устранимой особой точкой.

б. Ряд (1.73) содержит конечное число членов с отрицательными степенями, т. е. $c_n = 0$ ($n = -k-1, -k-2, \dots$), $c_{-k} \neq 0$. Такая особая точка z_0 функции $f(z)$ называется полюсом порядка k .

в. Ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями. Такая особая точка z_0 функции $f(z)$ называется существенно особой точкой.

Рассмотрим поведение функции $f(z)$ в окрестности в каждом из перечисленных случаев.

В первом случае, как следует из (1.73), $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, $|c_0| < \infty$. Таким образом, функция $f(z)$ ограничена в кольце $0 \leq |z - z_0| < R$. Доопределим $f(z)$ в точке z_0 как $f(z) = c_0$, получим аналитическую функцию.

Имеет место и обратное утверждение.

Утверждение 1.31. Пусть $f(z)$ — аналитическая и ограниченная ($|f(z)| \leq M$) в круговом кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция. Тогда z_0 — устранимая особая точка.

◀ Представим $f(z)$ рядом Лорана (1.73), в котором коэффициенты определены согласно (1.79). С учетом условий утверждения имеем

$$|c_n| \leq M \cdot R^{-n}. \quad (1.81)$$

Рассматривая коэффициенты с отрицательными n и учитывая их независимость от R , замечаем, что $c_n = 0$ при всех $n < 0$. ▶

Рассмотрим теперь второй случай, когда z_0 является полюсом порядка k . В этом случае поведение $f(z)$ в окрестности z_0 определяет следующее утверждение.

Утверждение 1.32. Если точка z_0 является полюсом порядка k функции $f(z)$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Обратно, если $f(z)$ — аналитическая в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция и $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, то z_0 — особая точка функции $f(z)$, являющаяся полюсом.

◀ Представим $f(z)$ в окрестности z_0 рядом (1.73). В результате имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \\ &= (z - z_0)^{-k} [c_{-k} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1}] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Т. к. $c_{-k} \neq 0$, из представления (1.82) следует, что $|f(z)| \rightarrow \infty$ при любом стремлении $z \rightarrow z_0$, что и доказывает первую часть утверждения.

Из условия теоремы следует, что для любого числа A существует такое $\delta > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ $|f(z)| > A$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/f(z)$. Для $g(z)$ $\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = 0$, т. е. z_0 — устранимая особая точка функции $g(z)$, поэтому $g(z) = (z - z_0)^m p(z)$, $p(z_0) \neq 0$, где m — порядок нуля функции $g(z)$. Тогда $f(z) = 1/g(z) = 1/(z - z_0)^m \cdot p_1(z)$ ($p_1(z) = 1/p(z)$, $p_1(z_0) \neq 0$), т. е. z_0 — полюс порядка m функции $f(z)$. ►

Рассмотрим случай, когда z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Поведение функции $f(z)$ в окрестности такой точки определяет следующее утверждение.

Утверждение 1.33. (Теорема Сохоцкого¹³) Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа A (конечного или бесконечного) существует последовательность точек z_n ($n = 1, 2, \dots$), $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ такая, что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z_n) = A$.

◄ Пусть A конечно. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $|z - z_0| < \delta$, в которой найдется точка z_1 такая, что $|f(z_1) - A| < \varepsilon$ (в случае конечного A), $|f(z_1)| > \varepsilon^{-1}$ (в случае $A = \infty$). Предположим противное — утверждение неверно. Таким образом, при заданном A нашлось $\varepsilon > 0$, что во всех точках $|z - z_0| < \delta$, $|f(z) - A| > \varepsilon$. Рассмотрим функцию $g(z) = 1/(f(z) - A)$. В силу сделанных предположений $|g(z)|$ ограничена при $|z - z_0| < \delta$ и является аналитической в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, т. е. z_0 — устранимая особая точка функции $g(z)$. Это означает, что $g(z) = (z - z_0)^m p(z)$, $p(z_0) \neq 0$, $m \geq 0$. Отсюда следует, что $f(z) = (z - z_0)^{-m} p_1(z)$, $p_1(z_0) = p(z_0)^{-1} \neq 0$, т. е. точка z_0 является либо правильной точкой, либо полюсом порядка m , что противоречит условиям утверждения. Случай $A = \infty$ доказывается аналогично. ►

Остановимся на вопросе поведения функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Отметим, что преобразование $w = 1/z$ переводит окрестность точки $z = \infty$ в окрестность точки $w = 0$, для которой достаточно применить рассмотренную классификацию.

¹³ Сохоцкий Юлиан Васильевич (1842—1927) — русский математик польского происхождения. Профессор математики в Санкт-Петербургском университете. Основные труды по теории функций комплексного переменного. Сформулировал и доказал теорему о поведении аналитических функций в окрестности существенно особой точки, изучил граничные значения интегралов типа интеграла Коши при весьма общих условиях. Последние результаты имеют важное значение для приложений к механике.

1.3.2. Вычет функции в изолированной особой точке

Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое $\text{res}(f(z), z_0)$ (*residue* — остаток) и определяемое по следующей формуле:

$$\text{res}(f(z), z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (1.83)$$

в которой интеграл берется в положительном направлении по любой замкнутой кривой γ , лежащей в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащей точку z_0 внутри себя.

Заметим, что согласно формуле (1.79), определяющей коэффициенты ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 , $\text{res}(f(z), z_0) = c_{-1}$. Отсюда следует, что вычет в устранимой особой точке равен нулю. Рассмотрим способ определения вычета в точке z_0 , являющейся полюсом порядка k . В окрестности этой точки справедливо разложение

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots \quad (1.84)$$

Умножим обе части равенства (1.84) на $(z - z_0)^k$ и вычислим от них производные порядка $k - 1$. Перейдя теперь к пределам при $z \rightarrow z_0$ от обеих частей полученного равенства, будем иметь следующую формулу для определения вычета функции $f(z)$ в точке z_0 :

$$\text{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (1.85)$$

В случае, если точка z_0 является полюсом первого порядка и функция имеет вид $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, то (1.85) примет следующий простой вид:

$$\text{res}(f(z), z_0) = \varphi(z_0)/\psi'(z_0). \quad (1.86)$$

Применение теории вычетов основывается на следующем утверждении.

Утверждение 1.34. (Теорема Коши. Основная теорема теории вычетов) Пусть функция $f(z)$ является аналитической в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_1, \dots, z_n , лежащих внутри Ω , и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Тогда

$$\int_{\Gamma_+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{res}(f(z), z_j). \quad (1.87)$$

Здесь Γ_+ — полная граница Ω , обходимая в положительном направлении.

◀ Проведем из каждой особой точки z_j окружность $C_j = \{z: |z - z_j| = \rho_j\}$ малого радиуса таким образом, чтобы соответствующие круги K_j принадлежали Ω и не пересекались между собой. В области $\Omega' = \Omega \setminus \left\{ \bigcup_{j=1}^n K_j \right\}$ функция $f(z)$ является аналитической и непрерывной в $\overline{\Omega'}$, границу которой обозначим Γ' . На основании утверждения 1.8

$$\int_{\Gamma'_+} f(z)dz = \int_{\Gamma_+} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \int_{C_{j-}} f(z)dz = 0. \quad (1.88)$$

В (1.88) граница C_j обходится в отрицательном направлении, т. е. оставляя область слева. Перенеся во втором равенстве (1.88) сумму в правую часть с учетом (1.83), получим формулу (1.87). ▶

Пусть $z = \infty$ является изолированной особой точкой.

Вычетом $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется комплексное число:

$$\operatorname{res}(f(z), \infty) = - \int_{\Gamma_+} f(z)dz, \quad (1.89)$$

где Γ_+ — произвольный замкнутый контур, вне которого $f(z)$ — аналитическая функция, и не имеет изолированных особых точек, отличных от $z = \infty$.

Справедливо следующее, легко доказываемое на основании (1.87), (1.89), утверждение.

Утверждение 1.35. Пусть $f(z)$ — аналитическая во всей комплексной плоскости функция, за исключением конечного числа изолированных точек z_k ($k = 1, \dots, n$), включая $z_n = \infty$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{res}(f(z_j), z_j) = 0.$$

1.3.3. Логарифмический вычет

Пусть в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ задана аналитическая функция $f(z)$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_j ($j = 1, \dots, n$), являющихся полюсами. Предположим, что на Γ нет ни нулей, ни особых точек функции $f(z)$.

Функцию

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = f'(z)/f(z) \quad (1.90)$$

называют логарифмической производной $f(z)$, а вычет $\varphi(z)$ в ее особых точках — логарифмическим вычетом функции $f(z)$.

Найдем значение вычета функции $\varphi(z)$ в ее особых точках, принадлежащих Ω . Особыми точками $\varphi(z)$ являются, как следует из (1.90), нули функции $f(z)$ z_j^* ($j = 1, \dots, n$) и ее полюсы z_j ($j = 1, \dots, p$).

Пусть точка z_j^* является нулем порядка n_j функции $f(z)$. Функцию $f(z)$ в окрестности z_j^* представим в виде

$$f(z) = (z - z_j^*)^{n_j} f_1(z) \quad f_1(z_j^*) \neq 0. \quad (1.91)$$

Отсюда функция $\varphi(z)$ в окрестности точки z_j^* имеет вид

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = n_j (\ln(z - z_j^*))' + (\ln f_1(z))' = \frac{n_j}{z - z_j^*} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Таким образом, точка z_j^* является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, а ее вычет в этой точке равен n_j :

$$\text{res}(f'(z)/f(z), z_j^*) = n_j, \quad (1.92)$$

т. е. порядку нуля функции $f(z)$.

Пусть z_j является полюсом порядка p_j функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{(z - z_j)^{p_j}}, \quad f_1(z_j) \neq 0.$$

Для логарифмической производной в окрестности точки z_j получим выражение

$$\varphi(z) = (\ln f(z))' = -\frac{p_j}{z - z_j} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Таким образом, точка z_j является полюсом первого порядка функции $\varphi(z)$, а ее вычет в этой точке равен $-p_j$:

$$\text{res}(f'(z)/f(z), z_j) = -p_j. \quad (1.93)$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

Утверждение 1.36. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ всюду, за исключением

изолированных особых точек z_j ($j = 1, \dots, p$), которые являются полюсами, и непрерывной в $\bar{\Omega}$ вместе с $f'(z)$. Пусть на границе Γ нет нулей функции. Тогда разность между полным числом нулей $N = \sum_{j=1}^n n_j$ и полным числом полюсов $P = \sum_{j=1}^p p_j$ функции $f(z)$ определяется выражением

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f'(z)dz}{f(z)}. \quad (1.94)$$

◀Доказательство утверждения непосредственно вытекает из формул (1.92) и (1.93). ▶

Выясним геометрический смысл правой части равенства (1.94):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} d(\ln f(z)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} d(\ln |f(z)|) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} d \operatorname{Arg} (f(z)). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Здесь и в дальнейшем под функцией $\operatorname{Arg} z$ будем понимать ту непрерывную ветвь счетнозначной функции (1.2), которая в начальный момент соответствует функции $\arg z$. При обходе по замкнутой кривой Γ в положительном направлении значение функции $\ln |f(z)|$ возвращается в первоначальное, поэтому первый интеграл равен нулю. Значение функции $\operatorname{Arg} f(z)$ при обходе по замкнутой кривой может отличаться от первоначального. Величина

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} d \operatorname{Arg} (f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} (f(z))$$

определяет полное изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе по замкнутой кривой Γ в положительном направлении, деленное на 2π . Геометрически – это число оборотов на плоскости вокруг точки $w = 0$ вектора $w = f(z)$ при полном обходе Γ . Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 1.37. (Принцип аргумента) Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ , за исключением точек z_j ($j = 1, \dots, p$), которые являются полюсами, и непрерывная вместе с $f'(z)$ в области $\bar{\Omega}$. Пусть на границе Γ нет нулей функции

$f(z)$. Тогда разность между полным числом нулей и полным числом полюсов функции $f(z)$ в области Ω равно числу оборотов вектора $w = f(z)$ при обходе переменной z границы Γ в положительном направлении, т. е.

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} (f(z)). \quad (1.96)$$

Рассмотрим одно видоизменение формулы (1.94). Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям утверждения 1.36, а $\psi(z)$ — аналитическая в Ω и непрерывная в $\bar{\Omega}$ функция. Особыми точками функции $g(z) = \psi(z)f'(z)/f(z)$ могут быть лишь нули z_j^* и полюсы z_j функции $f(z)$. Таким образом, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \psi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \psi(z_j^*) n_j - \sum_{j=1}^p \psi(z_j) p_j. \quad (1.97)$$

В частном случае $\psi(z) \equiv z$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n z_j^* n_j - \sum_{j=1}^p z_j p_j,$$

где правая часть представляет собой разность между суммой нулей и суммой полюсов функции $f(z)$, взятых с учетом их кратностей.

При подсчете числа нулей функции $f(z)$, принадлежащих области Ω , полезным бывает следующее утверждение.

Утверждение 1.38. (Теорема Руше¹⁴) Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ являются аналитическими в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывными вместе с $f'(z)$ и $\varphi'(z)$ в $\bar{\Omega}$. Пусть также

$$|f(z)|_{\Gamma} > |\varphi(z)|_{\Gamma}. \quad (1.98)$$

Тогда полное число нулей в области Ω функции $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ равно полному числу нулей функции $f(z)$.

◀ Для функции $F(z)$ выполнены условия утверждения 1.37. Поэтому общее число нулей

$$N(F(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} (f(z) + \varphi(z)),$$

¹⁴ Руше Эжен (фр. Eugene Roushe, 1832–1910) — французский математик. Профессор Центральной школы искусств и ремесел (Париж). Исследования посвящены теории функций, изопериметрическому методу математического анализа, геометрии, теории поверхностей, теории вероятностей, теории определенных интегралов.

$$N(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} (f(z)).$$

Для разности имеем выражение

$$\begin{aligned} N(f(z) + \varphi(z)) - N(f(z)) &= \frac{1}{2\pi} \left(\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} (f(z) + \varphi(z)) - \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(\frac{f(z) + \varphi(z)}{f(z)} \right) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $w(z) = 1 + \varphi(z)/f(z)$. В силу условия (1.98) при обходе по Γ соответствующая ей кривая G в плоскости w будет целиком лежать внутри некоторого круга $|w - 1| \leq \rho_0 < 1$. Таким образом, точка $w = 0$ лежит вне замкнутой кривой G . Отсюда $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} w(z) = 0$. ►

Применим 1.38 для доказательства основной теоремы алгебры.

Утверждение 1.39. *Уравнение*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1.99)$$

имеет в комплексной плоскости n корней (с учетом кратности).

◄ Положим $f(z) = a_0 z^n$, $\varphi(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Рассмотрим окружность $|z| = R$ и выберем R таким образом, чтобы на окружности выполнялось неравенство $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Это всегда можно сделать, т. к. на окружности $|f(z)| = |a_0| |z|^n = |a_0| R^n > |a_1| R^{n-1} + \dots + |a_n| > |g(z)|$ при большом R . Уравнение $f(z) = 0$ имеет n корней (с учетом кратностей) в круге любого радиуса, и $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. Отсюда (1.99) имеет также n корней. ►

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$z + e^{-z} = \lambda, \quad (1.100)$$

где вещественный параметр $\lambda > 1$, и покажем, что (1.100) всегда имеет в правой комплексной полуплоскости один вещественный корень. Рассмотрим область, ограниченную отрезком $[-iR, iR]$ и полуокружностью $|z| = R$ в правой полуплоскости. Выберем $f(z) = \lambda - z$, $\varphi(z) = e^{-iz}$. На отрезке $z = iy$ имеем $|f(iy)| = |\lambda - iy| \geq \lambda > 1$, $|\varphi(iy)| = |e^{-iy}| = 1$. На полуокружности $|z| = R$, $\operatorname{Re} z = x > 0$. При больших R : $|f(z)| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1$, $|\varphi(z)| = e^{-x} \leq 1$. Таким образом, при любых достаточно больших R выполняется условие теоремы Руше.

Глава 2.

Прикладные аспекты комплексного анализа

2.1. Конформные отображения

2.1.1. Дробно-линейные отображения

Отображения, осуществляемые дробно-линейными функциями

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0), \quad (2.1)$$

где a, b, c, d — комплексные числа, называются дробно-линейными.

Функция (2.1) определена на $\overline{\mathbb{C}}$. В точке $z_0 = -d/c$ значение (2.1) считаем равным ∞ при $z = \infty$ — $w = a/c$. Производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

существует всюду, кроме $z_0 = -d/c$. Обратная к (2.1) функция

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

также дробно-линейная и определена на $\overline{\mathbb{C}}$. При $w_0 = a/c$ ее значение равно ∞ , а при $w = \infty$ — $-d/c$. Таким образом, (2.1) осуществляет однозначное отображение замкнутой плоскости z на замкнутую плоскость w . Докажем обратное утверждение.

Утверждение 2.1. Пусть функция $f(z)$ однолистка в $\overline{\mathbb{C}}$ и аналитична в \mathbb{C} , кроме одной точки. Тогда она — дробно-линейная функция.

◀ Указанную точку, в которой нарушается аналитичность $f(z)$, обозначим z_0 . Эта точка может быть только полюсом. Она не может быть существенно особой точкой, т. к., согласно утверждению 1.33 (теорема Сохоцкого), она в этом случае не может быть однолистной, не может иметь и устранимую особую точку – в этом случае по утверждению 1.13 (теорема Лиувилля) она была бы постоянной. Полюс может быть только первого порядка – в противном случае нарушается однолистность функции. Таким образом, если $z_0 \neq \infty$, то в окрестности точки z_0 функция

$$w(z) = \frac{w_{-1}}{z - z_0} + w_0 + w_1(z - z_0) + \dots$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = w(z) - \frac{w_{-1}}{z - z_0}.$$

Функция $\varphi(z)$ не имеет особенностей в комплексной плоскости и ограничена, следовательно, $\varphi(z) \equiv c$ — постоянная, т. е.

$$w(z) = c + \frac{w_{-1}}{z - z_0}$$

является дробно-линейной. Если $z_0 = \infty$, то главная часть $\varphi(z)$ имеет вид az . Отсюда $w(z) = az + c$. ▶

Утверждение 2.2. *Отображение (2.1) является конформным везде в $\overline{\mathbb{C}}$.*

◀ Как отмечено выше, отображение (2.1) имеет конечную производную во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$, кроме $z_0 = -d/c$. Дадим определение угла в точке $z = \infty$.

Под углом в точке $z = \infty$ между кривыми Γ_1 и Γ_2 , проходящими через бесконечность и имеющими в своих отображениях на сфере Пуанкаре касательные в точке N , будем понимать угол между образами γ_1 и γ_2 этих кривых при отображении $z \rightarrow Z = 1/z$ в точке $Z = 0$.

Пусть через точку $z_0 = -d/c$ проходят две гладкие кривые γ_1 и γ_2 , пересекающиеся под углом α . Их образы при отображении (2.1) обозначим Γ_1 и Γ_2 . Угол между ними определен углом между их образами при отображении $w \rightarrow W = 1/w$.

В нашем случае отображение

$$W = \frac{cz + d}{az + b}$$

и

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}$$

отличны от нуля в точке $z_0 = -d/c$.

При этом кривые γ_1 и γ_2 являются образами Γ_1 и Γ_2 . Поэтому угол между Γ_1 и Γ_2 в точке $W = 0$ равен α . Конформность отображения (2.1) в $\overline{\mathbb{C}}$ доказана. ►

Рассмотрим геометрические свойства отображения (2.1).

Если $c = 0$, то приходим к линейной функции

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

При $a \neq 0$ положим $k = |a/d|$, $\alpha = \arg(a/d)$ и представим отображение $w = f(z)$ как суперпозицию отображений

$$a_0: z_1 = e^{i\alpha}z, \quad b_0: z_2 = kz_1, \quad c_0: w = z_2 + b/d.$$

Отображение a_0 сводится к повороту плоскости на угол α ; отображение b_0 — это отображение подобия с коэффициентом k ; отображение c_0 сдвигает плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на вектор b/d .

При $c \neq 0$ представим (2.1) в виде

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{1}{z + d/c} \cdot \frac{bc - ad}{c}.$$

Отображение $w = f(z)$ рассмотрим как суперпозицию отображений

$$a_0: z_1 = z + \frac{d}{c}, \quad b_0: z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad c_0: w = \frac{a}{c} + z_2 \frac{bc - ad}{c}.$$

Отображение a_0 сводится к сдвигу; отображение b_0 — обратное отображение; отображение c_0 — это поворот и сдвиг. Отметим, что обратное отображение в полярных координатах $z_1 = re^{i\varphi}$, $z_2 = \rho e^{i\theta}$ выглядит следующим образом: $\rho = 1/r$, $\theta = -\varphi$.

Утверждение 2.3. (Круговое свойство отображения (2.1)) Дробно-линейное отображение каждую окружность в плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ переводит в окружность на $\overline{\mathbb{C}}$. При этом под окружностью понимается всякая окружность или прямая линия.

◀ При отображениях a_0 и c_0 круговое свойство, очевидно, сохраняется. Докажем его справедливость при отображении b_0 . Каждую окружность в плоскости (x, y) можно записать в виде

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (2.2)$$

где A, B, C, D — вещественные числа, удовлетворяющие условию $A \geq 0$, $B^2 + C^2 > 4AD$. При $A = 0$ получим прямую. Полагая $z = x + iy$, перепишем (2.2) в виде

$$Az\bar{z} + B_1z + \overline{B_1}\bar{z} + D = 0, \quad (2.3)$$

где $B_1 = (B - iC)/2$.

Чтобы получить уравнение образа (2.3) при обратном отображении положим в (2.3) $z = 1/w$. В результате получим

$$A + B_1\bar{w} + \overline{B_1}w + Dw\bar{w} = 0,$$

что также является окружностью вида (2.3) ▶

Точки z и z^* комплексной плоскости называются симметричными относительно окружности $C_0: |z - z_0| = R_0$, если они лежат на одном луче, проходящем через z_0 , и $|z - z_0||z^* - z_0| = R_0^2$.

Преобразование, переводящее точку z комплексной плоскости в точку z^* , симметричную относительно окружности C_0 , называется инверсией относительно этой окружности.

Имеем

$$\begin{aligned} \arg(z - z_0) &= \arg(z^* - z_0), \\ z^* - z_0 &= \frac{R_0^2}{|z - z_0|} \cdot e^{i\arg(z - z_0)} = \frac{R_0^2}{\overline{z - z_0}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$z^* = z_0 + \frac{R_0^2}{\overline{z - z_0}}.$$

В частном случае $z_0 = 0$, $R_0 = 1$ имеем $z^* = 1/\bar{z}$. Отображение инверсии является конформным отображением второго рода (см. п. 2.3.3).

Точки z и z^* называются симметрическими относительно прямой, если они лежат на прямой, перпендикулярной к данной прямой и на одинаковом расстоянии от нее, но по разные стороны.

Утверждение 2.4. *Точки z и z^* тогда и только тогда симметричны относительно окружности C_0 , когда любая окружность Γ , проходящая через них, ортогональна C_0 .*

◀ **Необходимость.** Пусть Γ — произвольная окружность, проходящая через точки z и z^* . Проведем через точку z_0 касательную к Γ . Точку касания обозначим z' . Квадрат длины этой касательной $|z' - z_0|^2$ равен произведению секущей $|z_0 - z^*|$ на ее внешнюю часть $|z - z_0|$, т. е.

$$|z' - z_0|^2 = |z - z_0||z_0 - z^*| = R_0^2.$$

Отсюда $|z' - z_0| = R_0$. Таким образом, окружность $|z' - z_0|$ ортогональна окружности Γ .

Достаточность. Если z и z^* являются вершинами пучка окружностей $\{\Gamma\}$, ортогональных окружности C_0 , то они лежат на одном луче, проходящем через z_0 , ибо этот луч принадлежит пучку и является окружностью бесконечно большого радиуса. Касательная z_0z' является радиусом C_0 для любой окружности семейства. Т. к. $|z - z_0| \cdot |z^* - z| = R_0^2$, то z и z^* симметричны относительно C_0 . ▶

Утверждение 2.4 позволяет дать другое определение симметричных относительно окружности C_0 точек.

Точки z и z_* называются симметричными относительно окружности C_0 , если любая окружность Γ на плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, проходящая через них, ортогональна C_0 .

Утверждение 2.5. *Дробно-линейное отображение переводит каждую пару точек z и z^* , симметричных относительно окружности C_0 плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ в пару точек w и w^* , симметричных относительно окружности C_0^* , являющейся образом C_0 при данном отображении.*

◀ Проведем через w и w^* произвольную окружность Γ^* . Ее образ Γ в плоскости z ортогонален C_0 . В связи с конформностью дробно-линейного отображения, окружность Γ^* ортогональна C_0^* . ▶

2.1.2. Построение дробно-линейного преобразования

В формулу (2.1), задающую дробно-линейное отображение, входит четыре комплексных параметра. На самом деле, отображение, задаваемое (2.1), может быть определено тремя параметрами. Разделив числитель и знаменатель формулы (2.1) на один ненулевой параметр, получим зависимость от трех параметров.

Утверждение 2.6. Для любых трех разных точек $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и трех разных точек $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ существует единственное дробно-линейное отображение $w(z)$, задаваемое функцией вида (2.1), такое что $w(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$).

◀ Рассмотрим дробно-линейные отображения, переводящие точки $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ в точки $0, \infty, 1$ комплексной плоскости ζ . Соответственно имеем

$$Z_1: \zeta = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad Z_2: \zeta = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}.$$

Отображение $w(z) = Z_2^{-1} \cdot Z_1$ будет искомым отображением $w(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Оно может быть получено из соотношения

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}. \quad (2.4)$$

Отметим, что соотношение (2.4) остается в силе, если одна z_j или w_j либо две z_j или w_j равны ∞ . Так как каждая из точек входит в (2.4) и в числитель, и в знаменатель, для получения искомого отображения соответствующие отношения заменит единицей. Так, например, если $z_1 = w_1 = \infty$, то (2.4) примет вид

$$\frac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \frac{w_3 - w_2}{w - w_2}.$$

Покажем единственность найденного отображения $w(z)$. Пусть существует еще одно дробно-линейное отображение $v(z)$, $v(z_j) = w_j$ ($j = 1, 2, 3$). Рассмотрим отображение $g = Z_2 \cdot v \cdot Z_1^{-1}$. Оно оставляет неподвижными точки $0, \infty, 1$. В результате имеем $g(\infty) = \infty \Rightarrow g(\zeta) = a\zeta + b$, $g(0) = 0 \Rightarrow b = 0$, $g(1) = 1 \Rightarrow a = 1$, т. е. $g(\zeta) = \zeta$, т. е. $Z_2 \cdot Z_1^{-1} = I$ — тождественное отображение, отсюда $v(z) = Z_2^{-1} \cdot Z_1(z) = w(z)$. ▶

Следствие. Любую окружность $C_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$ можно посредством дробно-линейного отображения преобразовать в любую другую окружность $\Gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$.
 ◀ Действительно, любая окружность в $\overline{\mathbb{C}}$ определяется тремя точками. Выбрав три разные точки $z_1, z_2, z_3 \in C_0$ и три разные точки $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma$, с учетом кругового свойства дробно-линейного отображения, имеем сформулированное следствие. ▶

Кругом $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ назовем область, ограниченную окружностью Γ . Любая окружность разбивает плоскость на $\overline{\mathbb{C}}$ на две области K_1 и K_2 , каждая из которых называется кругом. При отображении $w(z)$ окружность Γ отображается в окружность Γ^* , которая разделит плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на области K_1^* и

K_2^* . Для того чтобы определить, в какую область K_j^* отобразятся области K_j , достаточно найти образ одной точки круга K_1 (или K_2). Можно также воспользоваться следующим правилом.

Зафиксируем на окружности Γ три точки z_1, z_2, z_3 , которые фиксируют определенное направление. Их образами будут соответственно точки w_1, w_2, w_3 . Используя свойство сохранения углов при конформных отображениях, отметим, что при обходе Γ по точкам z_1, z_2, z_3 в определенном направлении относительно области K_1 в том же направлении относительно K_1^* будет обходиться эта область. В результате сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2.7. Любые два круга плоскости \mathbb{C} могут быть взаимно преобразованы дробно-линейным отображением.

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся в приложениях дробно-линейные отображения.

1. Отображение верхней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$ в круг $K = \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — точка, которая при отображении переходит в $w = 0$. Точка \bar{a} , симметричная с a относительно вещественной оси, перейдет в точку, симметричную относительно окружности $|w| = 1$, т. е. в точку ∞ . Тогда искомое отображение будет иметь вид

$$w(z) = k \frac{z - a}{z - \bar{a}}.$$

При $z = x$, $|w| = 1$. Но т. к. $|x - a| = |x - \bar{a}|$, то $k = e^{i\theta}$. Имеем $w(\infty) = e^{i\theta}$. Таким образом, вся совокупность отображений \mathbb{C}^+ на внутренность единичного круга определяется тремя вещественными параметрами $\theta, \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a$.

2. Отображение единичного круга на единичный круг.

Зададимся точкой a , принадлежащей единичному кругу $|z| < 1$. Точка $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$, симметричная относительно окружности $|z| = 1$, перейдет в точку $w = \infty$, симметричную относительно окружности $|w| = 1$. Таким образом, искомое отображение должно иметь вид

$$w(z) = k \frac{z - a}{z - a^*} = k_1 \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \quad (2.5)$$

Выберем теперь k_1 таким образом, чтобы $|w(z)| = 1$ при $|z| = 1$. В точке $z = 1$ имеем $|k_1| \cdot |1 - a| |1 - \bar{a}| = |k_1| = 1$, т. е. $k_1 = e^{i\theta}$. Так как

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=a} = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |a|^2},$$

то θ означает угол поворота отображения (2.5) в точке $z = a$, а величина $1/(1 - |a|)$ — коэффициент растяжения в этой точке.

3. Отображение верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ на $\mathbb{C}^+ = \{w \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} w > 0\}$

Зададим точки $z_j = x_j$, $w_j = u_j$ ($j = 1, 2, 3$) вещественных осей плоскостей z и w соответственно. Т. к. z_j и w_j вещественные, то после преобразования (2.4) получим

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.6)$$

где a, b, c, d — вещественные числа. Наоборот, любое преобразование вида (2.7) преобразует вещественную ось в вещественную ось, а верхнюю полуплоскость в верхнюю или нижнюю. Первое условие будет выполнено, если на вещественной оси

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=x} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0, \quad (2.7)$$

т. е. $ad - bc < 0$.

Рассмотрим конформные отображения, которые наряду с дробно-линейными используют некоторые элементарные функции, рассмотренные в п. 1.1.11.

4. Отображение полосы $D = \{z \in \mathbb{C}, -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ на круг $K = \{w \in \mathbb{C}, |w| < 1\}$ с соответствием трех точек $w(\pm\pi/4) = \pm 1$, $w(i\infty) = i$ ($i\infty$ обозначает верхнюю бесконечно удаленную точку полосы).

Выполним следующие преобразования полосы D . Повернем на угол $\pi/2$ и расширим в два раза

$$z_1 = 2iz. \quad (2.8)$$

Преобразование

$$z_2 = e^{z_1} \quad (2.9)$$

отображает полосу $-\pi/2 < \operatorname{Im} z_1 < \pi/2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} z_2 > 0$, т. к. $z_2 = e^{x_1} \cdot e^{iy_1}$, $|z_2| = e^{x_1}$, $\arg z_2 = y_1$, $-\pi/2 < y_1 < \pi/2$. Отобразим теперь полуплоскость $\operatorname{Re} z_2 > 0$ на единичный круг так, чтобы точки $z_2 = \pm i, 0$, соответствующие точкам $z = \pm\pi/4, i\infty$, переходили в $w = \pm 1, i$. Эта задача решается с помощью соотношения (2.4), которое будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{w - 1}{w - i}(1 + i) = \frac{z_2 - i}{z_2}.$$

Отсюда

$$w = \frac{1}{i} \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$$

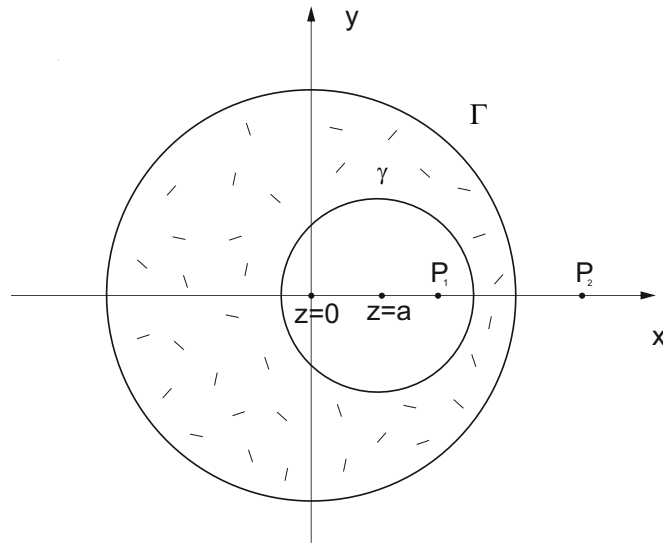


Рис. 2.1.

или, с учетом выражений 2.8, 2.9, окончательно будем иметь вид

$$w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z.$$

5. Отображение эксцентрического кругового кольца в концентрическое. Требуется найти конформное отображение области, ограниченной двумя окружностями с несовпадающими центрами (рис. 2.1) на какое-либо концентрическое кольцо.

Предположим, что центр большей окружности Γ находится в точке $z = 0$, радиус ее равен R , центр меньшей окружности γ лежит в точке $z = a$ действительной оси, а ее радиус равен r . Найдем точки P_1 и P_2 , которые являются симметричными относительно обеих окружностей Γ и γ . Они лежат на действительной оси, имеют абсциссы x_1 и x_2 соответственно, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (x_1 - a)(x_2 - a) &= r^2, \\ x_1 x_2 &= R^2 \end{aligned}$$

и являются корнями уравнения

$$ax^2 - (R^2 - r^2 + a^2)x + aR^2 = 0, \quad (2.10)$$

дискриминант которого $(R^2 - r^2 + a^2)^2 - 4a^2R > 0$.

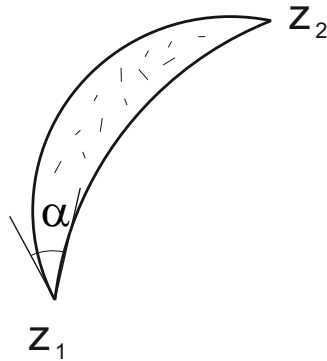


Рис. 2.2.

Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$w(z) = \lambda \frac{z - x_1}{z - x_2}, \quad (2.11)$$

где x_1, x_2 ($x_2 > x_1$) — корни уравнения (2.10) и абсциссы точек P_1 и P_1 соответственно. При отображении (2.11) окружности Γ и γ перейдут в Γ^* и γ^* плоскости w . Внешняя к окружностям точка P_2 перейдет в точку ∞ , точка P_1 перейдет в общий центр окружностей Γ^* и γ^* — точку $w = 0$. Остался произвол в выборе параметра λ . Выберем его таким образом, чтобы при отображении (2.11) точка $z = R$ оставалась на месте, т. е. выполнялось условие $R = \lambda(R - x_1)/(R - x_2)$, т. е.

$$\lambda = R \cdot (R - x_2)/(R - x_1).$$

6. Отображения двуугольников.

Двуугольником будем называть плоскую фигуру, образованную пересечением дуг двух окружностей разных радиусов (рис. 2.2). Очевидно, что углы при вершинах двуугольника равны между собой. Пусть дан двуугольник с вершинами в точках z_1 и z_2 , принадлежащих \mathbb{C} , и углом α при вершине. Требуется построить конформное отображение внутренней области двуугольника на верхнюю комплексную полуплоскость \mathbb{C}^+ .

Рассмотрим дробно-линейное отображение плоскости z на плоскость ζ вида

$$\zeta = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta), \quad (2.12)$$

при котором точка $z = z_1$ переходит в точку $\zeta = 0$, а точка $z = z_2$ — в точку $\zeta = \infty$. В силу кругового свойства дробно-линейного отображения окружно-

сти, образующие двуугольник, перейдут в окружности бесконечно большого радиуса. В рассматриваемом случае стороны двуугольника перейдут в лучи, исходящие из точки $\zeta = 0$, угол между которыми будет α . Угол α_0 , который образует первый луч с положительным направлением оси ξ , определяется положением точек z_1 и z_2 .

Функция

$$w(\zeta) = \zeta^{\pi/\alpha}, \quad (2.13)$$

являющаяся аналитическим продолжением функции $x^{\pi/\alpha}$, ($x \geq 0$) осуществляет конформное отображение внутренности сектора $\alpha_0 < \arg \zeta < \alpha_0 + \alpha$ на полуплоскость $\alpha_0\pi/\alpha < \arg w < \alpha_0\pi/\alpha + \pi$. Переведем полученную полуплоскость на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, для чего повернем всю плоскость на угол $-\alpha_0\pi/\alpha$, что осуществляется путем умножения функции (2.13) на $e^{-i\alpha_0\pi/\alpha}$. В итоге, объединяя (2.12) и (2.13), будем иметь функцию

$$w(\zeta) = e^{-i\pi\alpha_0/\alpha} \left(\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right)^{\pi/\alpha}, \quad (2.14)$$

осуществляющую конформное отображение двуугольника с вершинами в точках z_1 и z_2 на верхнюю полуплоскость \mathbb{C}^+ .

7. Построить конформное отображение верхней половины круга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость \mathbb{C}^+ . Рассматриваемая область является двуугольником с вершинами в точках $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$ и углом $\alpha = \pi/2$. α_0 в этом случае равно нулю. В этом случае функция (2.14) примет вид

$$w(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2.$$

2.1.3. Функция Жуковского

Так называют функцию вида

$$w(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (2.15)$$

предложенную Н. Е. Жуковским¹ и используемую им при разработке теории аэродинамических расчетов крыльев самолетов.

¹ Жуковский Николай Егорович (1847—1921) — русский механик, создатель аэродинамики как науки. Имеет труды по теории авиации, исследования по механике твердого тела, астрономии, математике, гидродинамике и гидравлике, прикладной механике, теории регулирования машин и механизмов и др.

Функция (2.15) является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и имеет производную

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

отличную от нуля в указанной области, за исключением точек $z = \pm 1$. Таким образом, отображение (2.15) является конформным в окрестности любой точки плоскости z , за исключением $z = 0, \pm 1$. Точке $z = 0$ соответствует точка $w = \infty$, отметим также, что $f(z) \equiv f(1/z)$.

Выделим области однолиственности функции (2.15). Пусть z_1 и z_2 функция (2.15) переводит в одну точку. Тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - z_2 - \frac{1}{z_2} = (z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0.$$

При $z_1 \neq z_2$ имеем $z_1 z_2 = 1$. Для области однолиственности (2.15) необходимо и достаточно, чтобы область не содержала точек, удовлетворяющих условию

$$z_1 z_2 = 1.$$

Этому условию удовлетворяют две области: внутренность круга $|z| < 1$ и его внешность $|z| > 1$.

Изучим картину отображения плоскости z . Представим $z = r e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), $w = u + iv$. Тогда (2.15) перепишется в виде

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (2.16)$$

При $|z| = r_0 < 1$ (2.16) преобразуется в

$$u = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{1}{r_0} \right) \cos \varphi, \quad v = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} - r_0 \right) \sin \varphi, \quad (2.17)$$

т. е. в эллипс с полуосями $a = (r_0 + 1/r_0)/2$, $b = (1/r_0 - r_0)/2$, обход которого осуществляется в отрицательном направлении. При $r_0 \rightarrow 1$ эллипс сжимается в отрезок $[-1, 1]$ оси, и при $r_0 \rightarrow 0$ эллипс, приближаясь к окружности, уходит в бесконечность. Все точки отрезка $[-1, 1]$ двойные. Его можно считать состоящим из двух берегов: верхнего и нижнего. Функция (2.15) преобразует верхнюю полуокружность $|z| = 1$ в нижний берег, нижнюю — в верхний. При этом радиусы $\arg z = \varphi_0$ круга $|z| < 1$ переходят в гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1, \quad (2.18)$$

фокусы которых расположены в точках $u = \pm 1$. Семейство гипербол (2.18) в силу свойств сохранения углов конформными отображениями ортогонально семейству эллипсов (2.17).

При $|z| = r_0 > 1$ согласно (2.16) имеем эллипсы с полуосями $a = (r_0 + 1/r_0)/2$, $b = (r_0 - 1/r_0)/2$. Эти эллипсы совпадают с ранее описанными при $r_0 < 1$, но обходятся в положительном направлении. При $r_0 \rightarrow 1$ эти эллипсы также стремятся к отрезку $[-1, 1]$. При этом верхняя полуокружность $|z| = 1$ отображается на верхнюю часть отрезка $[-1, 1]$, нижняя — на нижнюю. При $r_0 \rightarrow \infty$ эллипсы уходят в бесконечность.

Таким образом, функция (2.15) осуществляет конформное отображение полной плоскости z на риманову поверхность R , которая представляет собой двулистную поверхность, составленную из двух плоскостей w , разрезанных вдоль отрезка $[-1, 1]$ вещественной оси и расположенных одна над другой. При этом нижний берег разреза верхней плоскости склеивается с верхним берегом разреза нижней, а нижний берег разреза нижней плоскости с верхним берегом разреза верхней плоскости.

Обратной к (2.15) будет функция

$$z = w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \quad (2.19)$$

ставящая в соответствие каждой точке w две точки z_1 и z_2 , связанные условием $z_1 z_2 = 1$. Функцию (2.19) можно рассматривать как однозначную аналитическую со значениями на римановой поверхности R . При этом (2.19) имеет две точки разветвления $w = \pm 1$, при обходе каждой из которых происходит переход с одного листа римановой поверхности на другой. При обходе обеих этих точек, не пересекая отрезок $[-1, 1]$, находимся на одном листе римановой поверхности.

Перепишем (2.15) в тождественном форме:

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

Таким образом, отображение (2.15) можно представить в виде суперпозиции отображений

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}, \quad \delta = \zeta^2, \quad w = \frac{1+\delta}{1-\delta} \left(\delta = \frac{w-1}{w+1} \right). \quad (2.20)$$

Первое и последнее в (2.20) являются дробно-линейными и поэтому конформно отображают $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$. Второе удваивает углы в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$,

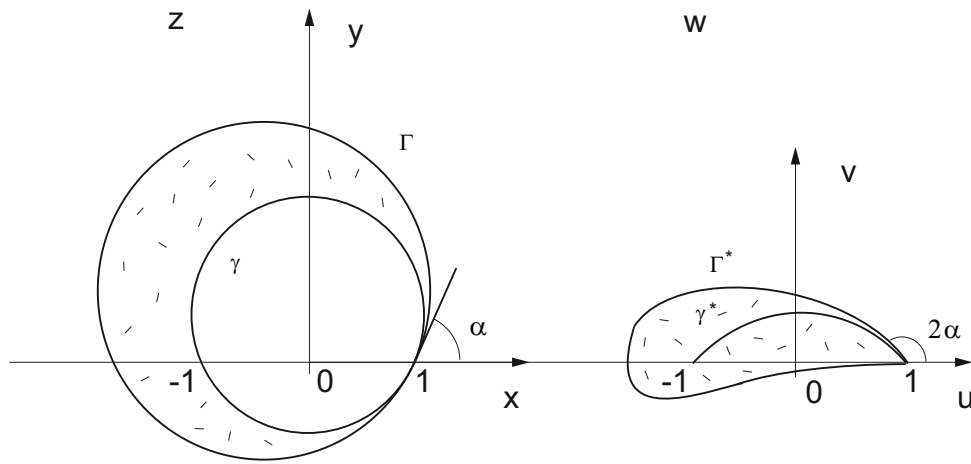


Рис. 2.3.

что соответствует точкам $z = \pm 1$ в плоскости z . Поэтому в этих точках нарушается конформность отображения (2.15). Используя отображения (2.20), несложно показать, что функция (2.15) осуществляет однолистное конформное отображение внешности окружности γ , изображенной на рис. 2.3, на внешность окружности γ^* , проходящей через точки ± 1 плоскости w . При этом угол α между окружностью γ и осью x в точке 1 плоскости z перейдет в угол 2α между окружностью γ^* и осью u в точке 1 плоскости w . Окружность Γ перейдет в кривую Γ^* . Заметим, что окружности Γ , касающиеся в точке $z = 1$ окружности γ , при преобразовании (2.15) переходят в профиль Γ^* , напоминающий профиль крыла самолета.

2.2. Анализ распределения нулей некоторых аналитических функций

Проблеме анализа распределения нулей на комплексной плоскости различных аналитических функций в математической литературе уделяется большое внимание. Задачи такого рода возникают в различных областях теоретической и прикладной математики. Некоторые аспекты этой проблемы рассматриваются в настоящем разделе.

2.2.1. Проблема Рауса – Гурвица

Проблема Рауса² – Гурвица³ формулируется следующим образом.

Найти условия, при которых нули многочлена (a в более общей постановке – целой функции) все лежат в левой комплексной полуплоскости.

Рассмотрим методы решений этой проблемы для многочленов с вещественными корнями. Рассмотрим многочлен

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0 \quad (2.21)$$

с вещественными коэффициентами.

Многочлен вида (2.21) будем называть многочленом Гурвица, если все его нули z_1, \dots, z_n (корни уравнения $f(z) = 0$) имеют отрицательные вещественные части, т. е. принадлежат левой комплексной полуплоскости \mathbb{C}_- .

Утверждение 2.8. *Если многочлен вида (2.21) является многочленом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.*

◀ Пусть $z_j = -\tau_j + i\sigma_j$ ($\tau_j > 0$, $\sigma_j > 0$, $j = 1, \dots, p$) и $z_j = -\gamma_j$ ($\gamma_j > 0$, $j = 1, \dots, q$) соответственно комплексные и вещественные корни уравнения $f(z) = 0$, а n_j , m_j их соответствующие кратности. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^p 2n_j + \sum_{j=1}^q m_j = n.$$

² Раус Эдвард Джон (англ. Edward John Routh, 1831–1907) — английский механик и математик. Основные исследования относятся к теории устойчивости движения, аналитической механике и динамике твердого тела. Занимался также и другими разделами математики и механики, в частности, исследовал динамику нити.

³ Гурвиц Адольф (нем. Adolf Hurwitz, 1859–1919) — немецкий математик. Основные труды по математическому анализу, алгебре и теории чисел, теории аналитических и эллиптических функций. Одним из первых исследовал римановы многообразия и их приложения к теории алгебраических кривых.

Представим

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 \prod_{j=1}^p (z + \tau_j - i\sigma_j)^{n_j} (z + \tau_j + i\sigma_j)^{n_j} \prod_{j=1}^q (z + \gamma_j)^{m_j} = \\ &= a_0 \prod_{j=1}^p (z^2 + 2\tau_j z + \tau_j^2 + \sigma_j^2)^{n_j} \prod_{j=1}^q (z + \gamma_j)^{m_j}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнивая коэффициенты в равенстве (2.22) справа и слева с учетом знака a_0 , замечаем, что коэффициенты многочлена $f(z)$ положительны. ►

Составим из коэффициентов многочлена (2.21) следующую матрицу $n \times n$ (матрицу Гурвица):

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

в которой $a_k = 0$ при $k > n$. Главные диагональные миноры матрицы M_f обозначим

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad D_n = a_n D_{n-1}. \quad (2.24)$$

Утверждение 2.9. (Теорема Гурвица) Для того чтобы многочлен (2.21) был многочленом Гурвица, необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \dots, \quad D_n > 0. \quad (2.25)$$

◄ Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ утверждение верно, т. к. сводится к выполнению неравенства $a_1 > 0$. Предположим теперь, что утверждение верно для многочленов степени меньшей или равной $n - 1$ и докажем его справедливость для многочленов степени n . Для этого представим многочлен (2.21) в виде $f(z) = \phi(z) + \psi(z)$, где $\phi(z) = a_0 z^n + a_2 z^{n-2} + \dots$, $\psi(z) = a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + \dots$, и рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} F(z) &= a_1 \phi(z) + (a_1 - a_0 z) \psi(z) = \\ &= a_1^2 z^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z^{n-2} + a_1 a_3 z^{n-3} + (a_1 a_4 - a_0 a_5) z^{n-4} + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

Построим матрицу Гурвица $M_f (n-1) \times (n-1)$ многочлена (2.25), главные диагональные миноры которой обозначим Δ_j ($j = 1, \dots, n-1$).

Покажем, что справедливо равенство

$$\Delta_j = a_1^{j-1} D_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n-1). \quad (2.27)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} a_0 a_1 \Delta_j &= a_0 a_1 \begin{vmatrix} a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_0 a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_0 a_1 & a_1 a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & a_1 a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & a_1 a_2 & a_1^2 & \dots & 0 \\ a_0 a_7 & a_1 a_6 & a_1 a_5 & a_1 a_4 & a_1 a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_0 a_1^j D_{j+1} \end{aligned}$$

Первое равенство увеличивает размер матрицы на единицу, затем сначала добавляем к элементам второго столбца элементы первого, затем к элементам четвертого – элементы третьего, умноженные на a_0/a_1 , и т.д. В итоге выносим из первого столбца множитель a_0 , а из остальных – a_1 и получаем равенство (2.27).

Покажем теперь, что нули многочлена $f(z)$ лежат в \mathbb{C}_- тогда и только тогда, когда нули многочлена $F(z)$ лежат в \mathbb{C}_- и коэффициент $a_1 > 0$.

Представим

$$f(z) = a_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j) \quad (2.28)$$

и введем в рассмотрение многочлен

$$f_*(z) = a_0 \prod_{j=1}^n (z + \bar{z}_j) = a_0 z^n - a_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n, \quad (2.29)$$

нули которого лежат в правой комплексной полуплоскости \mathbb{C}_+ .

Имеем

$$f(z) + f_*(z) = 2\phi(z), \quad f(z) - f_*(z) = 2\psi(z).$$

Так как $|z - z_k| \geq |z + \bar{z}_k|$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $|z - z_k| \leq |z + \bar{z}_k|$ при $\operatorname{Re} z \leq 0$, то

$$|f(z)| \geq |f_*(z)| \text{ при } \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ и } |f(z)| \leq |f_*(z)| \text{ при } \operatorname{Re} z \leq 0. \quad (2.30)$$

Отсюда следует, что уравнение $\psi(z) = 0$ может иметь лишь чисто мнимые корни, которые являются простыми. Действительно, предположив противное, имеем для корня $i\sigma$ выполнение следующих равенств: $f(i\sigma) = f_*(i\sigma)$, $f'(i\sigma) = f'_*(i\sigma)$. Тогда

$$f'(i\sigma)/f(i\sigma) = f'_*(i\sigma)/f_*(i\sigma) \Rightarrow (\ln f(i\sigma))' = (\ln f_*(i\sigma))'. \quad (2.31)$$

Отметим, что $f(z)$ и $f_*(z)$ не имеют нулей на мнимой оси. На основании (2.28), (2.29) второе равенство (2.31) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{i\sigma - z_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i\sigma + \bar{z}_j}, \quad (2.32)$$

но т. к.

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i\sigma - z_j} > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{1}{i\sigma + \bar{z}_j} < 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

равенство (2.32) выполнено быть не может. Получили противоречие. Так как

$$\sum_{j=1}^n z_j = -a_1/a_0,$$

то $a_1 > 0$ и многочлен $\psi(z)$ имеет степень $n - 1$. Отсюда имеем разложение

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{a_0}{a_1}z + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{z - i\beta_j} + c, \quad (2.33)$$

а также

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{f(z) + f_*(z)}{f(z) - f_*(z)} = \frac{1 + f_*(z)/f(z)}{1 - f_*(z)/f(z)}. \quad (2.34)$$

Дробно-линейная функция $\omega = (1 + \xi)/(1 - \xi)$ отображает круг $|\xi| < 1$ на правую полуплоскость, а внешность круга, т. е. область $|\xi| > 1$ на левую полуплоскость. Поэтому на основании (2.30) можно утверждать, что

$$\operatorname{Re} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ и } \operatorname{Re} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} \leq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в разложении (2.33) все $\lambda_j > 0$ ввиду того, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z - i\beta_j} \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Re} \frac{1}{z - i\beta_j} \leq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \leq 0,$$

а также того, что в окрестности точки $z = i\beta$ знак $\operatorname{Re}(\phi(z)/\psi(z))$ определяется знаком $\operatorname{Re}(\lambda_j/(z - i\beta_j))$. Отметим, что c — чисто мнимая постоянная.

На основании (2.33) имеем

$$F(z) = a_1\phi(z) + (a_1 - a_0z)\psi(z) = a_1\psi(z) \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{z - i\beta_j} + c \right].$$

Из этой формулы следует, что $F(z)$ не может иметь нулей при $\operatorname{Re} z \geq 0$. Действительно, вещественная часть выражения в квадратных скобках при $\operatorname{Re} z \geq 0$ положительна, а $\psi(z)$ обращается в нуль лишь в точках $i\beta_j$, в которых $F(i\beta_j) \neq 0$, т. к. в противном случае в этих точках было бы $\phi(i\beta_j) = 0$, а значит, и $f(i\beta_j) = 0$, что противоречит условию. Таким образом, все нули многочлена $F(z)$ лежат в \mathbb{C}_- .

Пусть теперь дано, что все нули многочлена $F(z)$ лежат в \mathbb{C}_- и коэффициент $a_1 > 0$. Построим по $F(z)$ многочлены $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ по аналогии с многочленом $f(z)$. Из (2.26) следует, что в результате получим $\phi_1(z) = a_1\psi(z)$, $\psi_1(z) = a_1\phi(z) - a_0z\psi(z)$. Отсюда

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\psi_1(z)}{\phi_1(z)} + \frac{a_0}{a_1}z. \quad (2.35)$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re} \frac{\phi_1(z)}{\psi_1(z)} \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Re} \frac{\phi_1(z)}{\psi_1(z)} \leq 0 \text{ при } \operatorname{Re} z \leq 0.$$

Так как $a_0/a_1 > 0$ и $\operatorname{Re}(\psi_1(z)/\phi_1(z))$ совпадает с $\operatorname{Re}(\phi_1(z)/\psi_1(z))$, то из (2.35) следует, что $\operatorname{Re}(\phi(z)/\psi(z)) \geq 0$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$ и $\operatorname{Re}(\phi(z)/\psi(z)) \leq 0$

при $\operatorname{Re} z \leq 0$. Но тогда справедливы неравенства (2.30). Отсюда следует, что $|f(z)| > |f_*(z)|$ при $\operatorname{Re} z > 0$. $f(z)$ не может иметь корней на мнимой оси, ибо на мнимой оси $|f(z)| = |f_*(z)|$ и каждый корень был бы корнем многочленов $\phi(z)$ и $\psi(z)$, а следовательно, и корнем $F(z)$, что противоречит сделанному предположению. Поэтому все корни $f(z)$ лежат в \mathbb{C}_- .

Таким образом, показано, что принадлежность нулей многочлена $f(z)$ полуплоскости \mathbb{C}_- определяется принадлежностью \mathbb{C}_- нулей многочлена $F(z)$, степени на единицу меньше. С учетом равенства (2.27) и условия (2.25) имеем доказательство утверждения. ►

Следствие. Если $f(z)$ является многочленом Гурвица, то многочлен

$$g(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.36)$$

также является многочленом Гурвица, и наоборот.

◀ В силу равенства

$$f(z) = z^n g\left(\frac{1}{z}\right), \quad (2.37)$$

имеем: если z_j – корни (2.37) и $\operatorname{Re} z_j < 0$, то $1/z_j$ – корни (2.36) и $\operatorname{Re} 1/z_j < 0$. ►

Пример. 1. Для многочлена

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r,$$

где p, q, r – вещественные коэффициенты, условия (2.25) примут вид

$$D_1 = q > 0, \quad D_2 = pq - r > 0, \quad D_3 = rD_2 > 0.$$

Пример. 2. При каких условиях корни многочлена

$$f(z) = z^2 + pz + q,$$

где p, q вещественные коэффициенты, лежат внутри единичного круга $|z| < 1$.

Дробно линейное преобразование

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}$$

переводит полуплоскость \mathbb{C}_- плоскости w в единичный круг плоскости z .

Положим

$$f\left(\frac{w+1}{w-1}\right) = (w-1)^{-2}[(1+p+q)w^2 + 2(1-q)w + (1-p+q)] = (w-1)^{-2}g(w).$$

Условия принадлежности нулей многочлена $g(w)$ полуплоскости \mathbb{C}_- имеют вид

$$1 + p + q > 0, \quad 1 - q > 0, \quad 1 - p + q > 0.$$

2.2.2. Критерий Михайлова

В тех случаях, когда степень многочлена сравнительно большая, применение критерия Гурвица становится затруднительным ввиду вычисления большого числа определителей матриц высокого порядка. В этих случаях иногда удобнее пользоваться геометрическими методами. Рассмотрим один из таких методов, который носит название – частотный метод Михайлова А. В.⁴

Рассмотрим многочлен вида (2.21). Кривая

$$w = f(i\omega), \tag{2.38}$$

где ω – действительный параметр ($0 \leq \omega < \infty$), называется годографом Михайлова функции $f(z)$.

Утверждение 2.10. Пусть имеется многочлен $f(z)$ вида (2.21), не имеющий нулей на мнимой оси. Тогда угол поворота против хода часовой стрелки ненулевого вектора $f(i\omega)$ при $0 \leq \omega < \infty$ равен

$$\Phi = \frac{\pi}{2}(n - 2m), \tag{2.39}$$

где m – число нулей $f(z)$ с положительной действительной частью с учетом их кратностей. Обратно, если справедлива формула (2.39), то в \mathbb{C}_+ расположено ровно m нулей многочлена $f(z)$, где каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

◀ Пусть многочлен вида (2.21) степени n имеет $2p$ (с учетом кратностей) комплексно-сопряженных корней $\tau_j \pm i\sigma_j$ ($\tau_j \neq 0, \sigma_j > 0, j = 1, \dots, p$) и q (с учетом кратностей) вещественных корней $\gamma_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, q$), т. е. $2p + q = n$.

⁴ Михайлов А. В. «Автоматика и телемеханика». 1938. № 3. С. 27-81.

Представим

$$f(z) = a_0 \prod_{j=1}^p (z - \tau_j + i\sigma_j)(z - \tau_j - i\sigma_j) \prod_{k=1}^q (z - \gamma_k).$$

Отсюда имеем

$$f(i\omega) = a_0 \prod_{j=1}^p (i\omega - \tau_j + i\sigma_j)(i\omega - \tau_j - i\sigma_j) \prod_{k=1}^q (i\omega - \gamma_k). \quad (2.40)$$

Угол $\Phi = \Delta_{\Gamma} \text{Arg} f(i\omega)$, где $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, z = i\omega, 0 \leq \omega < \infty\}$, под функцией $\text{Arg } z$ будем понимать ту непрерывную ветвь счетнозначной функции (1.2), которая в начальный момент соответствует функции $0 \leq \arg z < 2\pi$. В силу свойств функции $\text{Arg } f(z)$ и вида (2.40), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma} \text{Arg } f(i\omega) &= \Delta_{\Gamma} \text{Arg } a_0 + \sum_{j=1}^p \Delta_{\Gamma} (\text{Arg } (i\omega - \tau_j + i\sigma_j) + \\ &+ \text{Arg } (i\omega - \tau_j - i\sigma_j)) + \sum_{j=1}^q \Delta_{\Gamma} \text{Arg } (i\omega - \gamma_j). \end{aligned} \quad (2.41)$$

При $\omega = 0$ аргументы всех слагаемых равны их главным значениям. Соответственно, имеем

$$\Delta_{\Gamma} \text{Arg } a_0 = 0, (\text{Arg}(i\omega - \tau_j + i\sigma_j) + \text{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j))|_{\omega=0} = 2\pi. \quad (2.42)$$

Так как $\sigma_j > 0$, то при увеличении параметра ω $\text{Arg}(i\omega - \tau_j + i\sigma_j)$ будет монотонно возрастать, если $\tau_j < 0$, и монотонно убывать, если $\tau_j > 0$. При этом

$$\text{Arg}(i\omega - \tau_j + i\sigma_j)|_{\omega=+\infty} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [\arg(i\omega) + \arg(1 - \frac{\tau_j - i\sigma_j}{i\omega})] = \frac{\pi}{2}, \quad (2.43)$$

$j=1, \dots, p$.

Рассмотрим теперь поведение $\text{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j)$ при $\omega > 0$. Если $\omega = \sigma_j - 0 > 0$, то имеем

$$\text{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j)|_{\omega=\sigma_j-0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\tau_j - i\varepsilon) = \begin{cases} 2\pi, & \tau_j < 0, \\ \pi, & \tau_j > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j)|_{\omega=+\infty} = \begin{cases} 5\pi/2, & \tau_j < 0, \\ \pi/2, & \tau_j > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

В результате из (2.42) – (2.44) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma}(\operatorname{Arg}(i\omega - \tau_j + i\sigma_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j)) = \\ = (\operatorname{Arg}(i\omega - \tau_j + i\sigma_j) + \operatorname{Arg}(i\omega - \tau_j - i\sigma_j))|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = \begin{cases} \pi, & \text{если } \tau_j < 0, \\ -\pi, & \text{если } \tau_j > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$j=1, \dots, p$.

Для $z_j = \gamma$ будем иметь

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_j)|_{\omega=0} = \begin{cases} 0, & \gamma_j < 0, \\ \pi, & \gamma_j > 0 \end{cases}$$

и

$$\operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_j)|_{\omega=+\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg(i\omega - \gamma_j) = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg}(i\omega - \gamma_j) = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } \gamma_j < 0, \\ -\pi/2, & \text{если } \gamma_j > 0, \end{cases}$$

$j=1, \dots, q$.

Отсюда следует, что каждый корень уравнения $f(z) = 0$ с отрицательной действительной частью обеспечивает при $0 \leq \omega < \infty$ поворот вектора $f(i\omega)$ «в среднем» на $+\pi/2$, а каждый корень с положительной действительной частью создает при $0 \leq \omega < \infty$ поворот вектора $f(i\omega)$ «в среднем» на $-\pi/2$.

Пусть m – число нулей многочлена $f(z)$ с положительной вещественной частью. Число нулей с отрицательной вещественной частью, ввиду отсутствия чисто мнимых нулей, равно $n - m$. Тогда для суммарного поворота вектора $f(i\omega)$ получаем следующее выражение:

$$\Phi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m(-\frac{\pi}{2}) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (2.45)$$

Пусть теперь угол Φ поворота вектора $f(i\omega)$ при $0 \leq \omega < +\infty$ равен (2.39). Пусть также $f(z)$ имеет \tilde{m} корней, принадлежащих \mathbb{C}_+ . Тогда согласно (2.45)

$$\Phi = (n - \tilde{m}) \frac{\pi}{2}. \quad (2.46)$$

Сравнивая (2.46) с (2.39), получим $\tilde{m} = n$. ►

Из доказанного утверждения получаем следующий критерий решения проблемы Рауса – Гурвица.

Критерий Михайлова. Для того чтобы многочлен степени n вида (2.21), не имеющий чисто мнимых нулей, имел лишь нули, принадлежащие левой комплексной полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота против хода часовой стрелки вектора $f(i\omega)$ при $0 \leq \omega < +\infty$ был равен

$$\Phi = \frac{\pi}{2}n.$$

Если при этом выполнено неравенство

$$\Phi < \frac{\pi}{2}n,$$

то многочлен $f(z)$ имеет нули в правой полуплоскости.

Пример. Пользуясь критерием Михайлова, получим условия критерия Гурвица для многочлена

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz + r,$$

где p, q, r – вещественные параметры. Имеем годограф

$$f(i\omega) = (-p\omega^2 + r) + i\omega(-\omega^2 + q). \quad (2.47)$$

Точки пересечения годографа при $0 \leq \omega < +\infty$ с полуосями $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$ соответственно определяются последовательностью $i\omega_k$ ($k = 0, 1, 2$), где

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{r}{p}}, \quad \omega_2 = \sqrt{q},$$

т. к. ω_1, ω_2 должны быть вещественные, то $q > 0$, $r/p > 0$. Соответственно имеем

$$f(i\omega_0) = r, \quad f(i\omega_1) = i\sqrt{\frac{r}{p}}(q - \frac{r}{p}), \quad f(i\omega_2) = -(pq - r).$$

С учетом утверждения (2.8) и направления обхода вектора $f(i\omega_j)$ ($j = 0, 1, 2$), получим $p, q, r > 0$, $pq - r > 0$. Полагая $\operatorname{Arg} f(0) = 0$, имеем $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} = 3\pi/2$.

2.2.3. Метод D -разбиений

Этот метод, предложенный Ю. И. Неймарком⁵ [10], используется для построения областей устойчивости (неустойчивости) в пространстве параметров многочленов или целых функций. Его содержание изучим на конкретных примерах.

1. Рассмотрим сначала многочлен

$$f(z) = z^3 + kz^2 + \theta z + 1, \quad (2.48)$$

зависящий от двух вещественных параметров $k, \theta > 0$. Для построения в плоскости (k, θ) области устойчивости многочлена положим в (2.48) $z = i\omega$ и приравняем к нулю вещественную и мнимую части. В результате будем иметь равенства

$$\omega(-\omega^2 + \theta) = 0, \quad -k\omega^2 + 1 = 0. \quad (2.49)$$

Рассматривая теперь ω как параметр, принимающий значения $0 \leq \omega < \infty$, и выражения из (2.49) $k = 1/\omega^2$, $\theta = \omega^2$ как функции ω , построим в плоскости (k, θ) параметрическую кривую $k(\omega)$, $\theta(\omega)$, которая является гиперболой $k = 1/\theta$. При значении параметров на этой кривой многочлен (2.48) имеет нули на мнимой оси. При изменении параметров нули могут сместиться как в комплексную полуплоскость \mathbb{C}_- , так и в \mathbb{C}_+ . Для того чтобы определить, какая из областей, разделенных кривой $k = 1/\theta$ и осями $k, \theta > 0$, является областью устойчивости, поступаем следующим образом. Фиксируем точку (k_*, θ_*) на кривой, которая соответствует ω_* . Положим в (2.48) $k = k_*(1 + \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ – параметр, и рассмотрим уравнение

$$f(z; \varepsilon) \equiv z^3 + k_*(1 + \varepsilon)z^2 + \theta_*z + 1 = 0. \quad (2.50)$$

Уравнение (2.50) имеет при $\varepsilon = 0$ пару комплексно сопряженных однократных корней $z_* = i\omega_*$ и $z_* = -i\omega_*$. Эти корни при малых ε являются аналитическими функциями ε , т. е.

$$z_* = i\omega_* + \varepsilon z_{*1} + \varepsilon^2 z_{*2} + \dots \quad (2.51)$$

Подставив (2.51) в (2.50), из теоремы о неявной функции находим

$$z_{*1} = -f_\varepsilon(i\omega_*; 0)/f_z(i\omega_*; 0) = -(\theta_* + ik_*^{1/2})/(\theta_*^2 + k_*)/2.$$

⁵ Неймарк Юрий Исаакович (1920–2011) — советский и российский математик, основатель факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета. Им получены фундаментальные результаты по многомерным динамическим системам, математическим методам теории колебаний, теории управления и аналитической механики.

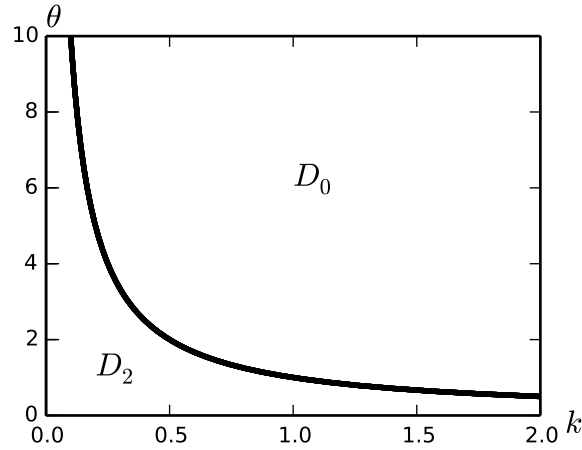


Рис. 2.4. D -разбиения для квазиполинома (2.48)

Отсюда имеем $\operatorname{Re} z_{*1} < 0$, т. е. при увеличении параметра k нули многочлена (2.48) с мнимой оси переходят в \mathbb{C}_- . В соответствии с этим, а также с учетом того, что при $k = \theta = 0$ нули (2.48) имеют вид $z_1 = -1$, $z_{2,3} = (1 \pm \pm i\sqrt{3})/2$, область устойчивости представлена на рис. 2.4.

D_j обозначает область в пространстве параметров, при значении параметров из которой функций $f(z)$ имеет j нулей, принадлежащих комплексной полуплоскости \mathbb{C}_+ .

Отметим, что метод D -разбиений не только позволяет построить области устойчивости в пространстве параметров исследуемой функции, но и указывает на характер потери устойчивости, что весьма важно, особенно в теории колебаний.

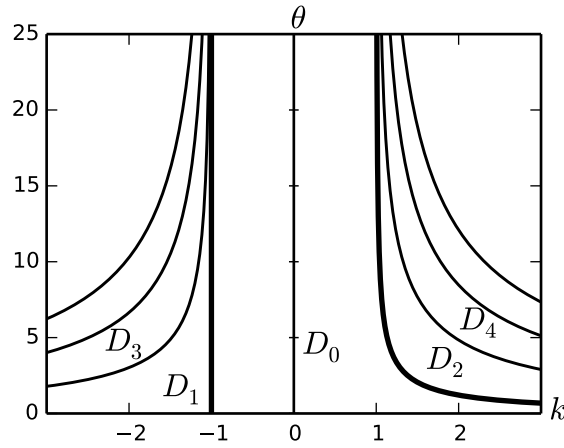
2. Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = z + 1 + k \exp(-z\theta), \quad (2.52)$$

зависящую от двух действительных параметров k и $\theta > 0$. Функции вида (2.52), являющиеся конечной суммой произведений многочленов и экспонент, называются квазиполиномами. Они возникают при изучении линейных дифференциально-разностных уравнений.

Следуя методу D -разбиений, положим в (2.52) $z = i\omega$ ($\omega \geq 0$) и приравняем к нулю действительную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$1 + k \cos(\omega\theta) = 0, \quad \omega - k \sin(\omega\theta) = 0, \quad (2.53)$$

Рис. 2.5. D -разбиения для квазиполинома (2.52)

из которой находим выражения

$$k = (-1)^{n+1} / \cos(\operatorname{arctg} \omega), \quad \theta = \omega^{-1}(\pi n - \operatorname{arctg} \omega), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.54)$$

являющиеся параметрическим заданием кривых в плоскости (k, θ) , при значении параметров на которых квазиполином (2.52) имеет однократные нули на мнимой оси комплексной плоскости. К кривым (2.54) следует добавить прямую $k = -1$, соответствующую точке $\omega = 0$.

Изучим движение нулей квазиполинома (2.52) с кривых (2.54) при изменении параметров. Выберем ω_* , k_* , θ_* в соответствии с (2.54) и рассмотрим уравнение

$$f(z; \varepsilon) \equiv z + 1 + k_*(1 + \varepsilon) \exp(-z\theta_*) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.55)$$

Используя разложение для корня $z_*(\varepsilon)$ ($z_*(0) = i\omega_*$) уравнения

$$z_*(\varepsilon) = i\omega_* + \varepsilon z_{*1} + \varepsilon^2 z_{*2} + \dots,$$

имеем для z_{*1} выражение

$$z_{*1} = -f_\varepsilon(i\omega_*; 0) / f_z(i\omega_*; 0) = (1 + \theta_* + \theta_* \omega_*^2 + i\omega_*) / [(1 + \theta_*)^2 + \omega_*^2 \theta_*^2].$$

Отсюда следует $\operatorname{Re} z_{*1} > 0$. Таким образом при увеличении $|k|$ нули квазиполинома (2.52) переходят из комплексной полуплоскости \mathbb{C}_- в \mathbb{C}_+ . В соответствии с этим построена картина D -разбиений плоскости параметров (k, θ) , представленная на рисунке 2.5.

3. Рассмотрим квазиполином

$$f(z) = z^2 + Az + 1 + ke^{-z\theta}, \quad (2.56)$$

зависящий от действительных параметров $A, \theta > 0$ и $k \in \mathbb{R}$, и изучим расположение его нулей на комплексной плоскости в зависимости от k и θ . Построим в плоскости параметров (k, θ) (при различных значениях A) области, связанные с принадлежностью определенного количества нулей квазиполинома (2.56) правой комплексной полуплоскости. Рассмотрим для этого уравнение $f(i\omega) = 0$ ($\omega \geq 0$) и выделим действительную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$k \cos(\omega\theta) = \omega^2 - 1, \quad k \sin(\omega\theta) = A\omega,$$

из которой находим

$$k_n(\omega) = A\omega / \sin(\omega\theta_n(\omega)), \quad \omega > 0, \quad -\infty < k(\omega) < \infty, \quad (2.57)$$

$$\theta_n(\omega) = \begin{cases} \omega^{-1}(\arctg(A\omega/(\omega^2 - 1)) + \pi n), & 0 < \omega < 1, \\ -\pi/2 + \pi n, & \omega = 1, \\ \omega^{-1}(\arctg(A\omega/(\omega^2 - 1)) - \pi + \pi n), & 1 < \omega < \infty. \end{cases} \quad (2.58)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Рассматривая теперь (2.57), (2.58) как функции параметра ω , построим в плоскости (k, θ) кривые, на которых квазиполином (2.56) имеет нули, лежащие на мнимой оси. При этом точке $\omega = 0$ соответствует прямая $k = -1$. На рис. 2.6 для различных значений A приведены указанные кривые.

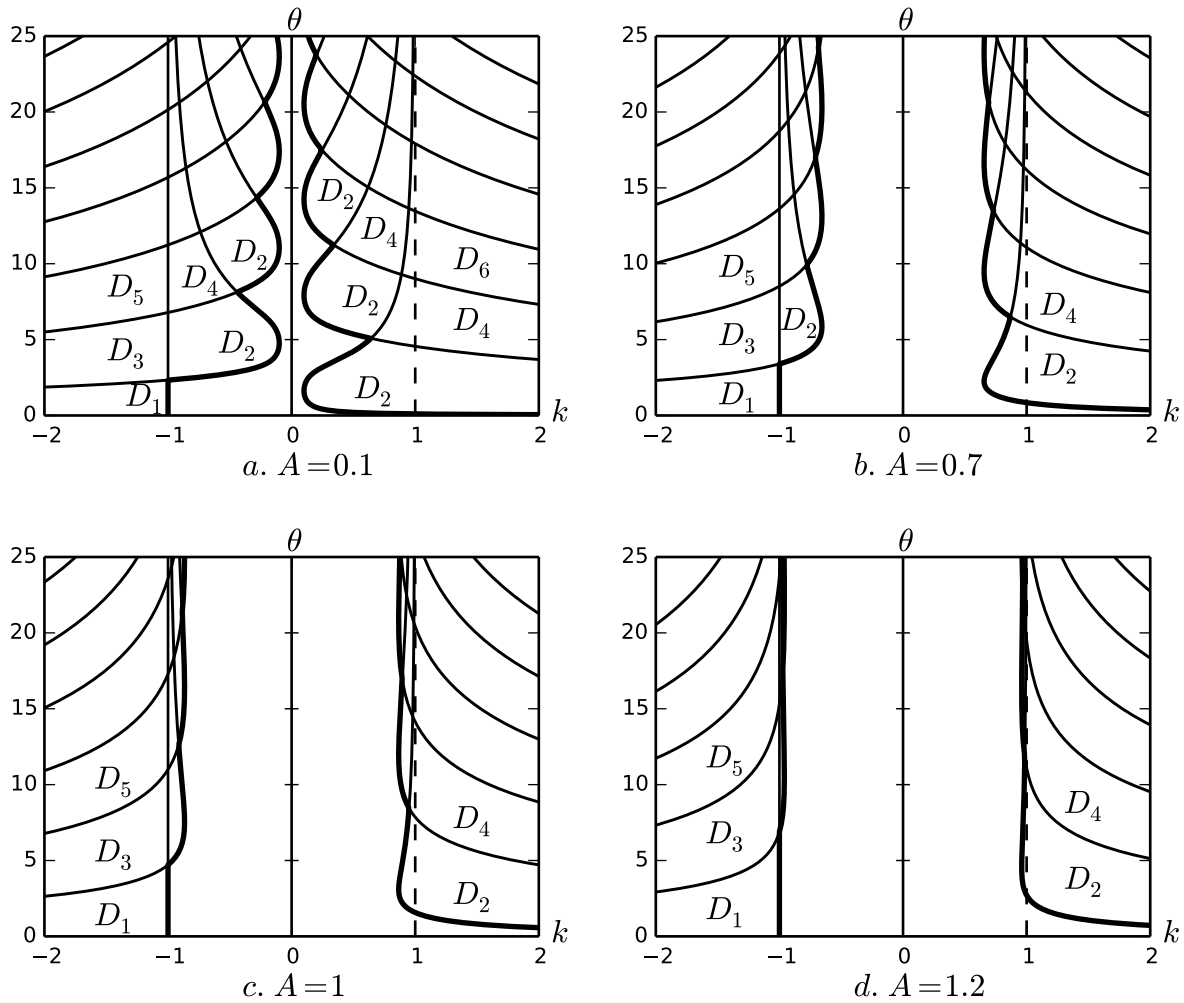
Исследуем движение нулей квазиполинома (2.56) через мнимую ось комплексной полуплоскости. Выберем для некоторого $A = A_0$ точку (k_0, θ_0) , лежащую на одной из кривых, приведенных на 2.6. Пусть эта точка соответствует значению $\omega = \omega_0$. Положим в (2.56) $k = k_0(1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и рассмотрим движение корня $z(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon z_1 + \dots$ уравнения $f(z; \varepsilon) \equiv z^2 + A_0 z + 1 + k_0(1 + \varepsilon)e^{-\lambda\theta_0} = 0$ при изменении ε . С необходимостью имеем

$$z_1 = -f_\varepsilon(i\omega_0; 0)/f_z(i\omega_0; 0) = (1 - \omega_0^2 + i\omega_0 A_0)/[A_0 + \theta_0(1 - \omega_0^2) + i\omega_0(A_0\theta_0 + 2)].$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} z_1 = \{A_0(\omega_0^2 + 1) + \theta_0[(\omega_0^2 - 1)^2 + \omega_0^2 A_0^2]\} / \\ \{[A_0 + \theta_0(\omega_0^2 - 1)]^2 + \omega_0^2(A_0\theta_0 + 2)^2\} > 0.$$

Таким образом нули квазиполинома (2.56) при увеличении $|k|$ переходят из левой комплексной полуплоскости в правую. В соответствии с этим построена картина D -разбиений плоскости (k, θ) , приведенная на рис. 2.6 для различных значений A , где границы области принадлежности нулей квазиполинома (2.56) левой комплексной полуплоскости (области устойчивости

Рис. 2.6. D -разбиения для квазиполинома (2.56)

квазиполинома (2.56)) отмечены жирной линией. При этом в случае $k > 0$ потеря устойчивости квазиполинома может происходить с прохождением через мнимую ось как одной, так и двух пар комплексно сопряженных нулей квазиполинома (2.56).

В случае $k < 0$ возможна потеря устойчивости квазиполиномом (2.56), связанная с прохождением одного действительного нуля через нулевую точку комплексной плоскости, одной пары и двух пар комплексно сопряженных нулей через мнимую ось комплексной плоскости, а также возможно совместное прохождение действительного нуля и одной пары комплексно сопряженных нулей через нулевую точку и мнимую ось. Случай совместного прохождения действительного нуля и двух пар комплексно сопряженных нулей через нулевую точку и мнимую ось невозможен.

Выясним, возможен ли внутренний резонанс 1:2 и 1:3 (младшие внутренние резонансы) при прохождении двух пар комплексно-сопряженных ну-

лей квазиполинома через мнимую ось комплексной плоскости. Пусть при k_* , θ_* , A_* квазиполином (2.56) имеет на мнимой оси нули $z_j = \pm i\omega_j$ ($0 < \omega_1 < \omega_2$, $j = 1, 2$), а остальные его нули находятся в полуплоскости \mathbb{C}_- . Выясним, возможно ли при этом равенство $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_2 = 3\omega_1$. Эти отношения имеют важное значение в теории нелинейных колебаний.

Предположим, что выполнено первое равенство. Тогда из (2.56) имеем

$$k_* \cos(\omega_1 \theta_*) = \omega_1^2 - 1, \quad k_* \sin(\omega_1 \theta_*) = A_* \omega_1,$$

$$k_* \cos(2\omega_1 \theta_*) = 4\omega_1^2 - 1, \quad k_* \sin(2\omega_1 \theta_*) = 2A_* \omega_1.$$

Из второго и последнего равенства имеем

$$\sin(\omega_1 \theta_*)(\cos(\omega_1 \theta_*) - 1) = 0.$$

Отсюда $\omega_1 \theta_* = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$, подставив во второе равенство $\omega_1 = 0$, получим противоречие.

Предположим теперь, что выполнено второе равенство. Тогда из (2.56) имеем

$$k_* \cos(\omega_1 \theta_*) = \omega_1^2 - 1, \quad k_* \sin(\omega_1 \theta_*) = A_* \omega_1,$$

$$k_* \cos(3\omega_1 \theta_*) = 9\omega_1^2 - 1, \quad k_* \sin(3\omega_1 \theta_*) = 3A_* \omega_1.$$

Из второго и последнего равенства имеем $\sin(3\omega_1 \theta) - 3\sin(\omega_1 \theta_*) = -4\sin^3(\omega_1 \theta_*) = 0$, откуда $\omega_1 \theta_* = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$. Подставив $\omega_1 \theta_*$ во второе равенство, имеем $\omega_1 = 0$. Получили противоречие.

Таким образом, младших внутренних резонансов при прохождении двух пар нулей через мнимую ось комплексной плоскости реализовано быть не может.

4. Рассмотрим квазиполином

$$f(z) = z^2 + Az + 1 + kze^{-z\theta}, \quad (2.59)$$

где A , $\theta > 0$ и k – действительные параметры. Изучим расположение нулей квазиполинома (2.59) в зависимости от параметров. Построим в плоскости параметров (k, θ) картину D -разбиений квазиполинома (2.59). Заметим предварительно следующее. При $k = 0$ $f(z)$ не имеет нулей в C_+ . При малых $|k|$ это свойство $f(z)$ также сохранится. Действительно, рассмотрим полукруг $K_R^{1/2} \subset C_+$, ограниченный отрезком мнимой оси $-iR \leq \operatorname{Im} z \leq iR$ и полуокружностью $z = Re^{i\phi}$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$. При малых $|k|$ и любом R

на границе $K_R^{1/2}$ справедливо неравенство $|z^2 + Az + 1| > |k||z||e^{-z\theta}|$. Осталось сослаться на утверждение 3.9 (теорема Руше) и устремить $R \rightarrow \infty$. Положим в (2.59) $z = i\omega$ ($\omega \geq 0$) и приравняем к нулю действительную и мнимую части. В результате будем иметь систему уравнений:

$$1 - \omega^2 + k\omega \sin(\omega\theta) = 0, \quad A + k \cos(\omega\theta) = 0.$$

Отсюда, считая A фиксированным, находим последовательность функций

$$k_n(\omega) = -A / \cos(\omega\theta_n(\omega)), \quad \theta_n(\omega) = \omega^{-1}(\arctg((1 - \omega^2)/(A\omega)) + \pi n),$$

$$0 \leq \omega < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.60)$$

служащих параметрическим заданием семейства кривых в плоскости (k, θ) , при значении параметров на которых квазиполином (2.59) имеет нули на мнимой оси комплексной плоскости.

Выберем при $A = A_*$ точку k_*, θ_* на одной из кривых (2.2.3), которая соответствует ω_* . Положим в (2.59) $k = k_*(1 + \varepsilon)$, $A = A_*$, $\theta = \theta_*$ и рассмотрим уравнение

$$f(z; \varepsilon) \equiv z^2 + A_*z + 1 + k_*(1 + \varepsilon)ze^{-z\theta_*} = 0, \quad (2.61)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Рассмотрим движение корня $z_*(\varepsilon) = i\omega_* + \varepsilon z_{*1} + \varepsilon^2 z_{*2} + \dots$ уравнения при изменении ε . Подставив $z_*(\varepsilon)$ в (2.61), с необходимостью имеем выражение

$$z_{*1} = -f_\varepsilon(i\omega_*; 0) / f_z(i\omega_*; 0) = -k_*e^{-i\omega_*\theta_*} / [2i\omega_* + A + k_*(1 - i\omega_*\theta_*)e^{-i\omega_*\theta_*}],$$

что с учетом $f(i\omega_*; 0) = 0$ дает

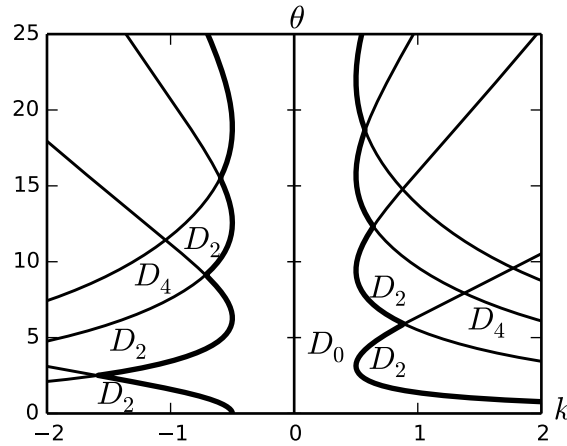
$$\operatorname{Re} z_{*1} = -\theta(\omega_*^2 - 1)^2 + A_*[\omega^2(A + \theta) + \theta] / \{(\omega^2 - 1)^2 + [\omega^2(A + \theta) + \theta]^2 / \omega^2\} < 0.$$

Таким образом, при увеличении $|k|$ корни уравнения (2.61) сдвигаются с мнимой оси в полуплоскость \mathbb{C}_+ . В соответствии с этим строится картина D -разбиения плоскости (k, θ) квазиполинома (2.59). Эта картина приведена для случая $A = 0.5$ на рис. 2.7. Отметим, что при других значениях A картина D -разбиений качественно не меняется.

5. Рассмотрим квазиполином

$$f(z) = z - A(1 + i\alpha) - \gamma e^{-z\tau - i\phi_0}, \quad (2.62)$$

где $A, \alpha, \gamma, \tau > 0$, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ – действительные параметры. Характеристический квазиполином возникает при изучении уравнения Ланга-Кобаяши

Рис. 2.7. D -разбиения для квазиполинома (??)

[11]. Изучим расположение нулей квазиполинома (2.62) в зависимости от параметров, используя метод D -разбиений. Положим $z = i\omega, \omega \in \mathbb{R}$ и приравняем нулю действительную и мнимую части. В результате получим систему уравнений:

$$A + \gamma \cos(\omega\tau + \phi_0) = 0, \quad \omega - \alpha A + \gamma \sin(\omega\tau + \phi_0) = 0. \quad (2.63)$$

Обозначив $1 + i\alpha = \sqrt{(1 + \alpha^2)}e^{i\beta}$, $\beta = \arccos(1/\sqrt{1 + \alpha^2})$, из уравнений (2.63) имеем уравнение

$$\sin(\omega\tau + \phi_0 + \beta) = -\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2}) \quad (2.64)$$

для определений $\tau = \tau(\omega)$. Уравнение (2.64) разрешимо при $-\gamma\sqrt{1 + \alpha^2} \leq \omega \leq \gamma\sqrt{1 + \alpha^2}$ и дает две серии решений:

$$\tau_1^m(\omega) = \omega^{-1}(\pi + \arcsin(\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2})) - \phi_0 - \beta + 2\pi m), \quad (2.65)$$

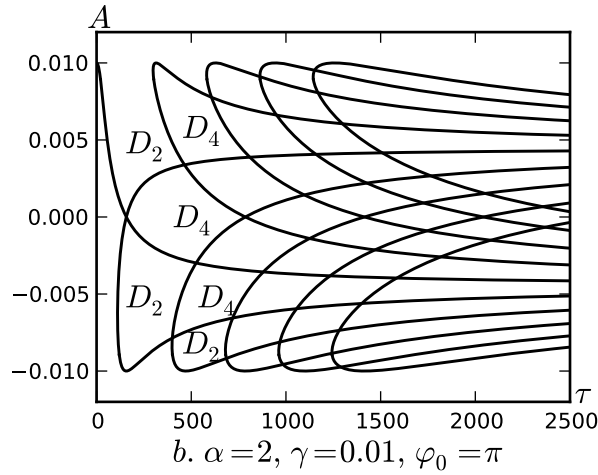
$$\tau_2^m(\omega) = -\omega^{-1}(\pi + \arcsin(\omega/(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2})) + \phi_0 + \beta - 2\pi m), \quad (2.66)$$

$m = 0, \pm 1, \dots$

Подставим (2.65) и (2.66) в первое уравнение (2.63). В результате будем иметь

$$A_1(\omega) = (\alpha\omega + \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega^2})/(1 + \alpha^2), \quad (2.67)$$

$$A_2(\omega) = (\alpha\omega - \sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega^2})/(1 + \alpha^2). \quad (2.68)$$

Рис. 2.8. D -разбиения для квазиполинома (2.62)

Вычислим значения функций $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ в нуле и на границах допустимого интервала изменения ω :

$$\begin{aligned}
 A_1^0 &= A_1(0) = \gamma/\sqrt{1+\alpha^2} > 0, \\
 A_1^- &= A_1(-\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = -\alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -\alpha A_1^0, \\
 A_1^+ &= A_1(\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = \alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = \alpha A_1^0, \\
 A_2^0 &= A_2(0) = -\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -A_1^0, \\
 A_2^- &= A_2(-\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = -\alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -A_1^-, \\
 A_2^+ &= A_2(\gamma\sqrt{1+\alpha^2}) = \alpha\gamma/\sqrt{1+\alpha^2} = -A_2^-.
 \end{aligned}$$

Подставив те же значения в (2.65) и (2.66), заметим, что при $\omega = 0$ на плоскости параметров (τ, A) есть две горизонтальные асимптоты $\pm A_1^0$, а при значениях $\omega = \pm\gamma\sqrt{1+\alpha^2}$ имеется два уровня склейки графиков: A_1^- и A_1^+ .

Верхним решением Γ_{m_1, m_2}^+ назовем пару кривых $(\tau_1^{m_1}(\omega), A_1(\omega)), (\tau_2^{m_2}(\omega), A_2(\omega))$, $0 \leq \omega < \gamma\sqrt{1+\alpha^2}$, где m_1 и m_2 выбраны так, чтобы эти кривые склеивались (это произойдет на уровне A_1^+).

Нижним решением Γ_{m_1, m_2}^- назовем пару кривых $(\tau_1^{m_1}(\omega), A_1(\omega)), (\tau_2^{m_2}(\omega), A_2(\omega))$, $-\gamma\sqrt{1+\alpha^2} < \omega \leq 0$, где m_1 и m_2 выбраны так, чтобы эти кривые склеивались (это произойдет на уровне A_1^-). Совокупность кривых, определяемых этими уравнениями для разных значений α, γ, ϕ_0 , приведена на рис. 2.8.

Выберем точку (τ_0, A_0) на одной из этих кривых. Пусть они соответствуют точке ω_0 . Положим $A = A_0 + \varepsilon$. Определяя $z(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon z_1 + \dots$, из уравнения $z - (A_0 + \varepsilon)(1 + i\alpha) - \gamma e^{-z\tau_0 + i\phi_0} = 0$ находим

$$z_1 = (1 + i\alpha)/[1 + \gamma\tau_0 e^{-i\omega_0\tau_0 + i\phi_0}] = \\ \{1 + \tau_0[\alpha\omega_0 - (1 + \alpha^2)A_0] + i(\alpha - \tau_0\omega_0)\}/[(1 - \tau_0A_0)^2 + \tau_0^2(\sigma - \alpha A_0)^2].$$

Знак $\operatorname{Re} z_1$ определяется в соответствии с (2.67), (2.68) знаком величины

$$1 + \tau_0[\alpha\omega_0 - (1 + \alpha^2)A_0] = 1 \mp \tau_0\sqrt{\gamma^2(1 + \alpha^2) - \omega_0^2}. \quad (2.69)$$

Таким образом, в соответствии с (2.71) на нижней составляющей каждой из кривых Γ_{m_1, m_2}^\pm нули квазиполинома (2.62) переходят из левой комплексной полуплоскости в правую; на верхней составляющей каждой из кривых Γ_{m_1, m_2}^\pm до изгиба корни переходят из левой комплексной полуплоскости в правую, после изгиба, наоборот – из правой в левую. В соответствии с этим на рис. 2.8 построена картина D -разбиений плоскости параметров (τ, A) .

В некоторых задачах представляет интерес характер поведения нулей квазиполиномов при больших значениях параметра, характеризующего величину запаздывания аргумента в дифференциально-разностном уравнении. Рассмотрим эту задачу на примере квазиполиномов (2.56) и (2.62) и изучим зависимость нулей от параметров θ и τ соответственно, которые будем считать большими. Рассмотрим сначала квазиполином (2.56). Положим в нем $\varepsilon_1 = \theta^{-1}$ и нормируем $z \rightarrow z\varepsilon_1$. В результате квазиполином примет вид

$$f(z; \varepsilon_1) = \varepsilon_1^2 z^2 + \varepsilon_1 A z + 1 + k e^{-z}, \quad (2.70)$$

Построим сначала картину D -разбиений квазиполинома. Положим $z = i\omega$ ($\omega > 0$) и разрешим относительно ε_1 и k . В результате имеем

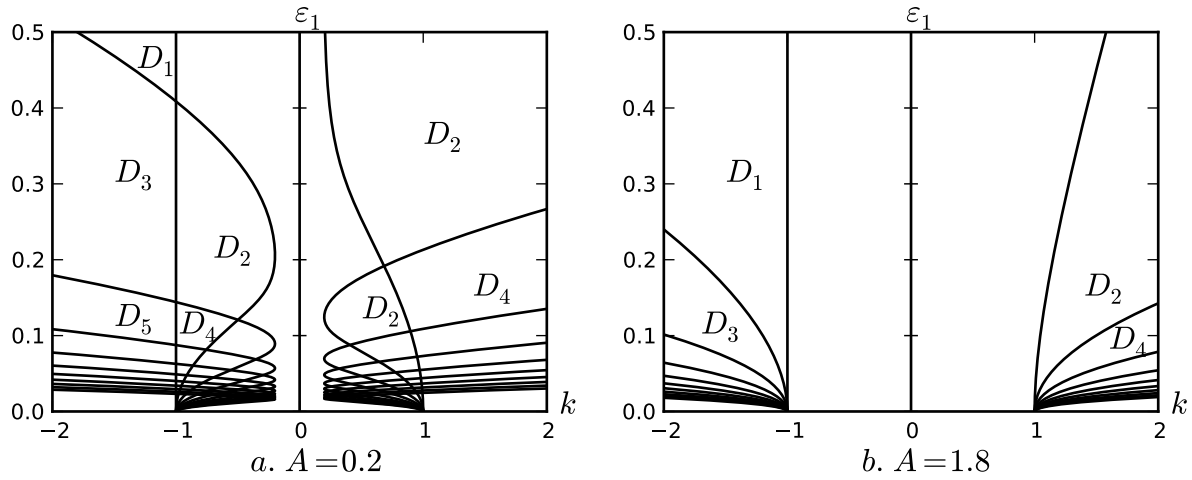
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega) = \omega^{-1}[A \operatorname{ctg}(\omega) + (a^2 \operatorname{ctg}^2(\omega) + 4)^{1/2}], \quad (2.71)$$

$$k = k(\omega) = A\omega\varepsilon_1(\omega)/\sin(\omega). \quad (2.72)$$

На рис. 2.9 для двух значений параметра A с учетом результатов исследования поведения нулей квазиполинома (2.56) приведена картина D -разбиений плоскости параметров (ε_1, k) квазиполинома (2.70), построенная согласно (2.71), (2.72).

Наиболее интересными для приложений, как следует из рис. 2.9, являются случаи, когда $k \approx \pm 1$. Положим в (2.70) $k = 1 + \varepsilon_2$ и рассмотрим уравнение

$$f(z; \varepsilon) \equiv \varepsilon_1^2 z^2 + \varepsilon_1 A z + 1 + (1 + \varepsilon_2)e^{-z} = 0, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (2.73)$$

Рис. 2.9. D -разбиения для квазиполинома (2.70)

Положим в (2.73) $z = x + iy$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате получим систему уравнений:

$$\varepsilon_1^2(x^2 - y^2) + \varepsilon_1 Ax + 1 + (1 + \varepsilon_2)e^{-x} \cos y = 0, \quad (2.74)$$

$$2\varepsilon_1^2 xy + \varepsilon_1 Ay - (1 + \varepsilon_2)e^{-x} \sin y = 0, \quad (2.75)$$

которую запишем в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_2)e^{-x} &= \{[1 + \varepsilon_1 Ax + \varepsilon_1^2(x^2 - y^2)]^2 + (A + 2\varepsilon_1 x)^2 y^2\}^{1/2} = \\ &= \{[1 - A^2/4 + \varepsilon_1^2 y^2 + (A/2 + \varepsilon_1 x)^2]^2 + (A^2 - 4)\varepsilon_1^2 y^2\}^{1/2} \equiv X(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} y &= -\frac{\varepsilon_1 Ay + 2\varepsilon_1^2 xy}{1 + \varepsilon_1 Ax + \varepsilon_1^2(x^2 - y^2)} = -\frac{2\varepsilon_1 y(A/2 + \varepsilon_1 x)}{1 - A^2/4 - \varepsilon_1^2 y^2 + (A/2 + \varepsilon_1 x)^2} \equiv \\ &\equiv Y(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Отметим, что правые части (2.76), (2.77) соответственно симметричны и антисимметричны относительно $A/2 + \varepsilon_1 x$. Поведение правой части (2.76) относительно $\varepsilon_1 x$ при фиксированном $\varepsilon_1 y$ напоминает параболу, симметричную относительно точки $-A/2$, которая в зависимости от A и $\varepsilon_1 y$ может иметь как один минимум в точке $-A/2$, так и два в точках, симметричных относительно $-A/2$. В связи с этим можно указать такое ε_0 , зависящее только от A , что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ уравнение (2.76) имеет единственное решение $x = x(\varepsilon_1 y; \varepsilon)$ ($x(0, 0) = 0$), которое может быть получено с помощью

следующего итерационного процесса:

$$x_{k+1}(\varepsilon_1 y; \varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(X(\varepsilon_1 x_k(\varepsilon_1 y; \varepsilon), \varepsilon_1 y)), \quad x_0(\varepsilon_1 y; \varepsilon) \equiv 0. \quad (2.78)$$

Подставив теперь функцию $x = x(\varepsilon_1 y; \varepsilon)$ в (2.77), найдем счетное число решений $y^{(n)}(\varepsilon)$, которые, согласно (2.74), (2.75), будут иметь вид

$$y^{(n)}(\varepsilon) = \pi(2n - 1) + y_*^{(n)}(\varepsilon) \quad (y_*^{(n)}(0) = 0), \quad n = 0, 1, \dots$$

Функции $y^{(n)}(\varepsilon)$ могут быть построены с помощью итерационного процесса

$$y_{k+1}^{(n)}(\varepsilon) = \operatorname{arctg}(Y(\varepsilon_1 x(\varepsilon_1 y_k^{(n)}(\varepsilon); \varepsilon), \varepsilon_1 y_k^{(n)}(\varepsilon))) + \pi(2n - 1), \\ y_0^{(n)}(\varepsilon) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.79)$$

Итерационные процессы (2.78), (2.79) могут быть объединены в один для определения

$$z^{(n)}(\varepsilon) = x^{(n)}(\varepsilon) + iy^{(n)}(\varepsilon), \quad x^{(n)}(\varepsilon) = x(\varepsilon_1 y^{(n)}(\varepsilon); \varepsilon).$$

Для этого уравнение (2.73) представим в виде

$$e^z e^{\ln(\varepsilon_1^2 z^2 + \varepsilon_1 A z + 1)} = e^{\ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \ln w = \ln |w| + i \arg w.$$

Отсюда имеем, что множество корней уравнения (2.73) определяется совокупностью корней последовательности уравнений

$$z + \ln(\varepsilon_1^2 z^2 + \varepsilon_1 A z + 1) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi(2n - 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.80)$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение, т. к. они, будучи расписанными в равенства для действительной и мнимой частей, дают соответственно уравнения (2.76) и (2.77). Последнее в окрестности точки $\pi(2n - 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$z + \ln(\varepsilon_1^2 z^2 + \varepsilon_1 A z + 1) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\omega \quad (\omega > 0) \quad (2.81)$$

для определения $z(i\omega; \varepsilon)$. Для нахождения его решений (2.81) построим итерационный процесс

$$z_{k+1} = -\ln(\varepsilon_1^2 z_k^2 + \varepsilon_1 A z_k + 1) + \ln(1 + \varepsilon_2) + i\omega, \quad z_0 = 0,$$

сходимость которого следует из сходимости (2.78), (2.79). В результате получим функцию $z(i\omega; \varepsilon) = i\omega + \ln(1 + \varepsilon_2) + z_*(i\omega; \varepsilon)$ ($z_*(i\omega; 0) \equiv 0$), аналитическую по $i\omega$ и ε , являющуюся решением (2.81). При этом

$$z_*(i\omega; \varepsilon) = -\ln(\varepsilon_1^2(i\omega + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(\varepsilon_1^2(i\omega + \ln(1 + \varepsilon_2) - \dots)))^2 + \varepsilon_1 A(i\omega + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(\varepsilon_1^2(i\omega + \ln(1 + \varepsilon_2) - \dots))) + 1)). \quad (2.82)$$

Отсюда имеем совокупность решений уравнения (2.73):

$$z^{(n)}(\varepsilon) = i\pi(2n - 1) + \ln(1 + \varepsilon_2) + z_*(i\pi(2n - 1); \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (2.82) справедливо равномерное по n представление:

$$z^{(n)}(\varepsilon) = i\pi(2n - 1) + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(\varepsilon_1^2(i\pi(2n - 1) + \ln(1 + \varepsilon_2)))^2 + \varepsilon_1 A(i\pi(2n - 1) + \ln(1 + \varepsilon_2)) + 1) + O(|\varepsilon|).$$

Рассмотрим теперь квазиполином (2.62), считая параметр τ большим. Обозначив $\tau^{-1} = \varepsilon_1$ и нормировав (2.62) $z \rightarrow z\varepsilon_1$, получим квазиполином

$$f(z; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda - A(1 + i\alpha) - \gamma e^{-z - i\phi_0}. \quad (2.83)$$

Положим в (2.83) $z = i\omega$, $\omega \in R$ и приравняем к нулю действительную и мнимую части

$$A + \gamma \cos(\omega + \phi_0) = 0, \quad \varepsilon_1 \omega - \alpha A + \gamma \sin(\omega + \phi_0) = 0. \quad (2.84)$$

Из (2.84) находим

$$A(\omega) = -\gamma \cos(\omega + \phi_0), \quad (2.85)$$

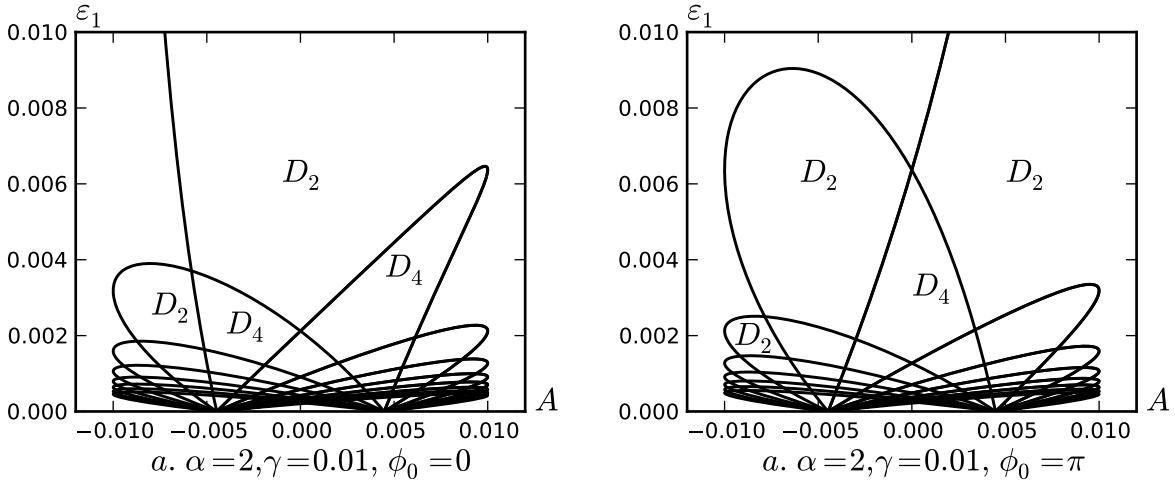
$$\varepsilon_1(\omega) = -\omega^{-1} \gamma (1 + \alpha^2)^{1/2} \sin(\omega + \phi_0 + \beta), \quad (2.86)$$

$$-\phi_0 - \beta + \pi(2n - 1) = \omega_{n-1} \leq \omega \leq \omega_n = -\phi_0 - \beta + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из (2.85), (2.86) следует, что при $\varepsilon(\omega_{n-1}) = \varepsilon(\omega_n) = 0$. Отсюда имеем $A(\omega_{n-1}) = \gamma/(1 + \alpha^2)^{1/2} = A_1^0$, $A(\omega_n) = -\gamma/(1 + \alpha^2)^{1/2} = A_2^0$. В соответствии с этим на рис. 2.10 для двух вариантов значений параметров α, γ, ϕ_0 с учетом результатов исследования поведения нулей квазиполинома (2.62), приведены картины D -разбиений плоскости параметров (A, ε_1) .

Положим в (2.83) $A = A_1^0(1 + \varepsilon_2)$. В результате, переобозначив ε_1 через $\varepsilon_1 \gamma$, уравнение (2.83) запишем в виде

$$f_1(z; \varepsilon) = \varepsilon_1 z e^{-i\beta} - (1 + \varepsilon_2) - e^{-z - i\phi_0 - i\beta} = 0. \quad (2.87)$$

Рис. 2.10. D -разбиения для квазиполинома (2.83)

Изучим характер зависимости (2.87) от параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При $\varepsilon = 0$ уравнение имеет корни $i\sigma_n = i(-\phi_0 - \beta + \pi(2n - 1))$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Изучим расположение корней (2.87) при малых ε . Запишем (2.87) в виде

$$e^{z+i\phi_0+i\beta}[\varepsilon_1 z e^{-i\beta} - (1 + \varepsilon_2)] = 1.$$

Отсюда имеем последовательность уравнений:

$$z + i\phi_0 + i\beta = -\ln(\varepsilon_1 z e^{-i\beta} - (1 + \varepsilon_2)) + i2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которая определяет все множество корней (2.87). При этом каждое из уравнений имеет лишь одно решение. Покажем это.

Распишем в действительной форме, положив $z = x + iy$ и разделив действительную и мнимую части. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \ln((\varepsilon_1 x \cos \beta + \varepsilon_1 y \sin \beta - (1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2(-x \sin \beta + y \cos \beta)^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln((1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1 + \varepsilon_2)\varepsilon_1(x \cos \beta + y \sin \beta) + \varepsilon_1^2(x^2 + y^2)) \equiv \\ &\equiv X(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y; \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} y + \phi_0 + \beta &= \arctg\left(\frac{\varepsilon_1(-x \sin \beta + y \cos \beta)}{1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1(x \cos \beta + y \sin \beta)}\right) + 2\pi n \equiv \\ &\equiv Y(\varepsilon_1 x, \varepsilon_1 y, \varepsilon) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (2.89)$$

Первое уравнение при каждом $\varepsilon_1 y$ имеет единственное решение $x = x(\varepsilon_1 y; \varepsilon)$, которое может быть найдено с помощью итерационного процесса:

$$x_{k+1}(\varepsilon_1 y; \varepsilon) = X(\varepsilon_1 x_k(\varepsilon_1 y; \varepsilon), \varepsilon_1 y; \varepsilon), \quad x_0(\varepsilon_1 y; \varepsilon) \equiv 0. \quad (2.90)$$

Решение $y^{(n)}(\varepsilon)$ уравнения (2.89) при каждом фиксированном n находится посредством итерационного процесса

$$y_{k+1}^{(n)}(\varepsilon) + \phi_0 + \beta = Y(\varepsilon_1 x(\varepsilon_1 y_k^{(n)}(\varepsilon); \varepsilon), \varepsilon_1 y_k^{(n)}(\varepsilon); \varepsilon) + 2\pi n, \quad y_0^{(n)}(\varepsilon) \equiv 0. \quad (2.91)$$

В результате будем иметь

$$z^{(n)}(\varepsilon) = x^{(n)}(\varepsilon) + iy^{(n)}(\varepsilon), \quad x^{(n)}(\varepsilon) = x(\varepsilon_1 y^{(n)}(\varepsilon); \varepsilon), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

решение уравнения (2.87).

Для нахождения явной формулы для $z^{(n)}(\varepsilon)$ построим итерационный процесс:

$$z_{k+1}(\varepsilon) + i(\phi_0 + \beta) = -\ln(\varepsilon_1 z_k(\varepsilon)e^{-i\beta} - (1 + \varepsilon_2)) + i\omega, \quad \omega \in R, \quad (2.92)$$

который сходится ввиду сходимости итерационных процессов в (2.90) и (2.91). В результате получим выражение

$$z(i\omega; \varepsilon) = i(\omega - \phi_0 - \beta) - \ln(\varepsilon_1(i(\omega - \phi_0 - \beta) - \ln(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1(i(\omega - \phi_0 - \beta)) - \dots))e^{-i\beta} - (1 + \varepsilon_2)),$$

определяющее решение уравнения (2.87) как $z^{(n)}(\varepsilon) = z(i2\pi n; \varepsilon), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2.2.4. Асимптотическое распределение нулей характеристических квазиполиномов

При изучении дифференциально-разностных уравнений возникает задача анализа распределения нулей функций вида

$$f(z) = \sum_{j=1}^m p_j(z)e^{-\theta_j z}, \quad (2.93)$$

где действительные числа θ_j удовлетворяют условию $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m$, $p_j(z) = p_{0j} + p_{1j}z + \dots + p_{nj}z^n$ — многочлены степени n с действительными коэффициентами, θ_j характеризуют в дифференциально-разностном уравнении величины отклонений аргумента.

Функции вида (2.93) называют квазиполиномами. Если при этом $p_{n0} \neq 0$, а $p_{nj} = 0 (j = 1, \dots, m)$, то такой квазиполином называется квазиполиномом запаздывающего типа. Если $p_{nm} \neq 0$, а $p_{nj} = 0 (j = 0, \dots, m-1)$, то такой квазиполином называется квазиполиномом опережающего типа, если $a_{ni} \neq 0$ и $a_{nj} \neq 0$ при $i \neq j$, то такой квазиполином называется квазиполиномом нейтрального типа.

Функции вида (2.93) являются целыми функциями, поэтому в любой ограниченной области комплексной плоскости (2.93) может иметь лишь конечное число нулей конечной кратности. Таким образом, нули $f(z)$ могут быть пронумерованы в порядке возрастания их модулей. Для приложений представляет большой интерес поведение нулей $f(z)$ при больших номерах (больших по модулю значениях).

Рассмотрим сначала квазиполином запаздывающего типа. В этом случае не может быть нулей с неограниченно возрастающей вещественной частью, так как при $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ порядок роста модуля слагаемого $p_{n0}z^n$ выше порядка роста модулей остальных слагаемых ввиду убывания модулей слагаемых вида $p_{qj}z^q e^{-\theta_j z}$ и, следовательно, выше конечной их суммы. Таким образом, все корни z_j квазиполинома запаздывающего типа удовлетворяют условию $\operatorname{Re} z \leq N$ и могут стремиться к точке $z = \infty$ лишь с условием $\operatorname{Re} z_j \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим квазиполином опережающего типа. В этом случае при $\operatorname{Re} z_j \rightarrow -\infty$ рост $|a_{nm}z^n e^{-\theta_m z}|$ выше порядка роста модулей остальных слагаемых квазиполинома, а также конечной их суммы. Поэтому для нулей z_j квазиполинома выполнено условие $\operatorname{Re} z_j \geq N$ и к точке $z = \infty$ они могут стремиться лишь с условием $\operatorname{Re} z_j \rightarrow \infty$.

Заметим следующее. Любой член квазиполинома $z^q e^{-\theta_j z}$ можно представить в виде $e^{q \ln z - \theta_j z}$. Отсюда $|z^q e^{-\theta_j z}| = e^{q \ln |z| - \theta_j \operatorname{Re} z}$. Если при $z \rightarrow \infty$ по какому-нибудь направлению возрастания $z(\tau)$ для какого-либо члена квазиполинома значение $\mu = q \ln |z| - \theta_j$ больше аналогичного выражения для других членов, то в этом направлении $\arg z = \operatorname{const}$ либо вдоль данной кривой $z(\tau)$ при $z \rightarrow \infty$ не может быть нулей $f(z)$. Если же при $z \rightarrow \infty$ по некоторой кривой $z = z(\tau)$ для нескольких членов квазиполинома величины $\mu = p \ln |z| - \theta_j \operatorname{Re} z$ совпадают и превосходят значения других членов, то вдоль этой кривой могут быть нули квазиполинома, модули которых возрастают. Для нахождения нулей достаточно рассмотреть лишь доминирующие члены, имеющие наибольшие порядки роста.

С учетом сказанного, изучим поведение нулей квазиполинома (2.93) в случае $m = 1$, что соответствует одному отклонению аргумента в

дифференциально-разностном уравнении. Для удобства запишем его в виде

$$f(z) = p(z) + q(z)e^{-\theta z}, \quad (2.94)$$

где $p(z) = p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n$, $q(z) = q_0 + q_1z + \dots + q_mz^m$. Считаем $p_n > 0$, $q_m \neq 0$, $\theta > 0$, $n \geq m$, т. е. рассматривается запаздывающий или нейтральный тип квазиполинома вида (2.94).

При больших значениях $|z|$ в первом слагаемом (2.94) доминирующим является член p_nz^n , во втором — $q_mz^me^{-\theta z}$. Следовательно, при больших $|z|$ поведение нулей (2.94) определяется корнями уравнения

$$f_1(z) = p_nz^n + q_mz^me^{-\theta z} = 0. \quad (2.95)$$

Пусть сначала $n > m$, т. е. квазиполином $f_1(z)$ имеет запаздывающий тип.

Из (2.95) имеем

$$e^{\theta z} z^p = a, \quad p = n - m, \quad a = -q_m/p_n. \quad (2.96)$$

Положим $z_k = x_k + iy_k$ — корни (2.95). Из (2.96) следует $e^{\theta x_k} |z_k|^p = |a|$ или

$$e^{2\theta x_k/p} (x_k^2 + y_k^2) = |a|^{2/p}. \quad (2.97)$$

Как отмечалось ранее при $p > 0$ $x_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{2\theta x_k/p} x_k^2 = 0. \quad (2.98)$$

Отсюда (2.97) можно записать в виде

$$e^{2\theta x_k/p} y_k^2 = |a|^{2/p} + \varepsilon_1, \quad (2.99)$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1 = 0$. Запишем (2.99) в виде $x_k^2 e^{2\theta x_k/p} (y_k/x_k)^2 = |a|^{2/p} + \varepsilon_1$. В силу условия (2.98) $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k/x_k = \infty$ и $\arg z_k = \arctg(y_k/x_k) = \pi/2 + \varepsilon_2$, где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_2 = 0$.

Логарифмируя равенство (2.96), получим равенства $\theta z_k + p \ln |z_k| + ip \arg z_k = \ln |a| + i \arg a + 2\pi k$, из которого имеем $\theta y_k + p \arg z_k = \arg a + 2\pi k$. Отсюда

$$y_k = \frac{1}{\theta} \left(-p \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + \varepsilon_3 \quad (a > 0), \quad y_k = \frac{1}{\theta} \left(-p \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k \right) + \varepsilon_3 \quad (a < 0), \quad (2.100)$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_3 = 0$. Из (2.99) получим $2\theta x_k/p + 2 \ln y_k = \ln(|a|^{2/p} + \varepsilon_1)$. Отсюда имеем $x_k = 1/\theta (-p \ln y_k + \ln |a|) + \varepsilon_4$, где $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_4 = 0$. С учетом

(2.99), (2.100) получим окончательные формулы корней (2.95) при больших k :

$$z_k \approx \frac{1}{\theta}[-p \ln(\frac{\pi}{\theta}(-p/2 + 2k)) + \ln |a|] \pm i \frac{\pi}{\theta}(-p/2 + 2k), \quad a > 0, \quad (2.101)$$

$$z_k \approx \frac{1}{\theta}[-p \ln(\frac{\pi}{\theta}(-p/2 + 2k + 1)) + \ln |a|] \pm i \frac{\pi}{\theta}(-p/2 + 2k + 1), \quad a < 0. \quad (2.102)$$

Рассмотрим теперь случай $n = m$, соответствующий случаю нейтрального типа квазиполинома $f(z)$. Из (2.95) имеем

$$e^{-\theta z} = -\frac{p_n}{q_n}, \quad -\theta z = \ln(-\frac{p_n}{q_n}).$$

Таким образом

$$z_k \approx -\frac{1}{\theta} \ln \left| \frac{p_n}{q_n} \right| \pm i \frac{2\pi k}{\theta}, \quad q_n < 0,$$

$$z_k \approx -\frac{1}{\theta} \ln \left| \frac{p_n}{q_n} \right| \pm i \frac{2\pi(2k+1)}{\theta}, \quad q_n > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Т. е. корни (2.95) расположены в некоторой полосе $x_* < \operatorname{Re} z < x_{**}$. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть дан квазимногочлен

$$f(z) = z + ae^{-z}.$$

Согласно (2.101), (2.102)

$$z_k \approx -\ln \left| \frac{\pi}{a} \left(2k - \frac{1}{2} \right) \right| \pm i\pi \left(2k - \frac{1}{2} \right) (a < 0),$$

$$z_k \approx -\ln \frac{\pi}{a} \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pm i\pi \left(2k + \frac{1}{2} \right) (a > 0).$$

2. Пусть дан квазиполином

$$f(z) = z^2 + a_0 + (b_1 z + b_0)e^{-z}.$$

Согласно (2.101), (2.102)

$$z_k \approx -\ln \frac{2\pi k}{b_1} \pm i\pi \left(2k - \frac{3}{2} \right) (b_1 > 0), \quad z_k \approx -\ln \left| \frac{2\pi k}{b_1} \right| \pm i\pi \left(2k - \frac{5}{2} \right) (b_1 < 0).$$

2.3. Методы комплексного анализа в решении краевых задач математической физики

В настоящем разделе рассмотрено применение теории конформных отображений и теории аналитических функций к построению решений краевых задач для уравнения Лапласа и бигармонического уравнения.

2.3.1. Уравнение Лапласа. Свойства его решений

Исследование стационарных процессов различной физической природы приводит к изучению решений следующего дифференциального уравнения:

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (2.103)$$

относительно функции $u(x, y)$ переменных (x, y) , принадлежащих некоторой плоской области Ω . Уравнение (2.103) носит название уравнения Лапласа⁶, а определяющий его оператор Δu – оператора Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, носят название гармонических функций.

Рассмотрим основные свойства решений уравнения (2.103).

Пусть в комплексной области Ω переменной $z = x + iy$ задана аналитическая функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, являясь бесконечно дифференцируемыми, в точках области удовлетворяют условиям Коши–Римана (утверждение 1.4):

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \quad (2.104)$$

Продифференцировав первое соотношение (2.104) по x , второе – по y и сложив их, получим, что $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ для $(x, y) \in \Omega$. Аналогично продифференцировав первое соотношение по y , а второе – по x и вычтя одно из другого, получим равенство $v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0$ для $(x, y) \in \Omega$. Таким образом, действительная и мнимая части любой аналитической функции комплексной переменной являются гармоническими функциями. Наоборот, если даны две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определенные в области Ω и удовлетворяющие условиям (2.104), то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) является аналитической в Ω . Таким образом, функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексной переменной

⁶ Лаплас Пьер-Симон (фр. Pierre-Simon de Laplace, 1749–1827) — французский математик, механик, физик и астроном. Известен работами в области небесной механики, дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны: он усовершенствовал почти все разделы этих наук.

$z = x + iy$ в области Ω является аналитической тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точках области Ω будут гармоническими и удовлетворять условиям Коши–Римана. Гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определенные в области Ω и удовлетворяющие условиям (2.104), называются взаимно сопряженными. Отметим, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ могут быть восстановлены одна через другую с точностью до постоянной (п. 1.1.5, свойства аналитических функций, свойство 4).

Рассмотрим важное свойство уравнения (2.103) – его инвариантность при конформном невырожденном преобразовании независимых переменных. Пусть имеется невырожденное преобразование независимых переменных $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ согласно

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \\ D(\xi, \eta)/D(x, y) &= \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0, \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.105)$$

отображающее область Ω плоскости (x, y) в область G плоскости (ξ, η) . В силу (2.105) существуют однозначные функции $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, обратные к (2.105) и отображающие область G в область Ω . Запишем уравнение (2.103) в переменных (ξ, η) . $w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Пересчитаем

$$\begin{aligned} u_{xx} &= w_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2w_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + w_{\eta\eta} \eta_x^2 + w_{\xi} \xi_{xx} + w_{\eta} \eta_{xx}, \\ u_{yy} &= w_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2w_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + w_{\eta\eta} \eta_y^2 + w_{\xi} \xi_{yy} + w_{\eta} \eta_{yy} \end{aligned} \quad (2.106)$$

и подставим в (2.103). В результате получим

$$w_{\xi\xi}(\xi_x^2 + \xi_y^2) + 2w_{\xi\eta}(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) + w_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + w_{\xi}(\xi_{xx} + \xi_{yy}) + w_{\eta}(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0. \quad (2.107)$$

Предположим, что отображение (2.105) является конформным, т. е. функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ являются вещественной и мнимой частями аналитической функции $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ в области Ω комплексной плоскости и при этом $|f'(z)| \neq 0$. В соответствии с этим

$$\xi_x(x, y) = \eta_y(x, y), \quad \xi_y(x, y) = -\eta_x(x, y). \quad (2.108)$$

Кроме того, $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, как отмечено выше, являются гармоническими функциями. С учётом сказанного и соотношения $|f'(z)|^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 = \eta_x^2 + \eta_y^2$ выражение (2.107) запишется в виде

$$|f'(z)|^2(w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}) = 0.$$

Таким образом, вид уравнения (2.103) при конформном преобразовании, т. е. удовлетворяющем условиям (2.105), (2.108), не изменяется. Это важное

свойство уравнения (2.103) широко используется при построении решений в конформно инвариантных областях.

Перейдем в плоскости (x, y) к полярным координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (2.109)$$

и запишем уравнение (2.103) для функции $u(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\rho\rho}\rho_x^2 + 2u_{\rho\varphi}\rho_x\varphi_x + u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + u_{\rho}\rho_{xx} + u_{\varphi}\varphi_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{\rho\rho}\rho_y^2 + 2u_{\rho\varphi}\rho_y\varphi_y + u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + u_{\rho}\rho_{yy} + u_{\varphi}\varphi_{yy}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Дифференцируя (2.109) по x с учётом $\rho = \rho(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$, получим

$$1 = \rho_x \cos \varphi - \rho \sin \varphi \varphi_x, \quad 0 = \rho_x \sin \varphi + \rho \cos \varphi \varphi_x.$$

Отсюда

$$\rho_x = \cos \varphi, \quad \varphi_x = -\sin \varphi / \rho. \quad (2.111)$$

Аналогично, дифференцируя (2.109) по y и выражая ρ_y , φ_y , получим

$$\rho_y = \sin \varphi, \quad \varphi_y = \cos \varphi / \rho. \quad (2.112)$$

Дифференцируя теперь выражение (2.111) и (2.112) по x и y соответственно, с учётом выражений для ρ_x , φ_x , ρ_y , φ_y , получим

$$\rho_{xx} = \sin^2 \varphi / \rho, \quad \varphi_{xx} = \sin(2\varphi) / \rho^2, \quad \rho_{yy} = \cos^2(\varphi) / \rho, \quad \varphi_{yy} = -\sin(2\varphi) / \rho. \quad (2.113)$$

Подставив теперь (2.110), с учётом (2.111) – (2.113), в (2.103), будем иметь уравнение для определения $u(\rho, \varphi)$:

$$\Delta_{\rho\varphi} u \equiv u_{\rho\rho} + u_{\varphi\varphi} / \rho^2 + u_{\rho} / \rho = (\rho u_{\rho})_{\rho} / \rho + u_{\varphi\varphi} / \rho^2 = 0 \quad (2.114)$$

в полярных координатах.

Найдем решение уравнения (2.114) вида $u(\rho, \varphi) \equiv u(\rho)$, т. е. не зависящее от угловой переменной.

Подставив $u(\rho)$ в (2.114), имеем

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 0, \quad u(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2,$$

где c_1 , c_2 – произвольные постоянные. Выбрав $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, получим решение

$$u(\rho) = \ln \frac{1}{\rho}, \quad (2.115)$$

которое называется фундаментальным решением уравнения Лапласа. При $\rho \neq 0$ это гармоническая функция.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – гармонические функции, определенные в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей γ и непрерывные в $\bar{\Omega}$ вместе с производными до второго порядка включительно. Положим $U(x, y) = -u_y(x, y)v(x, y)$, $V(x, y) = u_x(x, y)v(x, y)$ и применим к этим функциям формулу Грина (утверждение 1.6). В результате получим выражение

$$\int_{\gamma} -u_y v dx + u_x v dy = \int_{\Omega} (u_{xx} + u_{yy})v dx dy + \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy,$$

которое с учётом равенств $dx = x'(s) ds$, $dy = y'(s) ds$, где $(x(s), y(s))$ – уравнение параметрического задания границы γ от длины дуги, а также равенства $u_{xx} + u_{yy} = 0$, перепишем в виде

$$\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v ds = \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy, \quad (2.116)$$

где $n = (y'(s), -x'(s))$ – вектор внешней нормали к границе γ . Если в (2.116) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ поменять местами и полученное равенство вычесть из равенства (2.116), то получим следующее интегральное равенство:

$$\int_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (2.117)$$

Используя равенства (2.116) и (2.117), установим некоторые свойства гармонических функций.

1. Если $u(x, y)$ – гармоническая в области Ω функция и γ – замкнутая кривая, лежащая в Ω , то

$$\int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (2.118)$$

◀ Действительно, положив в (2.116) $v(x, y) \equiv 1$, получим (2.118). ▶

2. Пусть $u(x, y)$ – гармоническая в ограниченной области Ω с кусочно гладкой границей γ функция, непрерывная со своими производными до второго порядка включительно в $\bar{\Omega}$. Тогда в любой точке $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ справедливо представление

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\ln \frac{1}{R_{MM_0}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - u(x, y) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds, \quad (2.119)$$

где $R_{MM_0} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$, а (x, y) – текущая точка границы. Формула (2.119) носит название интегральной формулы представления гармонической функции через её значения на границе.

◀ Для доказательства проведем окружность радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0) и обозначим через K_ε круг, ограниченный этой окружностью. Рассмотрим область $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus K_\varepsilon$. Функция $v(x, y) = \ln 1/R_{M_0M}$ имеет особенность только в точке (x_0, y_0) , поэтому в области Ω_ε она является гармонической. Применим к $u(x, y)$ и $v(x, y)$ формулу (2.117). Граница Ω_ε состоит из двух независимых кусков γ и γ_ε . С учётом этого (2.117) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{M_0M}} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds = \\ & = \int_{\gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.120)$$

С учётом равенства на γ_ε

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} = -\frac{d}{dR_{MM_0}} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{R_{MM_0}} = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.121)$$

и непрерывности $u(x, y)$, на основании интегральной теоремы о среднем значении имеем

$$\int_{\gamma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} ds = 2\pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot u(x^*, y^*) = 2\pi u(x^*, y^*),$$

где $(x^*, y^*) \in K_\varepsilon$. Второй интеграл в (2.120), с учётом непрерывности $\partial u / \partial n$ на γ_ε и интегральной теоремы о среднем значении, будет равен

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} ds = \frac{\partial u(x^{**}, y^{**})}{\partial n} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2\pi \varepsilon. \quad (2.122)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ $u(x^*, y^*) \rightarrow u(x_0, y_0)$, а правая часть (2.122) стремится к нулю. С учётом этого из (2.120) имеем формулу (2.119). ►

3. Пусть функция $u(x, y)$ – гармоническая в области Ω функция и γ_R – окружность с центром в (x_0, y_0) , лежащая в Ω и ограничивающая круг K_R радиуса R . Тогда

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma_R} u(x, y) ds, \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{K_R} u(x, y) dx dy. \quad (2.123)$$

Это свойство носит название теоремы о среднем значении гармонической функции.

◀ Из (2.119) с учётом выражения (2.121), свойства 1, равенства $\ln(1/R_{MM_0}) = \ln(1/R)$ имеем первое равенство (2.123). Интегрируя теперь его по R как по параметру от нуля до конечного значения радиуса круга, получим второе равенство (2.123). ▶

4. Это свойство сходно с утверждением 1.11 и называется теоремой о максимуме гармонической функции.

Пусть $u(x, y)$ – гармоническая в ограниченной области Ω функция и непрерывная в $\bar{\Omega}$. Тогда её максимальное значение достигается на границе.

◀ Обозначим через $M = \max_{\bar{\Omega}} u(x, y)$. Предположим противное, т. е. существует точка $(x_0, y_0) \in \Omega$ такая что $u(x_0, y_0) = M$. Проведем окружность γ_{R_1} радиуса R_1 с центром в точке (x_0, y_0) таким образом, чтобы круг K_{R_1} , ограниченный этой окружностью, принадлежал Ω . Тогда справедлива первая формула (2.123), в которой R необходимо заменить на R_1 и γ_R на γ_{R_1} . Из неё имеем равенство

$$M2\pi R_1 = u(x_0, y_0)2\pi R_1 = \int_{\gamma_{R_1}} u(x, y) ds. \quad (2.124)$$

Если предположить, что непрерывная функция $u(x, y)$ на границе круга γ_{R_1} имеет в некоторой точке значение меньше, чем M , то для того, чтобы выполнялось равенство, ей необходимо в некоторой точке иметь значение большее, чем M , а это противоречит предположению, что $M = \max_{\bar{\Omega}} u(x, y)$. Таким образом, функция $u(x, y)$ может принимать в точках границы γ_{R_1} только значение, равное M . В силу произвольности R_1 , функция $u(x, y)$ принимает постоянное значение, равное M в некотором круге $K_{R_1} \subset \Omega$. Далее, двигаясь по некоторой кривой γ , соединяющей точку (x_0, y_0) с границей Γ , за конечное число шагов подойдем к Γ , где функция $u(x, y)$ также должна быть равной M . Эта схема использовалась при доказательстве утверждения 1.11. ▶

Отметим, что минимальное значение $u(x, y)$ также достигается на Γ . Для этого достаточно рассмотреть функцию $-u(x, y)$. Таким образом, $\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)| = \max_{\Gamma} |u(x, y)|$.

2.3.2. Задача Дирихле

Для уравнения (2.103) рассматривается следующая краевая задача. Пусть Ω – ограниченная область в плоскости (x, y) с кусочно-гладкой границей Γ и $f(x, y)$ – непрерывная на Γ функция. Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (2.125)$$

внутри области Ω , непрерывную в $\overline{\Omega}$ и принимающую заданное значение $f(x, y)$ на границе Γ :

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y). \quad (2.126)$$

Краевая задача (2.125), (2.126) называется внутренней задачей Дирихле⁷ для уравнения Лапласа.

Следующая задача называется внешней задачей Дирихле.

Пусть имеются ограниченная односвязная область Ω плоскости (x, y) с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывная на Γ функция $f(x, y)$. Требуется найти непрерывную и ограниченную в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (2.125) в области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ и принимающую заданное значение $f(x, y)$ на Γ .

Утверждение 2.11. (Теорема единственности решения внутренней и внешней задач Дирихле) Решение внутренней задачи Дирихле единственно. Решение внешней задачи Дирихле единственно.

◀ Первая часть утверждения доказывается совсем просто. Пусть имеются два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Их разность $v(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.125) и условию на границе $v(x, y)|_{\Gamma} = 0$. Из свойства 4 имеем $v(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in \Omega$.

Для доказательства второй части утверждения также предположим существование двух решений. Каждое из этих решений ограничено, т. е. $|u_j(x, y)| \leq N$, тогда $|v(x, y)| \leq 2N$.

$v(x, y)$ также удовлетворяет уравнению (2.125) и $v(x, y)|_{\Gamma} = 0$. Выберем точку $M = (x_0, y_0) \in \Omega$ и проведем две окружности радиусов R_0 и R_1 соответственно с центром в (x_0, y_0) таким образом, чтобы $K_{R_0} \subset \Omega$, а $\Omega \subset \subset K_{R_1}$. Пусть $M = (x, y)$ – произвольная точка области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Рассмотрим

⁷ Дирихле Иоганн Петер Густав Лежён (нем. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел, а также в механику и математическую физику.

функцию

$$V(x, y) = 2N \ln(R_{M_0 M}/R_0)/\ln(R_1/R_0). \quad (2.127)$$

Выберем R_1 таким образом, чтобы точка $M = (x, y) \in K_{R_1}$. Функция $V(x, y)$ является гармонической в кольце $G = K_{R_1} \setminus \bar{\Omega}$ и непрерывна в \bar{G} . $V(x, y) \geq 0$ и на границе области G выполняется неравенство $|v(x, y)| \leq V(x, y)$. Фиксируем теперь точку $M = (x, y) \in G$ и устремляем $R_1 \rightarrow \infty$. Правая часть (2.127) стремится к нулю. В силу произвольности выбора точки M , $v(x, y) \equiv 0$. ►.

2.3.3. Методы построения решения задачи Дирихле

Существуют различные методы построения решения задачи Дирихле. Они часто связаны с характером области Ω . Рассмотрим наиболее универсальные из них, и связанные с теорией функций комплексного переменного.

Начнем с метода конформных преобразований. Он достаточно универсален и может быть использован для широкого класса плоских областей. Пусть сначала рассматриваемая область – круг K_R радиуса R с центром в нуле. Введем в круге полярную систему координат (ρ, φ) , граничная функция $f(x, y)$ преобразуется в $f(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$. Выберем произвольную точку (ρ_0, φ_0) внутри круга и построим конформное отображение круга K_R комплексной плоскости $z = x + iy$ в единичный круг $|w| < 1$ плоскости w таким образом, чтобы точка $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ перешла в точку $w = 0$. Согласно п.2.1.2 имеем

$$w(z) = \frac{R}{\rho_0} \frac{z - z_0}{z - R^2/\bar{z}_0} = \frac{R}{\rho_0} \frac{\rho e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}}{\rho e^{i\varphi} - R^2 e^{i\varphi_0}/\rho_0}. \quad (2.128)$$

Введем в плоскости w полярные координаты $w = re^{i\psi}$. В результате этого преобразования функция $u(\rho, \varphi) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ перейдет в функцию $w(r, \psi) = u(\rho(r, \psi), \varphi(r, \psi))$, где $\rho(r, \psi), \varphi(r, \psi)$ связаны соотношением (2.128). При этом граничная функция $f(\varphi)$ перейдет в $F(\psi) = f(\varphi(1, \psi))$. В соответствии с первым равенством (2.123)

$$w(+0, \psi) = u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi) d\psi. \quad (2.129)$$

В соответствии с (2.128) на границе $w = e^{i\psi}$ круга $|w| < 1$ имеем

$$e^{i\psi} = \frac{R}{\rho_0} \frac{R e^{i\varphi} - \rho_0 e^{i\varphi_0}}{R e^{i\varphi} - R^2 e^{i\varphi_0}/\rho_0}.$$

Отсюда

$$d\psi = \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi \equiv K(\rho_0, \varphi_0, R, \varphi) d\varphi. \quad (2.130)$$

Перейдя теперь в интеграле (2.129) к переменной φ , с учетом (2.130) получим

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)f(\varphi) d\varphi}{R^2 + \rho_0^2 - R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = \int_0^{2\pi} K(\rho_0, \varphi_0, R, \varphi) f(\varphi) d\varphi. \quad (2.131)$$

Формула (2.131) носит название интеграла Пуассона⁸. Функция $K(\rho_0, \varphi_0, R, \varphi)$ при этом носит название ядра Пуассона. Отметим, что (2.131) даёт решение внутренней задачи Дирихле в K_R . Решение внешней задачи Дирихле для $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{K}_R$ дается формулой (2.131) с заменой R на ρ_0 и наоборот.

Используя метод конформных преобразований, построим решение задачи Дирихле для полуплоскости. Пусть требуется найти ограниченную в полуплоскости $y > 0$ гармоническую функцию $u(x, y)$, непрерывную в области $y \geq 0$ и удовлетворяющую граничному условию

$$u(x, 0) = f(x),$$

где $f(x)$ – непрерывная, ограниченная при $-\infty < x < \infty$ функция, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Отобразим конформно полуплоскость $\text{Im } z > 0$ плоскости $z = x + iy$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, чтобы точка $z_0 = x_0 + iy_0$ перешла при этом в точку $w = 0$. Это осуществляет дробно-линейное отображение (см. п.2.1.2):

$$w(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

При этом в точках границы имеем

$$e^{i\psi} = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}, \quad d\psi = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx. \quad (2.132)$$

⁸ Пуассон Симеон Дени (фр. Simeon Denis Poisson, 1781–1840) — знаменитый французский математик, механик и физик, число научных трудов которого превосходит 300. Они относятся к разным областям чистой математики, математической физики, теоретической и небесной механики.

Граничная функция $f(x)$ перейдет в $F(\psi) = f(x(\psi))$, где $x(\psi)$ определяется из первого равенства (2.132). В результате решение $u(x_0, y_0)$ определяется формулой (2.129), которая после замены переменных в интеграле преобразуется с учётом (2.132) в выражение

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0 f(x) dx}{(x - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Метод конформных преобразований может быть применен и для других областей, которые можно конформно преобразовать в единичный круг.

2.3.4. Метод функции источника

Этот метод наряду с возможностью получения интегральных формул для решения задачи Дирихле в некоторых областях даёт удобный аппарат аналитического представления решения.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – гармонические функции, определенные в ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей γ и непрерывные в $\bar{\Omega}$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Для них справедливы равенства (2.117) и (2.118). Прибавив одно к другому и введя в рассмотрение функцию

$$G(M_0, M) = G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(x, y), \quad (2.133)$$

$R_{MM_0} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$, получим итоговое выражение

$$u(x_0, y_0) = \int_{\gamma} (G(x_0, y_0, x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} - u(x, y) \frac{\partial G(x_0, y_0, x, y)}{\partial n}) ds.$$

Точка $M_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, точка $M = (x, y)$ принимает значения на γ и является переменной интегрирования.

Выберем функцию $v(x, y)$ в (2.133) таким образом, чтобы $G(M_0, M)|_{\gamma} = 0$. Тогда решение внутренней задачи Дирихле (2.125), (2.126) запишется в виде

$$u(x_0, y_0) = - \int_{\gamma} f(x, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x_0, y_0, x, y) ds. \quad (2.134)$$

При этом гармоническая функция $v(x, y)$ удовлетворяет условию

$$v(x, y)|_{\gamma} = - \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

Функция $G(M, M_0)$ называется функцией источника (функцией Грина) внутренней задачи Дирихле для области Ω .

Пусть функция $w = w(z_0, z)$ осуществляет конформное отображение области Ω плоскости z на внутренность круга $|w| < 1$ так, что точка $z_0 \in \Omega$ переходит в центр круга $w = 0$.

Утверждение 2.12. *Функция*

$$G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w(z_0, z)|}, \quad (2.135)$$

где $z_0 = x_0 + iy_0, z = x + iy$, является функцией источника внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω .

◀ Функция $w(z_0, z)$, осуществляющая конформное отображение области Ω комплексной плоскости z в область $|w| < 1$, является аналитической функцией в Ω и $w(z_0, z) \neq 0$ при $z \neq z_0$.

Отсюда следует, что $\ln w(z_0, z) = \ln |w(z_0, z)| + i \arg w(z_0, z)$ является аналитической функцией z везде за исключением $z = z_0$. Функция $\ln |w(z_0, z)|$ является гармонической при $z \neq z_0$ как действительная часть аналитической функции. Функция (2.135) также является гармонической при $z \neq z_0$ функцией, $|w(z, z_0)| \neq 0$ при $z \in \Omega$ и $w(z, z_0) = (z - z_0)\varphi(z_0, z)$, $\varphi(z_0, z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0, z)$ – аналитическая в Ω функция. Кроме того, $|w(z, z_0)|_{|z=\gamma} = 1$. В связи с этим функция (2.135) имеет представление (2.133) и $G|_\gamma = 0$. ▶

В соответствии с (2.128) и (2.135) функция источника внутренней задачи Дирихле для круга K_R будет иметь вид

$$G(\rho_0, \varphi_0, \rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\rho_0^2 \rho^2 + R^4 - 2R^2 \rho \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{R^2 \rho^2 + R^2 \rho_0^2 - 2R^2 \rho \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (2.136)$$

Подставив теперь (2.136) в (2.134) с учётом равенств $\partial G / \partial n = \partial G / \partial \rho$,

$$\frac{\partial G(\rho_0, \varphi_0, \rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = -2K(\rho_0, \varphi_0, R, \varphi)$$

и $f(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$, получим выражение (2.131).

Построим решение задачи Дирихле для области (полосы) $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < \pi\}$. Пусть требуется найти гармоническую функцию $u(x, y)$, непрерывную в области $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, \pi) = f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывные и ограниченные при $-\infty < x < \infty$ функции, удовлетворяющие условиям $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x)$.

Построим для этой области функцию-источник. Заметим, что конформное преобразование, отображающее область Ω в единичный круг $|w| < 1$, при котором точка z_0 переходит в точку $w = 0$, имеет вид (см. п.2.1.2)

$$w(z_0, z) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\bar{z}_0}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= [(e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0)^2 + (e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0)^2]^{1/2} = \\ &= e^{(x+x_0)/2} \sqrt{2} (\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0))^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(x_0, y_0, x, y) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y+y_0)}{\operatorname{ch}(x-x_0) - \cos(y-y_0)}.$$

В итоге, с учетом равенств $\partial G/\partial n = \partial G/\partial y$ при $y = \pi$ и $\partial G/\partial n = -\partial G/\partial y$ при $y = 0$, имеем искомое решение

$$u(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0, x, y)|_{y=0} f_1(x) + \frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0, x, y)|_{y=\pi} f_2(x) \right) dx.$$

2.3.5. Метод аналитических функций построения решения задачи Дирихле и бигармонической краевой задачи

В плоской ограниченной односвязной области Ω с гладкой границей Γ рассматриваются следующие краевые задачи:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = f(s), \quad (2.137)$$

$$\Delta^2 v = 0, \quad v|_{\Gamma} = f_1(s), \quad \partial v/\partial n = f_2(s), \quad (2.138)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, $\Delta^2 v \equiv v_{xxxx} + 2v_{xxyy} + v_{yyyy}$, параметр $s \in [s_0, s_1]$ характеризует точку границы Γ , n – направление внешней нормали к границе области Ω , функции $f(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s) \in C^2[s_0, s_1]$ (пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций).

Функции, удовлетворяющие уравнению (2.138), называются бигармоническими.

Введем комплексную переменную $z = x + iy$ и перепишем краевые задачи (2.137), (2.138) в терминах аналитических функций переменной z . С учетом $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/(2i)$, запишем

$$u = u((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/(2i)), v = v((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/(2i)) \quad (2.139)$$

и будем рассматривать (2.139) как функции z и \bar{z} . Из (2.139) имеем $u_z = (u_x - iu_y)/2$, $u_{\bar{z}} = (u_x + iu_y)/2$ и

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} \equiv 4u_{z\bar{z}}, \quad \Delta^2 v \equiv v_{xxxx} + 2v_{xxyy} + v_{yyyy} \equiv 16v_{zz\bar{z}\bar{z}}.$$

Таким образом, уравнения (2.137) и (2.138) соответственно примут вид

$$u_{z\bar{z}} = 0, \quad (2.140)$$

$$v_{zz\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (2.141)$$

Уравнения (2.140) и (2.141) легко интегрируются. Интегрируя (2.140) по \bar{z} , получим уравнение $u_z = \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ – произвольная функция z . Интегрируя теперь это уравнение по z , будем иметь

$$u(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^z \varphi_1(z_1) dz_1 + \varphi_2(\bar{z}), \quad (2.142)$$

где $\varphi_2(\bar{z})$ – произвольная функция \bar{z} . Так как $u(z, \bar{z})$ гармоническая функция, которая является действительной частью функции комплексного переменного, то согласно (2.142) имеем выражение

$$u(z, \bar{z}) = (\varphi(z) + \overline{\varphi(z)})/2, \quad (2.143)$$

где $\varphi(z)$ – произвольная аналитическая в области Ω функция z .

Интегрируя аналогичным образом уравнение (2.141), получим общее решение уравнения (2.141) в виде

$$v(z, \bar{z}) = (\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)} + \bar{z}\varphi_2(z) + z\overline{\varphi_2(z)})/2, \quad (2.144)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ – произвольные аналитические в области Ω функции z .

Граничное условие в (2.137) для функции (2.143) примет вид

$$(\varphi(z) + \overline{\varphi(z)})|_{\Gamma} = 2f(s). \quad (2.145)$$

Задача (2.137) свелась, таким образом, к отысканию аналитической в области Ω функции $\varphi(z)$, действительная часть которой обращается на границе Γ в заданную функцию $f(s)$.

Выразим граничные условия в (2.138) через функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Заметим, что $v_x = v_z + v_{\bar{z}}$, $v_y = (v_z - v_{\bar{z}})i$. Отсюда

$$\partial v / \partial n = v_x \cos(n \wedge x) + v_y \cos(n \wedge y) = v_z \sigma(z) + v_{\bar{z}} \overline{\sigma(z)},$$

где $\sigma(z) = \cos(n \wedge x) + i \cos(n \wedge y)$ – известная на Γ функция. С учетом этого, граничные условия в (2.138) можно записать в следующем виде:

$$(\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)} + \bar{z}\varphi_2(z) + z\overline{\varphi_2(z)})|_{\Gamma} = 2f_1(s), \quad (2.146)$$

$$[(\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_2(z)} + \bar{z}\varphi_2'(z))\sigma(z) + (\overline{\varphi_1'(z)} + \varphi_2(z) + z\overline{\varphi_2'(z)})\overline{\sigma(z)}]|_{\Gamma} = 2f_2(s). \quad (2.147)$$

Таким образом, задача (2.138) свелась к отысканию двух аналитических в области Ω функций, удовлетворяющих на границе Γ условиям (2.146), (2.3.5).

В общем случае задача нахождения функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условию (2.145), и функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, удовлетворяющих условиям (2.146), (2.3.5), является непростой задачей. Рассмотрим эти задачи в предположении, что область Ω является кругом K_R радиуса R с центром в нуле. Точку на границе K_R обозначим $\zeta = R \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Имеем $f(s) = f(R\theta) = f^*(\theta)$ (* в дальнейшем опустим). В результате равенство (2.145) на границе круга может быть записано в виде

$$\varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)} = 2f(\theta), \theta = -i \ln(\zeta/R) \quad (\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)). \quad (2.148)$$

Умножим равенство (2.148) на $d\zeta/[2\pi i(\zeta - z)]$ и проинтегрируем по Γ . В результате имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\varphi(\zeta)} d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2.149)$$

Первый интеграл в (2.149) по теореме Коши (утверждение 1.7) определяет функцию $\varphi(z)$. Покажем, что второй интеграл равен $\overline{\varphi(0)}$. Представим $\bar{\zeta}$ с учетом равенства $\bar{\zeta} = R^2/\zeta$ ($\zeta = R \exp(i\theta)$) на границе Γ :

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \overline{\varphi(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{\zeta}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n R^{2n} / \zeta^n.$$

Отсюда с учетом равенства $\bar{a}_0 = \overline{\varphi(0)}$ получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_n R^{2n} d\zeta}{\zeta^n (\zeta - z)} = \overline{\varphi(0)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1, \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta^n (\zeta - z)} = 0 \right)$$

($n > 0$). В связи с этим и согласно (2.149)

$$\varphi(0) + \overline{\varphi(0)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\zeta}{\zeta}.$$

В итоге имеем

$$u(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\theta) d\zeta}{\zeta}. \quad (2.150)$$

Введем в K_R полярные координаты $z = \rho \exp(i\phi)$ и положим $u(\rho, \phi) = u(\rho \exp(i\phi), \rho \exp(-i\phi))$. При этом будем иметь $d\zeta = iR \exp(i\theta) d\theta = i\zeta d\theta$. В результате с учетом равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R \exp(i\theta)}{R \exp(i\theta) - \rho \exp(i\phi)} + \frac{R \exp(-i\theta)}{R \exp(-i\theta) - \rho \exp(-i\phi)} - 1 \right) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta - \phi)} \equiv K(\rho, \phi, R, \theta) \end{aligned}$$

выражение (2.150) примет вид

$$u(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} K(\rho, \phi, R, \theta) f(\theta) d\theta, \quad (2.151)$$

т. е. получили формулу Пуассона (2.131).

Рассмотрим теперь в круге K_R бигармоническую краевую задачу. Представим функции, входящие в (2.144), в виде:

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Заметим, что

$$z \overline{\varphi_2(z)} + \bar{z} \varphi_2(z) = \bar{b}_0 z + b_0 \bar{z} + z \bar{z} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{b}_n z^{n-1} + b_n \bar{z}^{n-1}).$$

Это дает возможность представление (2.144) записать в следующем виде:

$$v(z, \bar{z}) = [\varphi_1^*(z) + \overline{\varphi_1^*(z)} + z\bar{z}(\varphi_2^*(z) + \overline{\varphi_2^*(z)})]/2, \quad (2.152)$$

где $\varphi_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$ – произвольные аналитические в K_R функции z . Перейдя теперь в K_R к полярным координатам, выражение (2.152) для $v(\rho, \phi) = v(\rho \exp(i\phi), \rho \exp(-i\phi))$ запишем следующим образом:

$$v(\rho, \phi) = v_1(\rho, \phi) + (\rho^2 - R^2)v_2(\rho, \phi), \quad (2.153)$$

где $v_1(\rho, \phi), v_2(\rho, \phi)$ – произвольные гармонические функции. Представим $f_j(s) = f_j(R\phi) = f_j^*(\phi), j = 1, 2$ (* в дальнейшем опустим). Из (2.153) и первого граничного условия (2.138) имеем $v(R, \phi) = v_1(R, \phi) = f_1(\phi)$. Таким образом, согласно (2.152)

$$v_1(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} K(\rho, \phi, R, \theta) f_1(\theta) d\theta.$$

Выражение (2.153) и второе граничное условие в (2.138) дают

$$v_2(R, \phi) = (2R)^{-1}(f_2(\phi) - \partial v_1(\rho, \phi)/\partial \rho|_{\rho=R}).$$

В итоге решение задачи (2.138) для круга K_R дается выражением

$$\begin{aligned} v(\rho, \phi) = & \int_0^{2\pi} K(\rho, \phi, R, \theta) [f_1(\theta) + \\ & + (2R)^{-1}(R^2 - \rho^2) \left(\int_0^{2\pi} K_\rho(R, \theta, R, \theta_1) f_1(\theta_1) d\theta_1 - f_2(\theta) \right)] d\theta. \end{aligned} \quad (2.154)$$

В заключение отметим следующее. Если произвольная области Ω с гладкой границей может быть конформно отображена в круг K_R , то решение задач (2.137), (2.138) для такой области строится суперпозицией конформного отображения и выражений (2.151), (2.154).

2.3.6. Задача Неймана

В плоской ограниченной односвязной области Ω с гладкой границей Γ для уравнения (2.103) рассматривается следующая краевая задача:

$$\Delta u = 0, \quad \partial u / \partial n|_\Gamma = f(x, y), \quad (2.155)$$

где n – направление внешней нормали к Γ (по отношению к Ω), $f(x, y)$ – непрерывная на Γ функция. Требуется найти гармоническую в Ω функцию $u(x, y)$, имеющую непрерывные производные первого порядка в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющую условию (2.155) на границе Γ . Сформулированная задача называется внутренней задачей Неймана⁹ для уравнения Лапласа в области Ω .

Следующая задача называется внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Пусть имеется односвязная ограниченная область Ω с гладкой границей Γ и непрерывная на Γ функция $f(x, y)$. Требуется найти ограниченную гармоническую в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ функцию $u(x, y)$, имеющую в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ непрерывные производные первого порядка, удовлетворяющую условию (2.155) на границе Γ , где n – направление внешней нормали к Γ (по отношению к $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$).

Отметим следующее. Необходимым условием существования решения краевой задачи (2.155), согласно (2.118), является условие

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = 0. \quad (2.156)$$

В дальнейшем это условие для функции $f(x, y)$ предполагаем выполненным.

Условия гладкости границы Γ в определениях решений могут быть ослаблены условием кусочной гладкости.

Рассмотрим только внутреннюю задачу Неймана.

Утверждение 2.13. (Теорема единственности решения задачи Неймана) Решения внутренней задачи Неймана определяются с точностью до постоянной.

◀ Предположим, что существуют два решения $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$. Рассмотрим их разность: $v(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. Для $v(x, y)$ имеем краевую задачу

$$\Delta v = 0, \quad \partial v / \partial n_{\Gamma} = 0.$$

Применим для функции $v(x, y)$ формулу (2.116), взяв в ней в качестве функции $u(x, y)$ функцию $v(x, y)$. В результате получим

$$\int_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} v ds = 0.$$

⁹ Нейман Карл Готфрид (нем. Carl Gottfried Neumann, 1832–1925) — немецкий математик. Основные труды связаны с исследованиями по дифференциальным уравнениям, алгебраическим функциям, дифференциальным уравнениям с частными производными, теорией потенциала.

Отсюда $v_{xy} \equiv 0$ при $(x, y) \in \Omega$, т. е. $v(x, y) = c$, где c – некоторая постоянная.



Покажем, что задача Неймана для гармонической функции $u(x, y)$ может быть сведена к решению задачи Дирихле для сопряженной с ней гармонической функции $v(x, y)$.

В точках границы Γ введем параметризацию s , где s – длина дуги границы, отсчитываемой от некоторой точки s_0 . В точках границы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x \wedge n) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y \wedge n), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x \wedge s) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(y \wedge s),$$

где соответственно $\cos(x \wedge n)$, $\cos(y \wedge n)$ и $\cos(x \wedge s)$, $\cos(y \wedge s)$ – косинусы углов между осями x , y и направлением внешней нормали и касательной к Γ в точке границы, характеризуемой параметром s . С учетом равенств

$$\cos x \wedge n = \cos(\pi/2 - x \wedge s), \quad \cos y \wedge n = \cos(\pi/2 + y \wedge s)$$

и условий Коши–Римана ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$), выполняемых для сопряженных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, получим равенства

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y) = f(s), \quad v(s) = \int_{s_0}^s f(s_1) ds_1 = g(s), \quad (2.157)$$

где $f(s)$ – параметрическая запись функции $f(x, y)$ вдоль Γ .

В результате имеем задачу Дирихле для нахождения функции $v(x, y)$ в области Ω с граничным условием (2.157). Найдя $v(x, y)$, искомую $u(x, y)$ восстановим согласно п. 1.1.5 (свойства аналитических функций, свойство 4) интегрированием

$$u(x, y) = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_{y_1}(x_1, y_1) dx_1 - v_{x_1}(x_1, y_1) dy_1 + c,$$

где (x_0, y_0) – произвольная точка области Ω , c – произвольная постоянная, интегрирование ведется по любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) .

Рассмотрим задачу Неймана для круга K_R радиуса R с центром в нуле.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – взаимно сопряженные гармонические функции, определяющие решения рассматриваемой задачи. Введем в рассмотрение функцию $g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ переменной $z = x + iy$, аналитическую в круге K_R комплексной плоскости. Полагая $z = \rho e^{i\phi}$, с учетом условий

Коши–Римана, выраженных в полярных координатах $\rho u_\rho = v_\phi$, $\rho v_\rho = -u_\phi$, а также равенств $\rho_x = \cos \phi$, $\phi_x = -\sin \phi / \rho$, будем иметь выражение

$$\begin{aligned} g'(z) &= u_\rho \rho_x + u_\phi \phi_x + i(v_\rho \rho_x + v_\phi \phi_x) = u_\rho \cos \phi - u_\phi \sin \phi / \rho + \\ &\quad + i(v_\rho \cos \phi - v_\phi \sin \phi / \rho) = \\ &= (u_\rho + iv_\rho) \cos \phi - i(u_\rho + iv_\rho) \sin \phi = (u_\rho + iv_\rho) e^{-i\phi} = \frac{\rho}{z} (u_\rho + iv_\rho). \end{aligned}$$

Отсюда задача нахождения $u(\rho, \phi)$ свелась к задаче нахождения аналитической в K_R функции $zg'(z)$, вещественная часть которой на границе Γ_R круга имеет известное значение $Ru_\rho(R, \phi) = Rf(R \cos \phi, R \sin \phi) = Rf(\phi)$. Решение этой задачи дается формулой (2.149) с учетом равенства $zg'(z)|_{z=0} = 0$ и имеет вид

$$zg'(z) = \frac{R}{\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad g(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz_1}{z_1} \frac{R}{\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_1}, \quad z_0 \in K_R, \quad (2.158)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $f(\zeta) = f(\xi, \eta)$. Меняя в (2.158) порядок интегрирования и вычислив интеграл

$$\int_{z_0}^z \frac{dz_1}{z_1(\zeta - z_1)} = -\frac{1}{\zeta} \ln(\zeta - z) + \frac{1}{\zeta} \ln z + c,$$

где c – некоторая постоянная, запишем (2.158) в следующем виде:

$$g(z) = -\frac{R}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \ln(\zeta - z) d\zeta + \frac{R \ln z}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + c. \quad (2.159)$$

Т. к., на основании (2.156)

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta} = i \int_0^{2\pi} f(R \cos \psi, R \sin \psi) d\psi = 0,$$

(2.158) примет вид

$$g(z) = -\frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\psi}) \ln(Re^{i\psi} - z) d\psi + c. \quad (2.160)$$

Выделив из (2.160) действительную часть, получим выражение

$$u(\rho, \phi) = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\phi - \psi)) f(\psi) d\psi + c,$$

носящее название формулы Дини¹⁰.

¹⁰Дини Улисс (итал. Ulisse Dini, 1845–1918) — итальянский математик. Основные труды в области теории рядов, теории функций вещественных переменных (в частности, гармонического анализа) и дифференциальной геометрии.

2.4. Применение комплексного анализа к построению решений дифференциальных уравнений

2.4.1. Элементы операционного исчисления

Комплекснозначную функцию $f(t)$ действительной переменной $-\infty < t < \infty$ будем называть функцией-оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. При $t \geq 0$ на любом конечном отрезке действительной прямой $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода;
2. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
3. Существуют постоянные $M, \alpha > 0$, такие что при всех $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (2.161)$$

При этом $\alpha_0 = \inf \alpha$, для которых выполнено (2.161), называется показателем роста $f(t)$.

Изображением (преобразованием) функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексной переменной $p = x + iy$, определяемую выражением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.162)$$

Соотношение (2.162) принято записывать $f(t) \doteq F(p)$ или $F(p) \doteq f(t)$. Отметим, что приведенные обозначения переменных и функций общепринятые.

Утверждение 2.14. *Функция $F(p)$ определена в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и является в этой области аналитической функцией переменной p .*

◀ Выберем $p = x + iy, x > \alpha_0$. Имеем с учетом (2.161)

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq M \int_0^{\infty} e^{\alpha_0 t} e^{-xt} dt = \frac{M}{x - \alpha_0}.$$

Таким образом, интеграл (2.162) сходится при всех p , $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, а при $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1 > \alpha_0$ эта сходимость равномерная по p .

Выберем последовательность точек $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Представим

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(p). \quad (2.163)$$

Каждая функция $u_n(p)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1 > \alpha_0$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} |f(t) e^{-pt}| dt = 0$ равномерно относительно p при $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1 > \alpha_0$. На основании утверждения 1.21 (1-я теорема Вейерштрасса) ряд (2.163) сходится к $F(p)$ равномерно в области $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1$ и $F(p)$ является аналитической функцией. ►

Отметим некоторые свойства изображения:

1. Если $f_j(t) \doteq F_j(p)$ ($j = 1, \dots, n$), то при $\operatorname{Re} p > \max_j \alpha_{0j}$, $\sum_{j=1}^n \beta_j f_j(t) \doteq \sum_{j=1}^n \beta_j F_j(p)$, где β_j – некоторые числа. Свойство следует непосредственно из (2.162).
2. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, то для любого действительного α $f(\alpha t) \doteq F(p/\alpha)/\alpha$.

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt/\alpha} dt / \alpha = F(p/\alpha) / \alpha.$$

3. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и $f'(t)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ удовлетворяет условиям существования изображения, тогда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Имеем

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

4. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ и $f^{(n)}(t)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ удовлетворяет условиям существования изображения, тогда

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Для доказательства достаточно n раз применить формулу интегрирования по частям.

5. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Тогда

$$g(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \doteq F(p)/p, \quad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

$$\int_0^\infty \int_0^t f(t_1) dt_1 e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-pt} dt = p^{-1} \int_0^\infty f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = F(p)/p.$$

Аналогично доказывается

$$g(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \doteq \frac{F(p)}{p^n}, \quad \operatorname{Re} p > \alpha_0.$$

6. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Рассмотрим функцию

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Тогда $f_\tau(t) \doteq e^{-p\tau} F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_\tau(t) e^{-pt} dt &= \int_\tau^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t_1) e^{-(t_1 + \tau)} dt_1 = \\ &= e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha_0. \end{aligned}$$

7. $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_{01}$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_{02}$. Тогда при $\operatorname{Re} p > \alpha_0 = \max(\alpha_{01}, \alpha_{02})$ для функции

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(t_1) f_2(t - t_1) dt_1 = \int_0^t f_1(t - t_1) f_2(t_1) dt_1 \doteq F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Функция $\varphi(t)$ называется сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$.

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \int_0^t f_1(t_1) f_2(t-t_1) dt_1 \right| \leq M_1 \cdot M_2 \int_0^t e^{\alpha_{01} t_1} e^{\alpha_{02}(t-t_1)} dt_1 \leq \\ &\leq M_1 \cdot M_2 / |\alpha_{0,1} - \alpha_{0,2}| e^{\alpha_0 t}, \end{aligned}$$

если $\alpha_{01} \neq \alpha_{02}$, и $|\varphi(t)| \leq M_1 \cdot M_2 e^{(\alpha_0 + \varepsilon)t}$ ($0 < \varepsilon \ll 1$), если $\alpha_{01} = \alpha_{02}$. Таким образом, изображение функции $\varphi(t)$ существует при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\doteq \int_0^\infty \int_0^t f_1(t_1) f_2(t-t_1) dt_1 e^{-pt} dt = \int_0^\infty f_1(t_1) dt_1 \int_{t_1}^\infty e^{-pt} f_2(t-t_1) dt = \\ &= \int_0^\infty f_1(t_1) e^{-pt_1} dt_1 \cdot \int_0^\infty f_2(t_2) e^{-pt_2} dt_2 = F_1(p) \cdot F_2(p). \end{aligned}$$

8. $f(t) \doteq F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Тогда $F'(p) \doteq -t f(t)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

$$F'(p) = - \int_0^\infty f(t) t e^{-pt} dt \doteq -t f(t).$$

Аналогично $F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t)$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Рассмотрим теперь обратную задачу. Как, зная функцию $F(p)$, аналитическую в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, определить функцию-оригинал $f(t)$, удовлетворяющую сформулированным ранее свойствам?

Утверждение 2.15. (Формула Меллина¹¹) Пусть известно, что функция $F(p)$, аналитическая в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, является изображением функции $f(t)$, вещественной переменной t , обладающей сформулированными выше свойствами и имеющей показатель роста α_0 . Тогда справедлива формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{-pt} dp, \quad x > \alpha_0, \quad (2.164)$$

¹¹ Меллин Роберт Ялмар (фин. Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933) — финский математик, специалист по теории функций, разработавший одно из самых известных интегральных преобразований, названное его именем — преобразование Меллина.

носящая название формулы Меллина. Интегрирование в (2.164) ведется по прямой $\operatorname{Re} p = x$, параллельной мнимой оси.

◀ Рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t)e^{-xt}$, где $x > \alpha_0$. Функция $f_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и удовлетворяет условиям представления интегралом Фурье (см. [7, т. 3 с.524]). В соответствии с этим

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1) e^{iy(t-t_1)} dt_1$$

или

$$f(t)e^{-xt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-xt_1} e^{iy(t-t_1)} dt_1$$

т. к. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Положим во внутреннем интеграле $p = x + iy$ и заметим, что он равен $F(p)$. Тогда выражение можно записать в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{(x+iy)t} dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

В силу аналитичности функции $F(p)e^{pt}$ при $p > \alpha_0$ положение прямой интегрирования $\operatorname{Re} p = x$ в интеграле (2.164) существенного значения не имеет. Должно лишь быть выполнено условие $x > \alpha_0$. ►

В условиях утверждения 2.15 предполагается, что $F(p)$ является изображением $f(t)$. Однако это априори не является известным. Следующее утверждение формулирует достаточные условия на $F(p)$, обеспечивающие существование функции оригинала, которая определяется формулой (2.164).

Утверждение 2.16. Пусть функция $F(p)$ комплексной переменной $p = x + iy$ является аналитической в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. В этой области стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$ и для всех $x > \alpha_0$

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M.$$

Тогда функция $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ является изображением функции оригинала $f(t)$, удовлетворяющей сформулированным ранее свойствам и определяемой формулой (2.164).

◀ Оценим интеграл (2.164):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p)e^{pt} dp \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)e^{pt}| |dp| = \\ &= \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)e^{iyt}| dy \leq \frac{Me^{xt}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Отсюда следует существование интеграла (2.164) при всех $x > \alpha_0$. Кроме того, он сходится равномерно по $0 \leq t \leq T$ для любого $T > 0$. Покажем, что значение интеграла не зависит от x при $x > \alpha_0$. Выберем $\alpha_0 < x_1 < x_2$ и построим в области $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ прямоугольник со сторонами

$$\Gamma_1 = \{p : \operatorname{Re} p = x_1, -A \leq \operatorname{Im} p \leq A\}, \gamma_1 = \{p : x_1 \leq \operatorname{Re} p \leq x_2, \operatorname{Im} p = A\},$$

$$\Gamma_2 = \{p : \operatorname{Re} p = x_2, -A \leq \operatorname{Im} p \leq A\}, \gamma_2 = \{p : x_1 \leq \operatorname{Re} p \leq x_2, \operatorname{Im} p = -A\}.$$

Функция $F(p)e^{pt}$ является аналитической в этом прямоугольнике, поэтому по теореме Коши (утверждение 1.7) интеграл от этой функции по границе прямоугольника равен нулю. Устремляя теперь $A \rightarrow \infty$, получим, с учетом направления обхода границы прямоугольника, что

$$\int_{\Gamma_1} F(p)e^{pt} dp = \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} F(p)e^{pt} dp = - \int_{\Gamma_2} F(p)e^{pt} dp = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

В силу произвольности выбора x_1, x_2 получаем независимость (2.164) от переменной $x > \alpha_0$. Таким образом, интеграл (2.164) определяет некоторую функцию $f(t)$ вещественной переменной t , имеющей показатель роста, согласно (2.165), равный α_0 .

Покажем, что изображение функции $f(t)$ совпадает с $F(p)$. Выберем некоторое $p_0 = x_0 + iy_0$, $x_0 > \alpha_0$ и рассмотрим выражение

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_0 t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p_0 t} dt \int_{x-i\infty}^{x-i\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Выберем x таким, чтобы $\alpha_0 < x < p_0$ и поменяем порядок интегрирования во втором интеграле. В результате

$$\int_0^\infty f(t)e^{-p_0 t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x-i\infty} F(p) dp \int_0^\infty e^{-(p-p_0)t} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x-i\infty} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp. \quad (2.166)$$

Последний интеграл в (2.166) может быть вычислен с помощью вычетов, так как подынтегральная функция имеет одну особую точку – полюс первого порядка. Действительно, выберем полукруг радиуса R , $K_R^{1/2} = \{p : |p - x| < R, \operatorname{Re} p > x\}$. Выберем R таким образом, чтобы точка $p_0 \in K_R^{1/2}$. Оценим подынтегральную функцию на полуокружности $C_R : |p - x| = R, \operatorname{Re} p > x$. В силу равномерного стремления к нулю функции $F(p)$ при $|p| \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > \alpha_0$ существует функция $g(R), g(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и такая, что $|F(p)|_{C_R} \leq g(R)$. В связи с этим при больших R $|F(p)/(p_0 - p)|_{C_R} \leq Ng(R)/R$, где $N > 0$. Отсюда имеем

$$\left| \int_{C_R} \frac{F(p)}{p_0 - p} dp \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{F(p)}{p_0 - p} \right| |dp| \leq Ng(R)/R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R d\varphi = Ng(R)\pi. \quad (2.167)$$

Интеграл (2.167) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. В связи с этим последний интеграл в (2.166) равен $2\pi i F(p_0)$.

Осталось показать, что $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. При $t < 0$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} F(p) e^{tp} dp \right| &\leq g(R) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{tR \cos \varphi} R d\varphi \leq 2g(R) \int_{-\pi/2}^0 e^{tR(2/\pi \varphi + 1)} R d\varphi = \\ &= \pi g(R) (e^{tR} - 1)/t. \end{aligned}$$

Последнее выражение при любом $t < 0$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Отсюда $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. ►

2.4.2. Построение решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим для дифференциального уравнения

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (2.168)$$

где a_j ($j = 1, \dots, n$) постоянные, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ – непрерывная при $t \geq 0$ функция, удовлетворяющая сформулированным в начале п. 2.4.1 условиям, задачу Коши

$$x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \quad (2.169)$$

Обозначим $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ и применим к обеим частям (2.168) преобразование Лапласа. С учетом его свойств и условий (2.169) получим следующее уравнение:

$$P(p)X(p) = x_0P_1(p) + \dots + x_{n-1}P_n + F(p) \equiv \Phi(p), \quad (2.170)$$

где

$$P(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n, \quad P_1(p) = a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \dots \\ P_{n-1} = a_0p + a_1, \quad P_n = a_0.$$

Из (2.170) находим

$$X(p) = \Phi(p)/P(p). \quad (2.171)$$

Обозначим через p_j , ($j = 1, \dots, k, k \leq n$) корни характеристического уравнения $P(p) = 0$. Применим к (2.171) формулу Меллина (2.164). С учетом основной теоремы теории вычетов (утверждение (1.34)) будем иметь выражение для решения

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} X(p)e^{pt} dp = \sum_{j=1}^k \text{res}(\Phi(p)/P(p)e^{pt}, p_j), \quad (2.172)$$

где x больше $\max \text{Re } p_j$ и показателя роста функции $f(t)$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\ddot{x} + a^2x = b \sin(\omega t) \quad (a > 0), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1. \quad (2.173)$$

Перейдем от (2.173) с учетом

$$\int_0^\infty \sin(\omega t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i\omega - p} + \frac{1}{i\omega + p} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

к изображениям

$$(p^2 + a^2)X(p) = x_0p + x_1 + \frac{\omega b}{p^2 + \omega^2},$$

или

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + a^2} \left(x_0p + x_1 + \frac{\omega b}{p^2 + \omega^2} \right). \quad (2.174)$$

Точки $p_{1,2} = \pm ia$, $p_{3,4} = \pm i\omega$ являются полюсами правой части (2.174) первого порядка, если $a \neq \omega$, и второго порядка, если $a = \omega$. В соответствии с этим и согласно формуле (2.172) решение задачи (2.173) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \operatorname{Re}(res(X(p)e^{pt}, ia) + res(X(p)e^{pt}, i\omega)) = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{e^{pt}}{p + ia} (x_0 p + x_1) \right]_{p=ia} + \left[\frac{\omega b e^{pt}}{(p^2 + a^2)(p + i\omega)} \right]_{p=i\omega} \right\} = \\ &= x_0 \cos(at) + \frac{x_1}{a} \sin(at) + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin(\omega t), \end{aligned}$$

если $a \neq \omega$ и

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \operatorname{Re} res(X(p)e^{pt}, i\omega) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left[\frac{e^{pt}}{(p + i\omega)} (x_0 p + x_1) \right]_{p=i\omega} + \right. \\ &\left. + \frac{d}{dp} \left[\frac{\omega b e^{pt}}{(p + i\omega)^2} \right]_{p=i\omega} \right\} = (x_0 - \frac{bt}{2\omega}) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} (x_1 + \frac{b}{2\omega}) \sin(\omega t), \end{aligned}$$

если $a = \omega$.

2.4.3. Построение решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Построение полугруппы линейных операторов

Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + l(x(t+s)) = f(t), \quad (2.175)$$

где $t \geq 0$, $x(t) : R_+ \rightarrow R$, $l(x(s)) : C[-h, 0] \rightarrow R$ ($h > 0$) – линейный непрерывный функционал, $f(t)$ – непрерывная при $t \geq 0$ функция, имеющая конечный показатель роста $\alpha_0 \geq 0$.

Здесь, как обычно, $C[-h, 0]$ – пространство непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций. Отметим, что общий вид линейного непрерывного функционала в $C[-h, 0]$ следующий: $l(x(s)) = \int_{-h}^0 x(s) dr(s)$, где $r(s)$, ($r(0) = 0$) – функция ограниченной вариации. При этом $\|l\| = V_{-h}^0 r(s)$ (см., например, [8, с. 347]).

Под решением уравнения (2.175) с начальной функцией $x_0(s) \in C[-h, 0]$, определенном при $t > 0$, будем понимать непрерывную при $t \geq 0, -h \leq s \leq 0$ функцию $x(t+s)$, непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, обращающую уравнение (2.175) при $t > 0$ в тождество и удовлетворяющую начальному условию

$$x(t+s)|_{t=0} = x_0(s). \quad (2.176)$$

Задача нахождения указанного решения называется задачей Коши. Отметим, что решение задачи Коши при $0 \leq t \leq T$ существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий и параметров уравнения (2.177) (см. [9, с. 17]).

Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{x}(t) + l(x(t+s)) = 0. \quad (2.177)$$

Пусть $x(t+s)$ – решение уравнения (2.177) с начальным условием (2.176). Рассматривая это решение при фиксированном $t > 0$ как элемент пространства $C[-h, 0]$, определяем тем самым линейный ограниченный оператор $T(t) : C[-h, 0] \rightarrow C[-h, 0]$, $x(t+s) = T(t)x_0(s)$. Линейность этого оператора следует из линейности уравнения (2.177), ограниченность – из непрерывной зависимости решений уравнения (2.177) от начальных условий. Для указанного оператора выполнено, очевидно, следующее полугрупповое свойство: $T(t_1 + t_2)x_0(s) = T(t_1)T(t_2)x_0(s) = T(t_2)T(t_1)x_0(s)$ ($t_1, t_2 > 0$). Указанное семейство операторов $T(t)$ будем называть полугруппой уравнения (2.177).

Построим явный вид оператора $T(t)$. Воспользуемся для этого преобразованием Лапласа. Применим к уравнению (2.177) преобразование Лапласа, считая $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$. В результате имеем равенство

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) \exp(-pt) dt + l \left(\int_0^\infty x(t+s) \exp(-pt) dt \right) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt,$$

что эквивалентно равенству

$$(p + l(\exp(ps)))X(p) - x_0(0) + l \left(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt \right) = F(p).$$

Обозначив $h(p) = p + l(\exp(ps))$, имеем

$$X(p) = h^{-1}(p)(x_0(0) - l \left(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt \right) + F(p)). \quad (2.178)$$

Отсюда, используя формулу Меллина (2.164), при $t > 0$ находим

$$x(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) h^{-1}(p) (x_0(0) - l(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt) + F(p)) dp, \quad (2.179)$$

где $\gamma > \mu_0$. Величина μ_0 выбирается таким образом, чтобы величина α_0 и действительные части корней характеристического уравнения $h(p) = 0$ были меньше μ_0 .

Введем в рассмотрение функцию Коши $k(t)$, обладающую следующими свойствами: $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $k(0) = 1$, $k(t) \in C[0, \infty) \cap C^1(h, \infty)$, $k(t)$ при $t \geq 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) + \int_0^t l(x(t_1 + s)) dt_1 = 1.$$

Существование и единственность функции Коши доказывается обычным методом последовательных приближений аналогично теореме существования и единственности решения уравнения (2.177). Легко заметить, что при $t \geq 0$

$$k(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) h^{-1}(p) dp.$$

С учетом этого преобразуем выражение (2.179). Введем в рассмотрение функцию $e(t)$: $e(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $e(t) \equiv 1$ при $t \geq 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} h^{-1}(p) \int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt &= \\ &= h^{-1}(p) \exp(ps) \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt = \\ &= \int_{-s}^\infty k(t+s) \exp(-pt) dt \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_s^\infty k(t+s) \exp(-pt) dt \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt \doteq \\
&\doteq \int_s^t k(t+s-t_1) e(-t_1) x_0(t_1) dt_1 = \int_s^0 k(t+s-t_1) x_0(t_1) dt_1.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$h^{-1}(p)x_0(0) \doteq k(t)x_0(0), \quad h^{-1}(p)F(p) \doteq \int_0^t k(t-t_1)f(t_1)dt_1.$$

Таким образом, выражение (2.179) при $t \geq 0$ может быть записано в следующей форме:

$$x(t) = k(t)x_0(0) - l\left(\int_s^0 k(t+s-t_1)x_0(t_1)dt_1\right) + \int_0^t k(t-t_1)f(t_1)dt_1.$$

Отсюда имеем общее решение уравнения (2.177) $x(t+s) = T(t)x_0(s)$, где семейство операторов

$$T(t)x_0(s) = \begin{cases} k(t+s)x_0(0) - l\left(\int_s^0 k(t+s-t_1)x_0(t_1)dt_1\right), & \text{если } t+s \geq 0, \\ x_0(s), & \text{если } t+s < 0, \end{cases} \quad (2.180)$$

определяет полугруппу уравнения (2.177).

Положим $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. В результате решение уравнения (2.177) с начальными условиями (2.176) может быть записано в виде

$$x(t+s) = T(t)x_0(s) + \int_0^{t+s} k(t+s-t_1)f(t_1)dt_1.$$

Инфинитезимальным (производящим) оператором полугруппы $T(t)$ называется оператор A , определяемый равенством

$$A = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1}(T(t)x_0(s) - x_0(s)).$$

Непосредственно из (2.177), (2.180) находим

$$Ax_0(s) = \begin{cases} dx_0(s)/ds, & -h \leq s < 0, \\ -l(x_0(s)), & s = 0 \end{cases}$$

с областью определения $D(A) = \{x_0(s) : x_0(s) \in C^1(-h, 0), \dot{x}_0(0) + l(x_0(0)) = 0\}$ плотной в $C[-h, 0]$. Это позволяет, введя в рассмотрение функцию $u(s, t) = x(t + s)$, записать уравнение (2.177) в виде эквивалентной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} &= -l(u(s, t)) + f(t), \end{aligned}$$

определенной в полосе $-h \leq s \leq 0, t \geq 0$.

Литература

1. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 1960. 444 с.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969. 576 с.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
4. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
6. *Эльсгольц А. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 1. 608 с., Т. 3. 656 с.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
9. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
10. *Неймарк Ю. И.* Структура D-разбиения пространства квазиполиномов диаграммы Вышнеградского и Найквиста // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 60. С. 1503–1506.
11. *Lang R. Kobayashi K.* Abundance of strange attractors // IEEE. J. Quantum Electron. – 1980. – 16(1). P.347–355.

Учебное издание

Кубышкин Евгений Павлович

**Методы комплексного анализа
в решении прикладных задач**

Учебное пособие

Редактор, корректор М. Э. Левакова
Компьютерный набор, верстка Е. П. Кубышкин

Подписано в печать 07.11.14. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 8,02. Уч.-изд. л. 8,0.
Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.