

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Практикум по математическому анализу

Направление подготовки (специальности)
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 24 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Практикум по математическому анализу» являются изучение студентами методов решения типовых задач математического анализа и его приложений. В процессе изучения курса студенты учатся вычислять пределы функций и последовательностей, применять производную для исследования функций, вычислять неопределенные и определенные интегралы, несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, исследовать числовые и функциональные ряды. В курсе рассматриваются приложения математического анализа в других разделах математики и в других науках.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Практикум по математическому анализу» изучается на протяжении первых четырех семестров и относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математический анализ».

Знания, полученные при изучении курса необходимы для изучения таких дисциплин как дифференциальные уравнения, теория функций комплексной переменной, теория вероятностей и математическая статистика, теория информации и др.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в	И-ОПК-1.1 Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук И-ОПК-1.2 Умеет использовать их в профессиональной деятельности	Знать: - основные понятия математического анализа; - основные теоремы математического анализа. Уметь: - решать типовые задачи (вычисление пределов, вычисление интегралов, и др.); - решать с помощью методов математического анализа прикладные задачи (вычисление площадей, объемов, отыскание экстремумов функции одной и многих переменных и т.д.).

профессиональной деятельности		
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	И-УК-1.1 Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации	Знать: - возможности применения методов математического анализа для решения прикладных задач. Уметь: - интерпретировать решения математических задач в терминах рассматриваемой предметной области.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **8** зачетных единиц, **288** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа					самостоятельная работа		
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания			
1	Теория пределов	1		16		1		6	Контрольные работы № 1, № 2, № 3	
2	Производная функции	1		16		1		6		
3	Исследование функций с помощью производных	1		16		2		6	Контрольная работа № 4	
							0.3	1.7	зачет	
	Всего за семестр			48		4	0.3	19.7		
4	Неопределенный интеграл	2		16		1		6	Контрольная работа № 5	
5	Определенный интеграл.	2		16		1		6	Контрольная работа № 6	
6	Числовые и функциональные ряды	2		16		2		6	Контрольные работы № 7, № 8, № 9	
							0.3	1.7	зачет	
	Всего за семестр			48		4	0.3	19.7		
7	Пространство R ⁿ и функции многих переменных	3		16		1		6		
8	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	3		16		1		6	Контрольная работа № 10	
9	Интегральное исчисление функций многих переменных	3		16		2		6	Контрольные работы № 11, № 12	
							0.3	1.7	зачет	
	Всего за семестр			48		4	0.3	19.7		
10	Теория пределов	4		10		1		11		

11	Ряды Фурье	4		10		1		11	
12	Дополнительные главы интегрального исчисления	4		12		2		11	Контрольная работа № 13
							0.3	2.7	зачет
	Всего за семестр			32		4	0.3	35.7	
	ИТОГО			176		16	1.2	94.8	

Содержание разделов дисциплины:

Тема 1. Теория пределов.

- 1.1. Предел числовой последовательности.
- 1.2. Предел функции.
- 1.3. Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 1.4. Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
- 1.5. Сравнение функций. О-символика, эквивалентность. Теорема о вычислении пределов с помощью эквивалентных функций.

Тема 2. Производная функции.

- 2.1. Вычисление производных.
- 2.2. Геометрический смысл производной.

Тема 3. Исследование функций с помощью производных

- 3.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- 3.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- 3.3. Разложение функций по формуле Тейлора.
- 3.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.
- 3.5. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей (случаи неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).
- 3.6. Экстремумы функции.
- 3.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
- 3.8. Выпуклость функции. Точки перегиба.
- 3.9. Асимптоты графика функции.
- 3.10. Построение графика функции.

Тема 4. Неопределенный интеграл

- 4.1. Неопределенный интеграл. Элементарные приемы интегрирования.
- 4.2. Интегрирование выражений, содержащих радикалы.
- 4.3. Интегрирование дифференциального бинома.
- 4.4. Подстановки Эйлера.
- 4.5. Интегрирование тригонометрических функций (универсальная тригонометрическая подстановка, некоторые частные случаи).

Тема 5. Определенный интеграл.

- 5.1. Определенный интеграл.
- 5.2. Формула Ньютона-Лейбница.
- 5.3. Замена переменной в определенном интеграле.
- 5.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
- 5.5. Приложения определенного интеграла (площадь криволинейной трапеции, площадь криволинейного сектора, объем тела вращения, объем тела с известной площадью поперечного сечения, длина дуги кривой, площадь поверхности вращения).
- 5.6. Несобственные интегралы.
- 5.7. Вычисление несобственных интегралов.

- 5.8. Признак сравнения сходимости несобственного интеграла.
- 5.9. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
- 5.10. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла.

Тема 6. Числовые и функциональные ряды.

- 6.1. Числовые ряды.
- 6.2. Определение сходимости. Исследование рядов на сходимость по определению.
- 6.3. Критерий Коши сходимости числового ряда.
- 6.4. Сходимость неотрицательных рядов: интегральный признак.
- 6.5. Сходимость неотрицательных рядов: признак сравнения (в форме неравенства и в предельной форме).
- 6.6. Сходимость неотрицательных рядов: признак Даламбера (в форме неравенства и в предельной форме).
- 6.7. Сходимость неотрицательных рядов: признак Коши (в форме неравенства и в предельной форме).
- 6.8. Знакопеременные ряды. Понятия абсолютной и условной сходимости. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница сходимости знакопередающегося ряда.

- 6.9. Преобразование Абеля. Лемма об оценке суммы $\sum_{k=1}^n a_k b_k$.

- 6.10. Признак Абеля сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

- 6.11. Признак Дирихле сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

- 6.12. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда.
- 6.13. Ряд Тейлора.
- 6.14. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимости функциональных последовательностей и рядов.
- 6.15. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
- 6.16. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда.
- 6.17. Ряды Фурье. Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье.

Тема 7. Пространство R^n и функции многих переменных.

- 7.1. Предел последовательности в R^n . Теорема: сходимость последовательности в R^n эквивалентна сходимости последовательностей-координат.
- 7.2. Функции в R^n . Предел функции в точке. Вычисление пределов различных типов.

Тема 8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

- 8.1. Вычисление частных производных.
- 8.2. Вычисление дифференциала функции нескольких переменных.
- 8.3. Геометрические приложения производной функции многих переменных (касательная к прямой, касательная плоскость к графику функции двух переменных).
- 8.4. Вычисление производной по направлению. Вычисление градиента.
- 8.5. Формула Тейлора для функций многих переменных.
- 8.6. Экстремумы функций многих переменных.

Тема 9. Интегральное исчисление функций многих переменных

- 9.1. Интегралы, зависящие от параметра. Вычисление интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру.
- 9.2. Гамма-функция Эйлера. Бета-функция Эйлера. Применение Эйлеровых интегралов.
- 9.3. Двойной интеграл. Вычисление двойного интеграла (сведение к повторному интегрированию) для прямоугольной и произвольной областей.
- 9.4. Приложения двойного интеграла (вычисление площадей, масс и объемов).

- 9.5. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные и обобщенные полярные координаты.
- 9.6. Тройные и многократные интегралы. Замена переменных в кратном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты.
- 9.7. Несобственные кратные интегралы.
- 9.8. Вычисление криволинейных интегралов 1го типа.
- 9.9. Вычисление криволинейных интегралов 2го типа.
- 9.10. Формула Грина и ее применение.
- 9.11. Вычисление площадей с помощью криволинейного интеграла 2го типа.
- 9.12. Условия потенциальности поля. Вычисление интегралов от полных дифференциалов.
- 9.13. Вычисление площади поверхности.
- 9.14. Вычисление поверхностных интегралов 1го типа.
- 9.15. Вычисление поверхностных интегралов 2го типа.
- 9.16. Формула Стокса.
- 9.17. Формула Остроградского.

Тема 10. Теория пределов

- 10.1. Обобщения понятия предела.
- 10.2. Вычисление пределов различных типов.

Тема 11. Ряды Фурье

- 11.1. Разложение функций по произвольным полным ортонормированным системам.
- 11.2. Элементы теории приближений.

Тема 12. Дополнительные главы интегрального исчисления

- 12.1. Вычисление n-мерных объемов.
- 12.2. Вычисление площади поверхности в евклидовом пространстве.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются: для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader;
- <https://www.wolframcloud.com/>

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»
<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Климов В. С. Одномерный математический анализ.. Ярославль, ЯрГУ, 2005/2006.
Часть I: www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20050293.pdf
Часть II: www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20060287.pdf
2. Климов В. С. Многомерный математический анализ.. Ярославль, ЯрГУ, 2009.
Часть I: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090235.pdf>
Часть II: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090236.pdf>

б) дополнительная литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. — Санкт-Петербург: Лань, 2023.
Том 1: <https://reader.lanbook.com/book/284078>
Том 2: <https://reader.lanbook.com/book/199928>
Том 3: <https://reader.lanbook.com/book/284078>
2. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М.: Бином, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001017028-SCN0000/000.html>
3. Климов В.С., Ухалов А.Ю. Решение задач математического анализа с использованием компьютерной математики. Ярославль, 2014.
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140206.pdf>
4. Зорич В. А. Математический анализ: Учебник для вузов.. Ч.1. / В. А.Зорич; М-во образования РФ - 3-е изд.,испр.и доп. - М.: МЦНМО, 2001. - 657с.
5. Зорич В. А. Математический анализ: Учебник для вузов.. Ч.2. / В. А.Зорич - 2-е изд.испр. и доп. - М.: МЦНМО, 1998. - 787с.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/184105>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Авторы:

Профессор кафедры
математического анализа, д.ф.-м.н.

В. С. Климов

Доцент кафедры
математического анализа, к.ф.-м.н.

А. Ю. Ухалов

Доцент кафедры
математического анализа, к.ф.-м.н.

А. А. Кащенко

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Практикум по математическому анализу»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе
текущего контроля успеваемости**

Контрольная работа № 1. Метод математической индукции (И-ОПК-1.1)

Вариант 1

Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{1+n}$$

Вариант 2

Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$$

Вариант 3

Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{3+2n}{2(1+n)(2+n)}$$

Вариант 4

Доказать равенство

$$\sum_{i=1}^n i(2i+1) = \frac{1}{6}n(1+n)(5+4n)$$

Вариант 1

- 1) Найти значение выражения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4\sqrt{n}}{1 + n^2}.$$

- 2) Найти значение выражения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + x^2)^4 - 16}{4x^2 + x^3}.$$

- 3) Найти значение выражения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}.$$

- 4) Доказать равенство, используя определение предела последовательности (по ε найти N_ε)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^3}{n^3 + 1} = -1.$$

- 5) Доказать равенство, используя определение предела функции. По ε (E) найти δ (Δ). Привести пример.

$$y \rightarrow -\infty, \quad x \rightarrow a + 0.$$

Вариант 2

- 1) Найти значение выражения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n + 1}{n + 1}.$$

- 2) Найти значение выражения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2}.$$

- 3) Найти значение выражения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[1 - \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right].$$

- 4) Доказать равенство, используя определение предела последовательности (по ε найти N_ε)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2011n - n^{2011}) = -\infty.$$

- 5) Доказать равенство, используя определение предела функции. По ε (E) найти δ (Δ). Привести пример.

$$y \rightarrow 5 + 0, \quad x \rightarrow 1 - 0.$$

Вариант 1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^5 - (1 - 3x^2)^6}{3x^2 - x^3}.$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{4/3} - (x^2 - 1)^{2/3} \right).$
3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)}.$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2(n-1)}\right) \right]^{\tan\left(\frac{\pi(n-1)}{2(n+1)}\right)}.$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a \sin(x) - e^x \sin(a)}{x - a}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + 3x)}{\arcsin(2x)}.$

Вариант 2

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x^{11} + x^2 + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3}.$
 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt[3]{3x+2} + 1}.$
 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[n]{\cos(\beta x)}}{\sin^2(x)}.$
 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin\left(a + \frac{b}{n}\right)}{\sin(a)} \right)^n.$
 5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a \log(x) - e^x \log(a)}{x - a}.$
 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\arcsin(3x)}.$
-

Контрольная работа № 4. Производная и ее приложения (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2, И-ОПК-1.3)

Вариант 1

1) Разложить многочлен $P(x) = 3x^4 + 2x - 2$ по целым положительным степеням $(x + 1)$.

Определить значения выражений

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0),$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right).$$

Вариант 2

1) Разложить многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - 2$ по целым положительным степеням $(x - 2)$.

Определить значения выражений

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad (a > 0, n > 0),$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

Контрольная работа № 5. Неопределенный интеграл (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2)

Вариант 1

$$1) \int (x + 1) \sin x \, dx, \quad 2) \int \frac{1 - x}{\sqrt{x + \pi}} \, dx, \quad 3) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \, dx,$$

$$4) \int \frac{1}{\tan x + 1} \, dx, \quad 5) \int \frac{1}{\sqrt{x + 5} + 1} \, dx.$$

Вариант 2

$$1) \int (2x - 3)e^{2x} \, dx, \quad 2) \int x^2 2^{x^3} \, dx, \quad 3) \int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} \, dx,$$

$$4) \int \frac{1}{\cos^2 x + 1} \, dx, \quad 5) \int e^{2x} \sin(e^x) \, dx.$$

Контрольная работа № 6. Несобственные интегралы (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2)

Вариант 1

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}, \quad 2) \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[4]{x^5}} dx.$$

Исследовать сходимость интегралов

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx, \quad 4) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственные интегралы

$$5) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{x^2} dx, \quad 6) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign}(\sin x)}{x} dx.$$

Вариант 2

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx, \quad 2) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}.$$

Исследовать сходимость интегралов

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx, \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость несобственные интегралы

$$5) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx, \quad 6) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign}(\cos 2x)}{x^2} dx.$$

Контрольная работа № 7. Числовые ряды (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2)

Вариант 1

1) Исследовать сходимость ряда. Если ряд сходится, найти его сумму.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Исследовать сходимость рядов

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}, \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}.$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n+10}, \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3+10}.$$

Вариант 2

1) Исследовать сходимость ряда. Если ряд сходится, найти его сумму.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n.$$

Исследовать сходимость рядов

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+10}, \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!!}.$$

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+1}, \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^3}.$$

Контрольная работа № 8. Степенные ряды (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2)

Вариант 1

Найти область сходимости степенных рядов

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} x^n, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{100}} x^n, \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x-3)^n, \\ 4) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)!!}{3n} x^n. \end{aligned}$$

Вариант 2

Найти область сходимости степенных рядов

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} x^n, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right) x^n, \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{3n} (x+5)^n, \\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}, \quad 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(4n)!!} x^n. \end{aligned}$$

Вариант 3

Найти область сходимости степенных рядов

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n, \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 (x+1)^n, \\ 4) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1)!!}{(3n)!!} x^n. \end{aligned}$$

Контрольная работа № 9. Функциональные ряды (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2)

Вариант 1

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках

1) $\frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$, $x \in [0, +\infty)$, 2) e^{-nx} , $x \in [0, 1]$, 3) e^{-nx} , $x \in [1, +\infty)$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^4}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n! + 1}$, $x \in (-\infty, 0]$

6) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}.$$

Вариант 2

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках

1) $\arctan nx$, $x \in [0, 2]$, 2) $\arctan nx$, $x \in [2, +\infty)$, 3) $(-1)^n x$, $x \in [0, 1]$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{e^n + e^x}$, $x \in [0, 100]$, 5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{12n}$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

6) Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}.$$

Контрольная работа № 10. Функции многих переменных (И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2, И-ОПК-1.3)

Вариант 1

- 1) Найти частные производные 1-го и 2-го порядков функции

$$u = f(\xi, \eta), \quad \xi = \sin(x + 2y), \quad \eta = e^{xy}.$$

- 2) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 y^2 (6 - x - y).$$

- 3) Исследовать функцию на условный экстремум

$$z = e^{xy} \quad \text{при} \quad x + y = 1.$$

- 4) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в области $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Вариант 2

- 1) Найти частные производные 1-го и 2-го порядков функции

$$u = f(\xi, \eta, \chi), \quad \xi = y, \quad \eta = 2x, \quad \chi = x - y.$$

- 2) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

- 3) Исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$, заданную неявным уравнением

$$\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2 x + z = 0.$$

- 4) Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2$ в области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Вариант 1

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (все параметры положительны).

1) $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2.$

2) $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}, z = 0$

3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$

Вариант 2

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (все параметры положительны).

1) $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1.$

2) $y = e^x, y = e^{-x}, e^2 - y^2, z = 0.$

3) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$

Контрольная работа № 12. Криволинейные и поверхностные интегралы
(И-ОПК-1.1, И-ОПК-1.2, И-ОПК-1.3)

Вариант 1

Вычислить криволинейные интегралы

$$1) \quad \int_L \frac{x}{y} ds,$$

где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, лежащая между точками $(1, \sqrt{2})$ и $(2, 2)$.

$$2) \quad \int_L (x^2 + y^2) dy,$$

где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 5$ в положительном направлении.

Вычислить поверхностные интегралы

$$3) \quad \iint_S \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ds,$$

где S – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

$$4) \quad \iint_S z dx dy,$$

где S – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Вариант 2

1) С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($a > 0$).

2) Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L x^2 ds,$$

где L – верхняя половина окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Вычислить поверхностные интегралы

$$3) \quad \iint_S x ds,$$

где S – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, лежащая в первом октанте.

$$4) \quad \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где S – внешняя сторона куба, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Контрольная работа № 13. Интегрирование функций многих переменных
(И-ОПК-1.1, И-УК-1.1)

Вариант 1

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos ax$ ($a \notin \mathbb{Z}$).
2. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Вариант 2

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin ax$ ($a \notin \mathbb{Z}$).
2. Найти объем четырехмерной пирамиды

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_4}{a_4} \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Практикум по математическому анализу»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс «Практикум по математическому анализу» тесно связан с курсом «Математический анализ». Рекомендуется регулярно посещать лекции курса «Математический анализ» и занятия по курсу «Практикум по математическому анализу», выполнять домашние задания. При необходимости – обращаться за консультацией к преподавателю. Посещение занятий позволит понять, какие задачи нужно научиться решать. Для самостоятельной работы лучше пользоваться рекомендованной преподавателем литературой и источниками.

Большое количество типовых задач рассмотрено в учебнике Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (см. список литературы).

В конце каждого семестра сдается зачет. Для успешной сдачи зачета необходимо получить зачет по всем контрольным работам, проведенным в течение семестра. Примеры вариантов заданий контрольных работ приведены в Приложении 1.