

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дифференциальные уравнения**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с идеями и методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Дисциплина "Дифференциальные уравнения" содействует фундаментализации образования, формированию культуры аналитических вычислений в рамках цикла аналитических дисциплин.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части образовательной программы и входит в модуль «Математика II». Дисциплина «Дифференциальные уравнения» входит в цикл дисциплин, которые обеспечивают овладение аналитическими и численными методами, необходимыми для подготовки специалиста-математика. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин "Математический анализ", "Алгебра". Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины "Дифференциальные уравнения", используются при изучении общепрофессиональных дисциплин "Методы вычислений", "Уравнения математической физики", ряда специальных дисциплин, а также при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с математическим моделированием и динамическими системами.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)   | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)  | Перечень планируемых результатов обучения  |
|---|---|--|
| <b>Универсальные компетенции</b>  |   |  |
| <b>УК-1</b><br>Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | <b>И-УК-1.2</b><br>Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности | <b>Знать:</b><br>- основные методы интегрирования дифференциальных уравнений.<br><b>Уметь:</b><br>- применять основные методы интегрирования дифференциальных уравнений для решения практических задач.<br><b>Владеть навыками:</b><br>- построения математических моделей прикладных задач, описываемых дифференциальными уравнениями |
| <b>Общепрофессиональные компетенции</b>   |   |  |
| <b>ОПК-1</b><br>Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области  | <b>И-ОПК-1.1</b><br>Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук                        | <b>Знать:</b><br>- теоремы существования решений начальной задачи;<br>- теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий и параметров;   |

|   |   |   |
|---|---|---|
| математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности |   | - общие свойства линейных систем дифференциальных уравнений;<br>- теоремы об устойчивости по первому приближению.<br><b>Уметь:</b><br>- решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами;<br>- исследовать устойчивость решений таких уравнений. |
|   | <b>И-ОПК-1.2</b><br>Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности | <b>Уметь:</b><br>- дифференцировать решения по начальным условиям и параметрам.<br><b>Владеть навыками:</b><br>- качественного исследования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений  |

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **6** зачетных единицы, **216** акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание   | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |                           | Формы текущего<br>контроля<br>успеваемости<br><br>Форма<br>промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|--|
|          |  |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |                           |  |
|          |  |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания | самостоятельная<br>работа |  |
| 1        | Предварительные сведения из алгебры и математического анализа. Нормы векторов и матриц. Принцип сжимающих отображений. Теорема Арцела. | 3       | 2   | 1            |              |              |                             | 1                         |  |
| 2        | Понятие дифференциального уравнения; поле направлений; решения; интегральные кривые; векторное поле; фазовые кривые.                   | 3       | 2   | 1            |              |              |                             | 2                         |  |
| 3        | Элементарные методы интегрирования: уравнения с разделяющимися   | 3       | 2   | 2            |              | 2            |                             | 2                         | Контрольная работа №1  |

|    |   |   |   |   |  |   |  |   |                       |
|----|---|---|---|---|--|---|--|---|-----------------------|
|    | переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель, линейное уравнение, уравнения Бернулли и Риккати.  |   |   |   |  |   |  |   |                       |
| 4  | Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши для однородного уравнения. Неоднородное уравнение. Периодические решения однородного и неоднородного уравнений с периодическими коэффициентами. | 3 | 4 | 1 |  |   |  | 2 |                       |
| 5  | Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Выделение вещественных решений.  | 3 | 4 | 2 |  |   |  | 2 |                       |
| 6  | Линейное неоднородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Функция Коши. Решение неоднородных уравнений со специальной правой частью.   | 3 | 2 | 1 |  |   |  | 2 |                       |
| 7  | Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.   | 3 | 2 | 1 |  |   |  | 2 |                       |
| 8  | Общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.   | 3 | 2 | 2 |  |   |  | 2 |                       |
| 9  | Общее решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами.   | 3 | 2 | 1 |  |   |  | 2 |                       |
| 10 | Матричная экспонента. Структура решений системы с постоянными коэффициентами. Оценка матричной экспоненты. Поведение решений при больших временах.  | 3 | 2 | 2 |  | 2 |  | 1 | Контрольная работа №2 |

|    |   |   |    |    |  |   |     |      |         |
|----|---|---|----|----|--|---|-----|------|---------|
| 11 | Фундаментальная матрица системы с переменными коэффициентами. Формула Остроградского-Лиувилля.  | 3 | 4  | 1  |  |   |     | 1    |         |
| 12 | Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теоремы Ляпунова и Флоке. Общее решение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами.  | 3 | 4  | 1  |  |   |     | 1    |         |
|    |   |   |    |    |  | 2 | 0,5 | 33,5 | Экзамен |
|    | <b>Итого за 3 семестр<br/>108 часов</b>   |   | 32 | 16 |  | 6 | 0,5 | 53,5 |         |
| 13 | Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.   | 4 | 4  |    |  |   |     | 2    |         |
| 14 | Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Дифференцируемость решений по начальным условиям. Уравнения в вариациях.   | 4 | 4  |    |  |   |     | 2    |         |
| 15 | Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от параметров, входящих в правые части, дифференцируемость по параметрам. Метод малого параметра.  | 4 | 2  |    |  | 2 |     | 2    |         |
| 16 | Продолжение решений. Непродолжаемые решения.  | 4 | 2  |    |  |   |     | 2    |         |
| 17 | Устойчивость решений. Устойчивость в линейных системах  | 4 | 2  |    |  |   |     | 2    |         |
| 18 | Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Построение функций Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами. | 4 | 4  |    |  |   |     | 4    |         |

|    |  |   |    |    |  |    |     |      |         |
|----|--|---|----|----|--|----|-----|------|---------|
| 19 | Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.   | 4 | 2  |    |  |    |     | 4    |         |
| 20 | Устойчивость многочленов. Критерий Рауса - Гурвица. Частотный критерий Михайлова.  | 4 | 2  |    |  |    |     | 4    |         |
| 21 | Автономные системы дифференциальных уравнений. Свойства траекторий автономных систем. Качественный анализ поведения решений автономных дифференциальных уравнений первого порядка. | 4 | 4  |    |  |    |     | 4    |         |
| 22 | Фазовая плоскость линейной двумерной автономной системы. Классификация особых точек.   | 4 | 4  |    |  |    |     | 4    |         |
| 23 | Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Собственные значения и собственные функции.   | 4 | 2  |    |  | 2  |     | 6    |         |
|    |  |   |    |    |  | 2  | 0,5 | 33,5 | Экзамен |
|    | <b>Итого за 4 семестр<br/>108 часов</b>  |   | 32 |    |  | 6  | 0,5 | 69,5 |         |
|    | <b>ИТОГО</b>   |   | 64 | 16 |  | 12 | 1   | 123  |         |

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Глызин С. Д., Нестеров П. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2016.  
<https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wpozbr&ysclid=ljshgci4b3555840301>
2. В. К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2020.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001016519-SCN0000/000.html>
3. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения : Учеб. для вузов / Тихонов А. Н. , Васильева А. Б. , Свешников А. Г. - 4-е изд. , - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 256 с. (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 6) - ISBN 978-5-9221-0277-3. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102773.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974.
2. А. Ф. Филиппов. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005.
3. В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению - Москва: Лаборатория знаний, 2020. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785001017998-SCN0000/000.html>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор:**

Декан математического факультета, д.ф.-м.н.

П.Н. Нестеров



**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Дифференциальные уравнения»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

Задания для контрольной работы №1

|   |  |
|---|--|
| <p align="center"><b>Вариант №1</b></p> <p>1. Найти общее решение<br/> <math display="block">\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{t^3 + x + 1}.</math></p> <p>2. Найти общее решение<br/> <math>(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0.</math></p> <p>3. Найти общее решение<br/> <math>y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x.</math></p> <p>4. Найти общее решение<br/> <math>y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}.</math></p> <p>5. Найти общее решение<br/> <math>(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.</math></p> | <p align="center"><b>Вариант №2</b></p> <p>1. Найти общее решение<br/> <math>xdy - (x^2 e^{-y} + 2)dx = 0.</math></p> <p>2. Найти общее решение<br/> <math>(2y - x - 4)dx - (2x - y + 5)dy = 0.</math></p> <p>3. Найти общее решение<br/> <math>y' \cos x + y \sin x = 1.</math></p> <p>4. Найти общее решение<br/> <math>3xy^2 y' + y^3 - 2x = 0.</math></p> <p>5. Найти общее решение<br/> <math>(1 + (x^2 + y^2)x)xdx + ydy = 0.</math></p>     |
| <p align="center"><b>Вариант №4</b></p> <p>1. Найти общее решение<br/> <math>t(\ln x + 2 \ln t - 1)dx = 2xdt.</math></p> <p>2. Найти общее решение <math>y' = \frac{x + y - 3}{y - x + 1}.</math></p> <p>3. Найти общее решение<br/> <math>(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0.</math></p> <p>4. Найти общее решение <math>xy' - y^2 \ln x + y = 0.</math></p> <p>5. Найти общее решение<br/> <math>x dx + y dy + x dy - y dx = 0.</math></p>  | <p align="center"><b>Вариант №3</b></p> <p>1. Найти общее решение<br/> <math>(4t + x - 3)^2 dt - dx = 0.</math></p> <p>2. Найти общее решение<br/> <math>(2x + 4y + 3)y' - x - 2y - 1 = 0.</math></p> <p>3. Найти общее решение<br/> <math>\dot{x} - x \operatorname{ctg} t = 4 \sin t.</math></p> <p>4. Найти общее решение<br/> <math>(x - y)ydx - x^2 dy = 0.</math></p> <p>5. Найти общее решение<br/> <math>(x^2 + y)dx - xdy = 0.</math></p> |
| <p align="center"><b>Вариант №5</b></p> <p>1. Найти общее решение</p>   | <p align="center"><b>Вариант №6</b></p> <p>1. Найти общее решение</p>  |

|  |  |
|--|--|
| $\dot{x} = \frac{(1+x)^2}{t(x+1)-t^2}.$ <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>(3x-4y-3)y'-3x+4y+2=0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>\dot{x}-2x=te^{2t}\sin t</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0</math>.</li> </ol>  | $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0.$ <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y' + y = (x+1)e^{-x}\cos x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y' = \frac{y^2}{(y-x)x}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0</math></li> </ol>   |
| <p style="text-align: center;">Вариант №7</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>xy^2(xy' + y) = 1</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>x + y - 2 + (1-x)y' = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y' - y = \sin x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(y^2 + x^2 + 1)y' + xy = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(x + y - 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0</math>.</li> </ol>   | <p style="text-align: center;">Вариант №8</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>x^2dt + (e^t - x)dx = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>xy' - 2y = x^3 \cos x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>2y'x \ln x + y = xy^{-1} \cos x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0</math>.</li> </ol>        |
| <p style="text-align: center;">Вариант №10</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>2xy' + 1 = y + \frac{x^2}{y-1}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y' = \frac{x+y}{1-y-x}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y'x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>2y' \sin x + y \cos x = y^3 \sin^2 x</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0</math>.</li> </ol> | <p style="text-align: center;">Вариант №9</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>x \frac{dx}{dt} + tx = t^3</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(4x + 2y + 1)y' + 8x + 4y + 1 = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>\dot{x} - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos^3 t}</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>y^2dx + (x - y)xdy = 0</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>ydx - (y^2 + x)dy = 0</math>.</li> </ol> |
| <p style="text-align: center;">Вариант №11</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>x^2(dy - dx) = (x + y)ydx</math>.</li> <li>Найти общее решение <math>(x - 2y - 1)dx + (3x - 6y + 2)dy = 0</math>.</li> </ol>   | <p style="text-align: center;">Вариант №12</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Найти общее решение <math>\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}e^{2t} + x</math>.</li> </ol>   |

|  |   |
|--|---|
| 3. Найти общее решение<br>$\dot{x} + te^t x = e^{(1-t)e^t}$ .<br>4. Найти общее решение<br>$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, y_* = \frac{1}{x}$ .<br>5. Найти общее решение<br>$(3x^2 y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$ . | 2. Найти общее решение $y' = -\frac{2x+3y-5}{3x+2y-5}$ .<br>3. Найти общее решение<br>$y' + 2y = xe^{-2x} \cos x$ .<br>4. Найти общее решение $(x-t)tdx - x^2 dt = 0$ .<br>5. Найти общее решение<br>$\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left( \frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0$ . |
|--|---|

Задания для контрольной работы №2

|   |   |
|---|---|
| <p style="text-align: center;">Вариант №1.</p> 1. Найти общее решение<br>$y'' + y = \frac{x^2 \ln x - 1}{x^2}$ ;<br>2. Найти общее решение<br>$y'' + y = 4 \cos x$ ;<br>3. Найти общее решение<br>$y''' + 2y'' + y' = x + e^{-x}$ ;<br>4. Найти общее решение системы $x' = Ax$ ,<br>если<br>$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ;<br>5. Найти общее решение системы<br>$x' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} e^{-t}$ . | <p style="text-align: center;">Вариант №2.</p> 1. Найти общее решение<br>$\ddot{x} - x = \frac{t^2 \ln t + 1}{2t^2}$ ;<br>2. Найти общее решение<br>$y'' + 2y' + 17y = e^{-x}(1 + \sin 4x)$ ;<br>3. Найти общее решение<br>$y''' + 2y'' = x + xe^{-2x}$ ;<br>4. Найти общее решение системы $x' = Ax$ ,<br>если<br>$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ;<br>5. Найти общее решение системы<br>$x' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ . |
| <p style="text-align: center;">Вариант №3.</p> 1. Найти общее решение<br>$\ddot{x} + x = \frac{4t^2 - 1}{2t\sqrt{t}}$ ;<br>2. Найти общее решение<br>$y'' + 2y' + 10y = xe^{-x} \sin 3x$ ;<br>3. Найти общее решение<br>$y''' + 8y = x + xe^{-2x}$ ;<br>4. Найти общее решение системы $x' = Ax$ ,<br>если  | <p style="text-align: center;">Вариант №4.</p> 1. Найти общее решение<br>$y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{2x\sqrt{x}}$ ;<br>2. Найти общее решение<br>$y'' - 4y' + 5y = (x+1)e^{-2x} \sin x$ ;<br>3. Найти общее решение<br>$y^{IV} + 4y'' = x + e^{-2x}$ ;<br>4. Найти общее решение системы $x' = Ax$ ,<br>если   |

|  |  |
|--|--|
| $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$ <p>5. Найти общее решение системы</p> $\frac{dx}{dt} = y + 1,$ $\frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\sin t}.$ | $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix};$ <p>5. Найти общее решение системы</p> $\frac{dx}{dt} + 5x + 2y = e^t,$ $\frac{dy}{dt} - 2x = e^{2t}.$ |
|--|--|

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Список вопросов к экзамену за 3 семестр:

1. Нормы векторов и матриц (основные определения). Индуцированная матричная нормы (примеры и доказательства формул). Эквивалентность векторных норм в конечномерном пространстве.
2. Метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений.
3. Теорема Арцела.
4. Скалярные дифференциальные уравнения первого порядка. Существование и единственность решения задачи Коши.
5. Интегрирование линейных скалярных уравнений первого порядка. Периодические решения линейных скалярных дифференциальных уравнений.
6. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Дифференциальные операторы (определения и алгебраические операции). Однозначная разрешимость задачи Коши.
7. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение линейного однородного уравнения (запись общего решения в действительной форме). Пространство решений.
8. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Принцип суперпозиции. Случай квазиполинома. Представление частного решения с помощью функции Коши. Метод вариации произвольных постоянных.
9. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Общее решение линейной однородной системы. Переход к действительному базису в пространстве решений.
10. Общее решение линейной неоднородной системы. Принцип суперпозиции. Случай векторного квазиполинома. Метод вариации произвольных постоянных.
11. Матричная экспонента и ее свойства. Вычисление матричной экспоненты.
12. Решение линейных систем с помощью матричной экспоненты. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем. Оценка матричной экспоненты.
13. Фундаментальная матрица системы с переменными коэффициентами. Формула Остроградского-Лиувилля.
14. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теоремы Ляпунова и Флоке. Общее решение линейной однородной системы с периодическими коэффициентами.

### Список вопросов к экзамену за 4 семестр:

1. Нелинейные системы дифференциальных уравнений в нормальной форме. Задача Коши. Теорема Пикара-Линделёфа.
2. Теорема Пеано.
3. Непрерывная зависимость решений дифференциальных уравнений от начальных условий и параметров.
4. Дифференцирование решений дифференциальных уравнений по начальным условиям и параметрам. Метод малого параметра.
5. Продолжение решений. Непродолжаемые решения.
6. Устойчивость решений. Устойчивость в линейных системах.
7. Второй метод Ляпунова. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.
8. Теорема Четаева о неустойчивости. Построение функций Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами.
9. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.
10. Устойчивость многочленов. Критерий Рауса - Гурвица. Частотный критерий Михайлова.
11. Автономные системы дифференциальных уравнений. Свойства траекторий автономных систем. Качественный анализ поведения решений автономных дифференциальных уравнений первого порядка..
12. Фазовая плоскость линейной двумерной автономной системы. Классификация особых точек.
13. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Собственные значения и собственные функции.

### 3. Правила выставления оценки на экзамене.

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и практическая задача. На подготовку к ответу дается не менее 1 часа.

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом теории дифференциальных уравнений; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Студент дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует терминологию теории дифференциальных уравнений.

**Оценка «Хорошо»** выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется студенту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и

дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. Ответы излагаются в терминах квантовой механики, но при этом допускаются ошибки в определении и раскрытии некоторых основных понятий, формулировке положений, которые студент затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется студенту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.