**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

«\_22\_» мая 2024 г.

### Рабочая программа дисциплины

«Теория вероятностей и математическая статистика»

### Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

### Направленность (профиль)

**«**Программирование и технологии искусственного интеллекта»

### Квалификация выпускника

Бакалавр

### Форма обучения

очная

Программа рассмотрена на заседании кафедры

от 09 апреля 2024 г.,

протокол № 4

Программа одобрена НМК факультета ИВТ

протокол № 6 от 26 апреля 2024 г.

Ярославль

### Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являют- ся формирование вероятностного мышления, освоение студентами основных подходов к математической обработке результатов наблюдений и измерений методами теории вероят- ностей и математической статистики.

### Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к ба- зовой части ОП бакалавриата. При изучении дисциплины «Теория вероятностей и матема- тическая статистика» необходим уровень освоения дисциплин «Математический анализ»,

«Геометрия и алгебра», «Дифференциальные уравнения» не ниже порогового.

Полученные в рамках дисциплины «Теория вероятностей и математическая стати- стика» знания необходимыдля развития навыков решения сложных задач, изучения- профильных курсов по математике (в том числе продолжения изучения статистических методов в рамках дисциплины «Дополнительные главы математической статистики»), способствуют пониманию особенностей функционирования вероятностных математиче- ских моделей.

### Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планиру- емыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Формируемая компетенция (код и формулировка)** | **Индикатор достижения компетенции****(код и формулировка)** | **Перечень планируемых результатов****обучения** |
| **Общепрофессиональныекомпетенции** |
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. | ОПК – 1.1Демонстрирует навыки решения типовых задач, выполнения стандартных действий:ОПК – 1.2 Демонстрирует навыки использования основных понятий, концепций, фактов, принципов математики, информатики, естественных наук для решения практических задач, связанных с применением математических и (или) естественных наук. | **Знать:*** основные понятия, теоремы и уравнения теории вероятно- стей и математической стати- стики;
* точные методы вычислений в теории вероятностей,
* метода построения оценок и проверки гипотез в математи- ческой статистике.

**Уметь:*** находить вероятности слож- ных событий с использова- нием свойств вероятностей;
* находить условные вероят- ности событий, вероятности сложных событий с использо- ванием формулы полной ве- роятности и формулы Байеса;
* находить и анализировать числовые характеристики слу- чайных величин,
* находить законы распреде-

ления зависимых случайных величин, |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | * проверять гипотезы с ис- пользованием критерия Пир- сона, проверять однородность выборок.

**Владеть навыками:*** построения рядов распреде- ления, функций, плотностей распределения случайных ве- личин,
* генерирования случайных величин с заданным законом распределения,

**–** построения оценок неизвестных параметров рас- пределения с использованием метода максимального прав- доподобия, метода наимень-ших квадратов, метода момен- тов. |

### Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7зач.ед., 252акад.час.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Темы (разделы) дисциплины, их содержание** | **Семестр** | **Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов,****и их трудоемкость****(в академических часах)** | **Формы текущего контроля успеваемо- сти****Форма промежуточ- ной аттестации (по семестрам)** |
|  |  |  | **Контактная работа** |  |  |
|  |  |  | лекции | практические | лабораторные | консультации | аттестационные испытания | самостоятельная работа |  |
| 1 | Математические основы теории вероятностей | 5 | 8 | 10 |  |  |  | 4 | Задания для самостоя- тельной работы |
| 2 | Вероятностная зави- симость и условная ве- роятность | 5 | 6 | 8 |  | 2 |  | 8 | Задания для самостоя- тельной работы, Контрольная работа №1 |
| 3 | Случайная величина | 5 | 8 | 6 |  | 2 |  | 9,7 | Задания для самостоя- тельной работы |
| 4 | Числовые характери- стики случайных вели- чин | 5 | 8 | 6 |  | 2 |  | 5 | Задания для самостоя- тельной работы, Контрольная работа №2 |
| 5 | Предельные теоремы | 5 | 6 | 6 |  | 1 |  |  | Задания для самостоя- тельной работы,Самостоятельная работа |
|  | **Всего за 5 семестр** |  | **36** | **36** |  | **7** |  | **28,7** | **Зачет** |
| 6 | Непрерывные случай- | 6 | 14 | 14 |  |  |  | 10 | Контрольная работа№3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ные величины |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7 | Основания математиче- ской статистики | 6 | 8 | 4 |  | 2 |  | 4 | Задания для самостоя- тельной работыКонтрольная работа№4 |
| 8 | Методы построения оце- нок | 6 | 6 | 8 |  | 2 |  | 6 | Задания для самостоя-тельной работы Контрольная работа№5 |
| 9 | Гипотезы и их проверка | 6 | 4 | 8 |  | 2 |  | 9 | Задания для самостоя- тельной работы |
|  | **Всего за 6 семестр** |  | **36** | **36** |  | **7** |  | **29** | **Экзамен** |
|  | **Всего** |  | **72** | **72** |  | **14** |  | **57,7** |  |

### Содержание разделов дисциплины:

**Раздел 1. Математические основы теории вероятностей**

Интуитивные предпосылки теории вероятностей. Опыт, множество элементарных исходов опыта, событие. Классическое, статистическое, геометрическое определения ве- роятности. Субъективная вероятность.

Математическое определение вероятности. Алгебра событий, σ-алгебра. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них. Вероятностное пространство как парадигма ве- роятностного мышления и как корректная математическая модель случайного явления.

События, операции над ними. Вероятность, свойства вероятности.

### Раздел 2. Вероятностная зависимость и условная вероятность

Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Причинно- следственная и вероятностная зависимость. Формула полной вероятности. Формула Байе- са (теорема гипотез).

### Раздел 3. Случайная величина.

Детализация математической модели случайного явления и концепция случайной величины. Случайная величина как функция от элементарных исходов опыта. Случайная величина как функция, определенная на вероятностном пространстве. Дискретные случай- ные величины.

Геометрическое распределение. Схема Бернулли и биномиальное распределение. Гипергеометрическое распределение. Простейший поток событий и распределение Пуассона. Векторные случайные величины. Зависимые и независимые случайные величи- ны, условные законы распределения. Функции от случайных величин, преобразование закона распределения при функциональном преобразовании случайных величин.

### Раздел 4. Числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Моменты случайной величины. Мода, медиана, квантиль. Условное математическое ожидание.

Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, свойства некор- релированности и независимости.Корреляционная матрица.

### Раздел 5. Предельные теоремы.

Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел. Теоремы Хинчина и Чебышёва. Уси- ленный закон больших чисел. Теорема Пуассона.

Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Нера- венство Берри-Эссеена.

### Раздел 6. Непрерывные случайные величины.

Функция распределения случайной величины, ее свойства. Абсолютно непрерыв- ные случайные величины, плотность распределения. Локальный смысл плотности. Приме-

ры распределений: равномерное, показательное, нормальное. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции.

Векторные случайные величины. Нахождение частных плотностей по общей плот- ности. Геометрические вероятности. Преобразования непрерывных случайных величин. Суммирование случайных величин, формула свертки. Генерирование величин с заданным законом распределения.

### Раздел 7. Основания математической статистики.

Классическая модель математической статистики. Понятие выборки. Оценка как функция выборки. Характеристики выборки: состоятельность, несмещенность. Сравнение оценок.

Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли. Эмпириче- ская плотность распределения (гистограмма).

### Раздел 8. Методы построения оценок.

Точечное и интервальное оценивание. Метод наибольшего правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов. Свойства получаемых оценок.

### Раздел 9. Гипотезы и их проверка

Статистическая гипотеза, критическая область гипотезы, уровень значимости. Про- стые и сложные статистические гипотезы. Статистическое решение и решающее правило.

Статистики Колмогорова, Смирнова и Пирсона (хи-квадрат), статистические табли- цы. Проверка статистических гипотез о законах распределения: критерии согласия, крите- рии однородности.

### Образовательные технологии, используемые при осуществлении образо- вательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориенти- рует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначе- нием и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, до- стижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особен- ности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно- методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требова- ния к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информатив- ность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

### Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимо- сти)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

* для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации, для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами:

программы Microsoft Office (OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232), программы LibreOffice (свободно распространяемое ПО),

издательская система LaTeX;

* для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ– Автоматизированная биб- лиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

### Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освое- ния дисциплины

а) основная:

1. Буре, В. М. Методы прикладной статистики в R и Excel : учебное пособие / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-2229-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206042>
2. Хуснутдинов, Р. Ш. Сборник задач по курсу теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1668-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/211733>

1. Максименко, А. Н., Теория вероятностей: учеб. пособие для студентов, обу- чающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Яро- славль, ЯрГУ, 2014, 120c
2. Максименко, А. Н., Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаменталь- ная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120c – <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/> 20140404.pdf
3. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Яро- славль, ЯрГУ, 2009, 110c
4. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. по- собие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479c
5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : сбор- ник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110c – [http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/](http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090405.pdf) [20090405.pdf](http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090405.pdf)
6. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/495110>

б) дополнительная:

1. Сборник задач по математике : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимо- ва, А. С. Поспелова. В 4 ч. Ч.4. - [3-е изд., перераб. и доп.], М., Физматлит, 2004, 430c
2. Вентцель, Е. С., Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 2-е изд., стереотип., М., Наука, 1973, 366c
3. Боровков, А. А., Теория вероятностей : учеб. пособие для втузов / А. А. Боров- ков. - 2-е изд., перераб. и доп., М., Наука, 1986, 431c
4. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. по- собие для втузов / В. Е. Гмурман, М., Высшая школа, 2001, 479c
5. Феллер, В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. В 2 т. Т.1, М., Мир, 1984, 527c
6. Феллер, В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. В 2 т. Т.2, М., Мир, 1984, 751c
7. Левин, А. Ю., О логике математической статистики : текст лекций по курсу "До- полнительные главы математической статистики" / А. Ю. Левин, В. В. Майоров, М. Л. Мячин. - 2-е изд., перераб. и доп., Ярославль, ЯрГУ, 2003, 44c
8. Гмурман, В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и матема- тической статистике : учеб. пособие. - 5-е изд., стереотип., М., Высшая школа, 2001, 400c

11. Коваленко, И. Н., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. по- собие для вузов / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. - 2-е изд., перераб. и доп., М.,

Высшая школа, 1982, 256c

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http:// [www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\_cat\_find.php).](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php%29)
2. Конспекты лекций по теории вероятностей и математической статистике (Н.В.Чернова) (<http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/>).
3. Электронно-библиотечная система «Юрайт»(https://urait.ru/ ).
4. Электронно-библиотечная система «Лань»(https://e.lanbook.com/).

### 8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образо- вательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

* учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
* учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
* учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
* учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
* помещения для самостоятельной работы;
* помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обуче- ния.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному соста- ву группы обучающихся.

### Автор(ы) :

Доцент кафедры дискретного анализа,

к.ф.-м.н.

Ю.В.Богомолов

### Приложение №1 к рабочей программе дисциплины

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

### Фонд оценочных средств

**для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

### 1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы

**формирования компетенций**

### 1.1. Контрольные задания и иные материалы,используемые в процессе текущей ат- тестации

**Контрольная работа №1 (События и их вероятности)**

1. Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение х2 + 4х + q = 0. Какова вероятность того, что корни этого уравнения окажут- ся действительными числами?
2. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?
3. Наудачу выбирается трехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля. Ка- кова вероятность того, что у выбранного числа ровно две одинаковые цифры?
4. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова ве- роятность того, что 2 из них белые, а 3 черные?
5. Три молодых человека сложили в шляпу 10 одинаковые бумажек, одна из которых отмечена крестом. По очереди они вынимают наудачу бумажки, пока кто-нибудь из них не вынет отмеченную. Найти вероятность того, что ее вытащит тот, кто начинает первый.
6. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. Что ве- роятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет?
7. В первой группе К студентов, во второй - М. В первой группе стипендию всем выдали в наборе 6x50 р. + 4x100р., во второй - в наборе 10х50 р. + 2х100 р. Некий студент , по- ложив стипендию в карман, вынул затем одну ассигнацию; она оказалась до- стоинством в 50 р. Какова вероятность того, что студент из второй группы?

Ответы и указания к решению контрольной работы №1.

1. 0,5. Указание: записать дискриминант и выяснить, при каких *q*он неотрицателен.

1. 3) 0,27. Указание: найдите вероятность того, что в числе три одинаковые цифры или вообще нет одинаковых цифр.4) 5) 0,4 6) Нет. Указание: воспользуйтесь

формулой полной вероятности. 7) . Указание: воспользуйтесь формулой Байеса.

Критерии оценивания контрольной работы №1.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6-7 заданий (без ошибок и недочетов), не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью вы- полнены 5 задач или 6 задач, но при отсутствии полных ссылок на используемые факты.

«Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно вы- полнил 3-4 задания (без грубых ошибок). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой верно выполнено менее 3 задач или 3-4 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №1 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ОПК-1 в части знания основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, умения находить вероятности сложных событий и условных вероят- ностей с использованием свойств вероятностей, формулы полной вероятности и формулы Байеса. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетвори- тельно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

### Контрольная работа №2 (Дискретные случайные величины)

* 1. Известно, что случайная величина  принимает два значения, одно из которых равно 2. Также известно, что M *ξ* =0.2; D *ξ* =2.16. Построить таблицу распределения случайной величины *ξ* .
	2. Стрелку выдано 4 патрона, Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0.2, вторым - 0.5, третьим - 0.7, четвертым - 0.9. Найти математическое ожидание числа израсходованных патронов до поражения мишени.
	3. Две клетки с подопытными мышами соединены коридорчиком. В момент начала опыта в первой клетке было 3 мыши, а во второй - 2. В процессе опыта каждая мышь из

первой клетки может с вероятностью перебежать в соседнюю, а мышь из второй клетки

с вероятностью перебежать в первую. Найти математическое ожидание числа мышей в первой клетке в конце опыта.

* 1. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите числовые характеристики случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если: а) испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует; б) испробованный ключ участвует в последующих опробованиях.
	2. В лотерее имеется m1 выигрышей стоимостью k1, m2 выигрышей стоимостью k2 и т.д., mn выигрышей стоимостью kn. Всего билетов N. Какую стоимость билета следу- ет установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось по- ловине его стоимости?
	3. Устройство состоит из 10 элементов. Вероятность отказа любого из них за время опыта не зависит от состояния других элементов и равна 0.1. Найти математическое ожи- дание числа таких опытов, в каждом из которых откажет ровно 3 элемента, если всего произведено 12 независимых опытов.

Ответы и указания к решению контрольной работы №2.

1) Значения –1 и 2 с вероятностями 0,6 и 0,4 соответственно 2) 2,32. Указание: составьте таблицу распределения. 3) 2 4) а) MX = 3, DX = 2. б) MX = 5, DX = 20. Указание: а) составьте таблицу распределения; б): воспользуйтесь характеристиками геометрического распределения. 5) 6) .

Критерии оценивания контрольной работы №2.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в одной из многоходовых задач (№№4–6), не содержится грубых ошибок, есть ссылки на исполь- зуемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полно- стью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты.

«Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно вы- полнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в одной из многоходовых задач (№№4–6). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №2 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятно- стей; умение находить вероятности сложных событий с использованием свойств вероят- ностей, умение находить и анализировать числовые характеристики случайных величин; владение навыками построения рядов распределения. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформи- рованности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неу- довлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

### Контрольная работа №3 (Непрерывные случайные величины)

1. Определить, может ли функция*F*(*x*) быть функцией распределения некоторой случай- ной величины (ответ обосновать):

{

∣*πx* +1∣−∣*πx*−1∣

*F* 1−*e*−*x , x*≥0 *,*

*F*( *x* )=

а)

2

0 *, x*≤0 *,*

{

( *x* )=

б)

0 *, x* ∈0

0 *, x*≤0 *,*

{

*F*( *x* )= 1+sin *x* +1 *, x*> 0

в) *x*2+1

*F*( *x* )= sin *x ,* 0∈ *x*≤5 *π* /2*,*

г) 1 *, x* >5 *π* /2

1. На сторонах *AB*и *AD* единичного квадрата *ABCD* выбраны точки *M*и *N* соответственно. Найти вероятность того, что площадь треугольника *MNC* не превосходит 1/4.
2. Из отрезка [–2;1] случайным образом взяли 2 числа. Найти вероятность того, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1.
3. На двух смежных сторонах (*AB*и *AD*) единичного квадрата выбрано по точке. Прямая, проведенная через отмеченные точки, отсекает от квадрата треугольник. Найти функцию и плотность распределения площади отсеченного треугольника.
4. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром 2:

*F* (*x*)=¿{0*,x*∈0¿¿¿¿

*ξ*

.Найти функцию и плотность распределения случайной вели-

чины .

1. Случайная величина распределена равномерно на отрезке [-π; π]. Найти закон рас- пределения случайной величины *η*=cos*ξ* .

Ответы и указания к решению контрольной работы №3.

1) а, в, г – не может, в – может 2) 3) 1/18

4)

5)

6)

Критерии оценивания контрольной работы №3.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в оставшей- ся, при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в оставшихся задачах. «Неу- довлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не бо- лее 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №3 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятно- стей; умение находить вероятности сложных событий с использованием свойств вероят- ностей; владение навыками построения функций, плотностей распределения случайных величин. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критери- ями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетвори- тельно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

### Контрольная работа №4 (Числовые характеристики случайных величин, пре-

**дельные теоремы)**

1. Случайная величина *ξ* имеет плотность распределения

*f a* (1−*x*2)*, x* ∈[−1,1 ]

*ξ*( *x* )={

0 *, x* ∉[−1,1 ]

. Найдите значение параметра *a*, математическое ожи-

дание и дисперсию величины *ξ* , а также математическое ожидание случайной вели- чины ∣*ξ*∣ .

1. Случайная величина *ξ* равномерно распределена на отрезке [−*π , π* ] .Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *γ* =cos *ξ* .
2. Вероятность того, что лампочка, изготовленная данным заводом, является бракован-

ной, равна 0,02. Для контроля отобрано наудачу 1000 лампочек. Оцените вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 ме- нее чем на 0,01.

1. Несимметричная монета выпадает «орлом» с вероятностью 0,36. Сколько нужно произвести бросаний, чтобы с вероятностью не ниже 0,9 можно было утверждать, что частота выпадения «орла» отличается от вероятности появления этого события не бо- лее чем на 0,1?
2. Плотность распределения случайной величины ξ = (*X*,*Y*):

*f* ( *x , y* )= *a* ( *x*+sin *y* )*,* 0≤*x*≤1 *,* 0≤ *y*≤*π* / 2

{

## 0 , иначе

Найти значение параметра *a*, законы распределения и числовые характеристики компонент *X*и *Y*, определить, являются ли *X*и *Y* зависимыми, найти коэффициент кор- реляции между *X* и Y.

Ответы и указания к решению контрольной работы №4.

1) 2) 0 3) 0,976 4) 63

5)

Числовые характеристики величин вычисляют- ся аналогично заданию №1. Величины зависимы, так как плотность совместного распре- деления не равна произведению плотностей компонент.

Критерии оценивания контрольной работы №4.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 5 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены задания №№1–4 и хотя бы наполовину выпол- нено задание №5 (например, найдены законы распределения компонент и вычислены числовые характеристики), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на ис- пользуемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой пол- ностью выполнены задания №№1–4 и нет серьезных продвижений в задании №5, а также за 3 верно решенные задачи из набора №№1–4и конструктивные продвижения в решении

задачи №5. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся пра- вильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвиже- ния в оставшихся задачах (верно решенная задача №5 при этом засчитывается как две).

«Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 заданий.

Контрольная работа №4 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятно- стей; умение находить и анализировать числовые характеристики случайных величин, умение находить законы распределения зависимых случайных величин; владение навы- ками построения функций, плотностей распределения случайных величин. Оценка «от- лично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует вы- сокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – ба- зовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компе- тенции на необходимом уровне не сформированы.

### Контрольная работа №5

**(Генерирование случайных величин, основы математической статистики)**

1. Случайная величина *ξ*1 равномерно распределена на отрезке [0,2], *ξ*2 равномерно распределена на отрезке [2,7]. *ξ*1 и *ξ*2 независимы. Найдите закон распределения величины *ξ*1 + *ξ*2 .
2. Случайная величина *ξ*1 имеет плотность распределения

{

## ax2 ,

0 *,*

{

*x* ∈[ 0,3 ]

*иначе* . , *ξ*2 имеет

плотность распределения

2*e*−2 *x ,* 0 *,*

*x*≥0

*иначе* . . *ξ*1 и *ξ*2 независимы. Найдите параметр

*a* и закон распределения величины *ξ*1 + *ξ*2 .

1. Случайная величина *ξ* равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Найти такую функцию *g*(*x*), чтобы величина *γ* = *g*(*x*) имела функцию распределения: а)

0 *, x* ∈0 *,*

{

arcsin √*x ,* 0≤*x* ≤4 *,*

2

{ 0 *, x*∈0 *,*

1 *, x* >4 . б)

1−*e*−2 *x*√ *x x*≥0 .

3 *x*2

−( *x*3−*a* )2/ 2

1. Случайная величина имеет плотность распределения *f* ( *x* )= √2 *π e*

. Методом

максимального правдоподобия найти оценку параметра *a*порезультатам трех наблюде- ний: 1, 2, 3.

1. Случайная величина имеет плотность распределения

*xe*−*x* / *b , b*2

0 *,*

{

*x*≥0

*иначе* .

. Методом мо-

ментов найти оценку параметра *b*порезультатам четырех наблюдений: 1, 2, 3, 4.

Ответы и указания к решению контрольной работы №5.

1) 2) ,

3) а) б) 4) 9 5) 1,25.

Критерии оценивания контрольной работы №5.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 5 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 4 задачи и есть верные продвижения в оставшейся (например, выполнен из пунктов задания №3 или частично разобраны нетри- виальные интервалы в заданиях №№1–2), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4 заданияили выполнены 3 задания и есть конструктивные продвижения в одной из оставшихся. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 2–3 задания (без грубых ошибок). «Неудовлетво- рительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 1 зада- ния или 2–3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №5 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей и математической статистики, точных методов вычислений в теории вероятностей, метода построения оценок и проверки гипотез в математической статистике; умение находить законы распределения зависимых случай- ных величин; владение навыками построения функций, плотностей распределения случай- ных величин, генерирования случайных величин с заданным законом распределения,по- строения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода мак- симального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов. Оценка «от- лично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует вы- сокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – ба- зовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компе- тенции на необходимом уровне не сформированы.

### Тестовые вопросы

(для оценки сформированности компетенции на базовом уровне)

1. Пусть вероятность события A равна 0,7. Известно, что если событие A происходит, то происходит и событие B. Что можно заведомо сказать про вероятность события B?

(а) P(B) ≤ 0,7 (б) P(B) ≥ 0,7(в) P(B)= 0,7(г) ничего нельзя сказать.

1. Может ли математическое ожидание случайной величины принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)

(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

1. Из перечисленных свойств математического ожидания подчеркните те, которые верны для всех случайных величин X и Y (считать, что мат. ожидание всех приведённых в вопросе случайных величин существует):

(а) M(X+Y) = MX + MY (б) M(XY) = MX·MY (в) M(X-Y) = MX – MY (г) M(-X) = MX.

1. Может ли дисперсия случайной величины принимать такие значения? (Укажите все до- пустимые значения.)

(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

1. Из перечисленных свойств дисперсии подчеркните те, которые верны для всех случай- ных величин X и Y (считать, что дисперсии всех приведённых в вопросе случайных вели- чин существуют):

(а) D(X+Y) = DX + DY (б) D(XY) = DX·DY (в) D(X-Y) = DX – DY (г) D(-X) = DX.

1. Может ли коэффициент корреляций двух случайных величин принимать такие значе- ния? (Укажите все допустимые значения.)

(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

1. Функция F(x) принимает значение 0 при x<0, значения sinxпри xот 0 до π, значение 1 при x>π. Эта функция не является функцией распределения случайной величины, так как для неё не выполняются некоторые необходимые свойства. Укажите, какие из приведён- ных причин для этой функции верны:

(а) Функция распределения должна удовлетворять неравенству 0 ≤F(x) ≤ 1, а приведённая функция этому неравенству не удовлетворяет.

(б) Функция распределения должна быть нестрого возрастающей, а приведённая функция убывает на некотором промежутке.

(в) Функция распределения всегда непрерывна, а приведённая функция имеет разрыв.

(г) При x → +∞ функция распределения должна стремиться к 1, а приведённая функция не стремится к 1 при x → +∞.

(д) При x → –∞ функция распределения должна стремиться к 0, а приведённая функция не стремится к 0 при x → –∞.

Верные ответы на тестовое задание:

1б 2абвгд 3ав 4абг 5г 6бгд 7бг

Критерии оценивания заданий:

задание №1: 3 балла за верный ответ, 0 баллов за неверный;

задания №2–3 и №№5–6: 1 балл за каждый верный ответ, –1 балл за каждый неверно ука- занный ответ, 0 баллов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в те- стовом задании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это задание выставляется 0 баллов;

задание №4: 2 балла за верный ответ, –1 балл за каждый неверно указанный ответ, 0 бал- лов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в тестовом задании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это задание выставляется 0 баллов.

Итого максимальное суммарное количество баллов: 20.

Критерии оценивания тестовой работы.

Вариант №1 (зачтено/не зачтено): оценка «зачтено» выставляется, если тестируемый на- брал не менее 8 баллов, в противном случае оценка «не зачтено».

Вариант №2 (балльная оценка): оценка «отлично» (5 баллов) – тестируемый набрал 17–20 баллов, оценка «хорошо» (4 балла) – тестируемый набрал 13–16 баллов, оценка «удовле- творительно» (3 балла) – тестируемый набрал 8–12 баллов, оценка «неудовлетворитель- но» (2 балла) – тестируемый набрал 0–7 баллов.

### 1.2 Список вопросов для проведения промежуточной аттестации Список вопросов к зачету

(зачет выставляется по результатам выполнения письменной зачетной работы и краткого собеседования со студентом после его проверки):

События и их вероятности. Вычисление вероятностей.

* + Классическое определение вероятностей. Исходы, благоприятные исходы.
	+ Комбинаторные схемы выбора: размещения, сочетания, перестановки с по- вторениями и без повторений.
	+ Свойства событий и вероятностей событий.
	+ Формула полной вероятности. Формула Байеса.
	+ Геометрические вероятности (на прямой, на плоскости, в пространстве). На- хождение вероятностей событий.

Дискретные случайные величины, их числовые характеристики.

* + Закон распределения случайной величины.
	+ Стандартные распределения: индикатор события, геометрическое, биноми- альное, пуассоновское, гипергеометрическое распределение.
	+ Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.
	+ Числовые характеристики стандартных распределений.
	+ Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
	+ Формула полного математического ожидания.
	+ Нахождение вероятностей и вычисление неизвестных параметров с исполь- зованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

### Примерный вариант зачетной работы

1. Из колоды в 52 карты случайным образом выбирается 4 карты. Найдите вероятность того, что среди них не менее 2 тузов.
2. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. а) Что вероятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет? б) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем по- следним?
3. Кинотеатр вмещает 730 зрителей. Найдите вероятность того, что хотя бы 3 зрителя родились сегодня.
4. Даны все возможные значения дискретной случайной величиныX:

х1 = –1, х2 = 0, х3 = 1, а также известны МX = 0,1, DX = 0,89. Постройте таблицу рас- пределения величины X.

1. Двое игроков бросают по одной игральной кости, пока на кости второго игрока не выпадет значение, большее значения на кости первого игрока. Случайная величина X –

общее количество бросаний кости первого игрока. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

1. Случайные величины  и независимы, известны их дисперсии: D  = 3, D = 5. Най- дите cov(3*ξ*+ –6, 3 *ξ*– 2 +1).

Ответы и указания к решению предложенного варианта зачетной работы.

1) 2) Указание: воспользоваться формулой полной вероятности и формулой Байеса. а) более вероятно, что не попадет; б) Одинаково вероятно. 3)

4) Значения х1 = –1, х2 = 0, х3 = 1 с вероятностями p1 = 0.4, p2 = 0.1, p3 = 0.5 5)

6) 17.

Критерии оценивания зачетной работы.

В практическую часть зачетной работы включается 6 заданий, аналогичных зада- чам контрольных работ №1 и №2, и позволяет оценивать сформированность профессио- нальной компетенции ОПК-1 в рамках соответствующих компонент. О высоком уровне сформированности отмеченной компетенции можно сделать вывод в том случае, если в работе верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в оставшейся, при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. Вывод о продвинутом уровне сформирован- ности компетенции делается на основе работы, в которой полностью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты. Если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в оставшихся задачах, то делается вывод о базовом уровне сформированности компетенции. В описанных выше случаях обучающемуся выставляется оценка «зачтено».

Если в работеправильно выполнено не более 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов, то делается вывод о недостаточном уровне сформирован- ности отмеченной компетенции и выставляется оценка «не зачтено».

### Список вопросов к экзамену:

1. Определения вероятности. События, операции над ними.
2. Аксиоматический подход к определению вероятности, свойства вероятностей
3. Формула включений-исключений. Задача о почтальоне.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Независимость событий. Независимость отрицания событий
6. Случайные величины. Примеры дискретных случайных величин: индикатор события, геометрическое, биномиальное, гипергеометрическое и пуассоновское распределение.
7. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства. Аддитив- ность математического ожидания.
8. Математическое ожидание индикатора. Математическое ожидание величины с геомет- рическим, биномиальным, гипергеометрическим, пуассоновским законом распределе- ния.
9. Независимость случайных величин. Теорема об эквивалентности определений незави- симости. Независимость функций от независимых случайных величин.
10. Дисперсия случайной величины. Среднеквадратичное отклонение. Свойства. Диспер- сия индикатора. Дисперсия величины с геометрическим, пуассоновским законом рас- пределения. Дисперсия суммы случайных величин. Дисперсия величины с биномиаль- ным законом распределения.
11. Математическое ожидание произведения случайных величин. Ковариация случайных величин. Свойства ковариации.
12. Коэффициент корреляции случайных величин. Свойства коэффициента корреляции.
13. Моменты случайной величины, их свойства.
14. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Сходимость по вероятности.
15. Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
16. Условные распределения. Условное математическое ожидание. Формула полного математического ожидания.
17. Функция распределения случайной величины, ее свойства. Непрерывные случайные величины.
18. Плотность распределения случайной величины, ее свойства. Примеры непрерывных случайных величин (равномерное, показательное, нормальное распределения). Нормальное распределение. Его свойства, характеристики.
19. Нахождение частных плотностей по общей плотности.
20. Независимость непрерывных случайных величин. Распределения максимума и ми- нимума из N независимых случайных величин.
21. Локальный смысл плотности.
22. Модель радиоактивного распада атома.
23. Математическое ожидание непрерывных случайных величин. Примеры. Вычислитель- ная функция математического ожидания для непрерывных распределений. Свойства математического ожидания.
24. Дисперсия случайной величины. Ее свойства. Примеры.
25. Дисперсия суммы. Ковариация и коэффициент корреляции. Свойства ковариационной матрицы.
26. Распределение суммы двух независимых случайных величин. Формула свертки.
27. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Эссеена.
28. Генерирование случайных величин.
29. Классическая модель математической статистики. Выборки, оценки, их характери- стики. Оценки математического ожидания и дисперсии.
30. Выборочное (эмпирическое) распределение. Гистограмма.
31. Методы построения оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия. Сравнение оценок.
32. Интервальные оценки и доверительные интервалы. Построение интервальной оценки для неизвестной вероятности в схеме Бернулли.
33. Гипотезы, их проверка. Критерий Пирсона. χ2 – распределение, распределение Стью- дента.
34. Выборочный коэффициент корреляции.

### Темы практических заданий к экзамену

События и их вероятности. Вычисление вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей. Исходы, благоприятные исходы.
2. Комбинаторные схемы выбора: размещения, сочетания, перестановки с повторениями и без повторений.
3. Свойства событий и вероятностей событий.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Геометрические вероятности (на прямой, на плоскости, в пространстве). Нахождение вероятностей событий.

Дискретные случайные величины, их числовые характеристики.

1. Закон распределения случайной величины.
2. Стандартные распределения: индикатор события, геометрическое, биномиальное, пуассоновское, гипергеометрическое распределение.
3. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.
4. Числовые характеристики стандартных распределений.
5. Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
6. Формула полного математического ожидания.
7. Нахождение вероятностей и вычисление неизвестных параметров с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Непрерывные случайные величины, их числовые характеристики.

1. Непрерывные случайные величины. Примеры непрерывных случайных величин (рав- номерное, показательное, нормальное распределения).
2. Функция распределения и плотность распределения случайной величины, их свойства.
3. Восстановление функции распределения по плотности распределения.
4. Построение функции распределения с помощью геометрических вероятностей.
5. Построение функции и плотности распределения случайной величины g(ξ) по извест- ной функции или плотности распределения случайной величины ξ.
6. Нахождение числовых характеристик случайной величины: математического ожида- ния, дисперсии, среднеквадратического отклонения, моментов различных порядков. Нахождение числовых характеристик функции от случайной величины.
7. Нахождение функции и плотности распределения суммы случайных величин.
8. Двумерные случайные величины:
	* Вычисление вероятностей.
	* Нахождение частных плотностей компонент случайной величины по плотности совместного распределения.
	* Вычисление числовых характеристик компонент.
	* Проверка компонент двумерной случайной величины на зависимость.
	* Вычисление ковариации и коэффициента корреляции компонент.
9. Генерирование случайной величины с заданным законом распределения из случайной величины с известным законом распределения.

Основы математической статистики

1. Построение оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия и метода моментов.
2. Проверка гипотез с использованием критерия Пирсона.
3. Вычисление выборочного коэффициента корреляции, проверка его значимости.

### Пример экзаменационного билета

(2 теоретических вопроса и 2 задачи)

1. Локальный смысл плотности распределения случайной величины.
2. Статистические оценки математического ожидания и дисперсии. Их свойства.
3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a,b]. Найти вероят- ность: P(|X-MX|≥σX)
4. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол *φ*, равномерно распределенный на отрезке [0,π]. Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.

Критерии оцениваниязаданий экзаменационного билета

1. Сформулировать теорему о локальном смысле плотности (0,2 балла), доказать её (0,4 балла), уметь дать грамотную интерпретацию и использовать для оценки вероятностей (например, для приблизительного сравнения вероятностей попа- дания случайной величины в указанные интервалы при известной плотности распределения) (0,4 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 бал- лов.
2. Сформулировать определения состоятельности (0,1 балла) и несмещенности (0,1 балла) статистической оценки, уметь проинтерпретировать определения (0,1 балла), обосновать состоятельность оценки математического ожидания как выборочного среднего (0,1 балла) и дисперсии как разности среднего по квад- ратам и квадрата среднего (0,1 балла), доказать несмещенность такой оценки математического ожидания (0,1 балла), показать смещенность такой оценки дисперсии (0,2 балла), предложить способ исправления оценки (0,1 балла), обосновать состоятельность и несмещенность исправленной оценки (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчиты- вается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 баллов.
3. Дать описание (записать плотность и/или функцию распределения) равномер- ного закона распределения (0,1 балл), вывести или воспользоваться известным значением математического ожидания (0,1 балл) и дисперсии (0,1 балл) случай- ной величины с таким законом распределения, записать и преобразовать нера- венство из задачи (0,1 балл), предложить конкретный вариант дальнейшего на- хождения вероятности (0,1 балл) и воспользоваться им для нахождения кон- кретного значения вероятности (0,4 балла), убедиться в независимости результата от параметров задачи (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,9–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,8 баллов.
4. Записать закон распределения для угла *φ* (0,1 балла), вывести зависимость расстояния между концами ножек от угла (0,3 балла), далее либо воспользоваться вычислительной формулой для математического ожидания функции от случайной величины с известным законом распределения (0,6 баллов), либо вывести функцию (0,2) и плотность (0,1 балла) распределения расстояния между концами ножек, после чего по найденной плотности по- считать математическое ожидание (0,3 балла). Задание засчитывается полностью, если вы- полнено на 0,9–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,8 баллов.

Критерии оценивания экзамена, выставления оценки и выводов о сформированности компетенций приведены в параграфах 3.3-3.4 методических рекомендаций преподавателю (раздел 3 рабочей программы курса).

### Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и крите- риев оценивания компетенцийна различных этапах их формирования, описание

**шкалы оценивания**

### Шкала оцениваниясформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дис- циплины осуществляется по следующейтрехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков,полученных сту- дентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

*Продвинутый уровень* - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

*Высокий уровень* - предполагает способность студента использовать потенциал ин- тегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятель- ного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования из- вестных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

### Перечень компетенций, этапы их формирования,описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Код компе- тенции** | **Форма контроля** | **Этапы форми- рования****(№ темы (раздела)** | **Показатели оценива- ния** | **Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования** |
| **Пороговый уровень** | **Продвинутый уровень** | **Высокий уровень** |
| **Профессиональные компетенции** |
| ОПК-1 | Контрольные ра- боты (1-5), Самостоятельная работаЗадания для до- машней работы по темам№ 1–9Зачет Экзамен | 1 – 9 | **Знать:*** основные понятия, теоремы и уравнения теории вероятностей и математической стати- стики;
* точные методы вы- числений в теории ве- роятностей,
* метода построения оценок и проверки гипотез в математиче- ской статистике.

**Уметь:*** находить вероятно- сти сложных событий с использованием свойств вероятностей;
* находить условные вероятности событий, вероятности сложных событий с использова-

нием формулы полной | 1. Воспроизведение основных понятий,

теорем и соотношений теории вероятностей и их интерпретация.1. Вычисление вероят- ностей простых со- бытий в дискретных пространствах ис- ходов, вероятностей сложных событий с

использованием основных свойств ве- роятностей. | 1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений теории ве- роятностей и их интерпре- тация. Выполнение основ-

ной части математиче- ских выкладок, воспроиз- ведение базовых матема- тических рассуждений в процессе их вывода.1. Вычисление вероятно- стей простых и сложных событий в дискретных пространствах исходов с использованием комбина- торного подхода к вычис- лению вероятностей, базо- вых свойств событий и ве-

роятностей. | 1. Воспроизведение основных теорем и соотношений теории вероятностей и их интерпрета-

ция. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.1. Вычисление вероятностей простых и сложных событий в дискретных пространствах ис- ходов с использованием комби- наторного подхода к вычисле- нию вероятностей, а также пол- ного набора свойств событий и

вероятностей. |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | вероятности и форму- лы Байеса;* находить и анализи- ровать числовые ха- рактеристики случай- ных величин,
* находить законы распределения зави- симых случайных ве- личин,
* проверять гипотезы с использованием кри- терия Пирсона, прове- рять однородность вы- борок.

**Владеть навыками:*** построения рядов распределения, функций, плотностей распределения случай- ных величин,
* генерирования слу- чайные величины с за- данным законом рас- пределения,
* построения оценок неизвестных парамет- ров распределения с использованием мето- да максимального правдоподобия, мето- да наименьших квад- ратов, метода момен- тов.
 | 1. Понимание зави- симости и независимо-

сти событий, вос- произведение основ- ных свойств. Владение понятием условной ве- роятности.1. Воспроизведение основных свойств дис-

кретных случайных величин и их число- вых характеристик. Построение законов распределения в дис- кретных вероятност- ных пространствах. Вычисление числовых характеристик дис- кретных случайных величин по закону распределения. | 1. Понимание зависимо- сти и независимости со- бытий, воспроизведение основных свойств и их доказательств. Владение понятием условной ве- роятности, умение прове- рять зависимость событий и вычислять условные ве- роятности в базовых зада-

чах.1. Воспроизведение основ- ных свойств дискретных случайных величин и их числовых характеристик, обоснование основных

свойств. Построение законов распределения в дискретных вероятност- ных пространствах. Вы- числение числовых харак- теристик дискретных слу- чайных величин по закону распределения и исполь- зованием свойств число- вых характеристик. Уме- ние давать вероятностную интерпретацию результа- тов вычисления. | 1. Уверенное понимание зави- симости и независимости со- бытий, воспроизведение всех

изучаемых свойств и их доказательств. Владение поня- тием условной вероятности, умение проверять зависимость событий и вычислять условные вероятности в базовых задачах. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математиче- ских рассуждений в процессе решения задач на данную тему.1. Воспроизведение основных свойств дискретных случайных величин и их числовых характе- ристик, обоснование их свойств в полном объёме. Построение законов распределения в дис-

кретных вероятностных про- странствах. Вычисление число- вых характеристик дискретных случайных величин по закону распределения (в том числе на основе стандартных распределе- ний) и с использованием свойств числовых характери- стик. Умение давать вероят- ностную интерпретацию результатов вычисления. |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1. Воспроизведение основных свойств не- прерывных случайных величин и их число-

вых характеристик. Вычисление числовых характеристик непре- рывных случайных ве- личин по закону рас- пределения.1. Воспроизведение основных понятий,

теорем и соотношений математической стати- стики и их интерпре- тация. | 1. Воспроизведение основ- ных свойств непрерывных случайных величин и их числовых характеристик, а также основных свойств. Построение законов рас- пределения непрерывных величин на основе геомет-

рических вероятностей. Вычисление числовых ха- рактеристик непрерывных случайных величин по закону распределения, в том числе для величин на основе стандартных рас- пределений. Умение да- вать вероятностную ин- терпретацию результатов вычисления.1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математи-

ческой статистики и их интерпретация. Выполне- ние основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассужде- ний в процессе их вывода. | 1. Воспроизведение основных свойств непрерывных случай- ных величин и их числовых ха-

рактеристик, а также всех изучаемых свойств. Построение законов распределения непре- рывных величин на основе геометрических вероятностей.Преобразование законов рас- пределения величин. Вычисле- ние числовых характеристик не- прерывных случайных величин по закону распределения.Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение физических и математических рассуждений в процессе решения задач. Уме- ние давать вероятностную ин- терпретацию результатов вы- числения.1. Воспроизведение основных теорем и соотношений матема- тической статистики и их ин-

терпретация. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода. |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 7. Постановка задач точечного оценивания параметров распреде-ления, постановка гипотез согласия и од- нородности. | 7. Постановка задач точеч- ного оценивания парамет-ров распределения, по- становка гипотез согласия и однородности. Вос- произведение методов по- строения точечных оценок и критериев проверки гипотез. Выполнение основной части математи- ческих выкладок, вос- произведение базовых математических рассужде- ний в процессе их вывода. | 7. Постановка задач точечного оценивания параметров распре-деления, постановка гипотез согласия и однородности. Вос- произведение методов построе- ния точечных оценок и крите- риев проверки гипотез, форму- лировка и обоснование основ- ных свойств. Выполнение в полном объёме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода. |

* 1. **Методические рекомендации преподавателюпо процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирова-**

### ния компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом дея- тельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разде- ле «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

### Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компе-

**тенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

* владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
* знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
* владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
* способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дис- циплины;
* усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
* знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
* самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

* + достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
	+ использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
	+ владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и про - фессиональных задач;
	+ способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
	+ усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
	+ умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
	+ самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых об- суждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

* + систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
	+ точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
	+ безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в по - становке и решении научных и профессиональных задач;
	+ способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабо- чей программы дисциплины;
	+ полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
	+ умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дис- циплине и давать им критическую оценку;
	+ активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### Общие рекомендации по изучению материала курса и подбору заданий

Курс теории вероятностей и математической статистики является одним из важ- нейших математических курсов для специальности прикладная математика и информати- ка и относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

Специфика начального этапа изучения теории вероятностей и математической статистике требуют актуализации знаний дискретной математики и комбинаторики на первых практических занятиях. Вместе с тем данный процесс может сопровождаться вве- дением основных вероятностных понятий: случайного события, эксперимента, исхода, ча- стоты, вероятности. На лекциях по элементарной теории вероятностей целесообразно продемонстрировать классические вероятностные опыты, проиллюстрировать основные понятия и решить несколько задач.

Целесообразно подготовить для каждого занятия билеты с задачами (достаточно иметь 2-3 разных варианта). Для первого занятия можно выбрать простые задачи на классификацию событий, частоту, непосредственный подсчет вероятностей, проведение экспериментов. Для второго - взять задачи, где используются теоремы сложения и умножения вероятностей, число сочетаний для непосредственного подсчета вероятностей, а также проводятся эксперименты. При изучении формулы Бернулли можно для иллю- страции рассмотреть ее интерпретацию с помощью так называемых урновых моделей.

Особое внимание следует уделить вопросам, связанным с понятием условной ве- роятности. Разницу между априорной и апостериорной вероятностью удобно проиллю- стрировать на крайних примерах (информация о наступлении события делает гипотезу не- возможной либо достоверной) и подтвердить с помощью формулы Байеса. Формулу пол- ной вероятности рекомендуется проиллюстрировать также рассмотрением понятия слу- чайного блуждания (на примере задачи о разорении).

В целом переход от исчисления вероятностей к изучению случайных величин как в первом, так и во втором семестре, происходит по одной схеме: подробный разбор мето- дов вычисления вероятностей события (с помощью комбинаторных свойств для дискрет- ных величин и на примере геометрических вероятностей в случае непрерывных величин), после чего следует обобщение задачи, решение ее в общем виде (построение таблицы рас- пределения или функции распределения случайной величины).

Исследование операций над случайными величинами (преобразование распреде- лений, генерирование случайной величины с заданным законом распределения) целесооб- разно сопровождать примерами процессов, при моделировании которых используются разнообразные псевдослучайные датчики.

При изучении основ математической статистики следует уделить особое внима- ние проверке простых гипотез с использованием критерия Пирсона, а также методам по- строения оценок параметров распределения (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов), сопоставляя точность оценок, получаемых с помощью различных методов.

### Форма проведения экзамена по курсу

Студенты и преподаватели вполне отдают себе отчет в том, что еще живо пред- ставление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий,

преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо уси- лий. При этом студенты порой пытаются подтвердить данное представление, а препода- ватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Очевидно, формат итоговой (или семестровой) аттестации накладывает опреде- ленный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной ат- тестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, то в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованностью студентов в работе в аудитории или дома. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении семестровой аттестации (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях, результатов промежуточной аттестации, самостоятельной работы вне аудитории, активно- сти работы на лекциях) может поспособствовать увеличению интенсивности работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных за- нятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Данные соображения были учтены при разработке формы итоговой аттестации. На экзамене студент получает билет с четырьмя заданиями – два теоретического характе- ра и две задачи – «базовый комплект». Характер работы по ходу семестра «материали- зуется» в количестве дополнительных предложенных заданий: за активную работу на за- нятиях, высокие результаты прохождения промежуточных аттестаций (контрольных ра- бот) количество предлагаемых студенту заданий может быть уменьшено, а при слабой ра- боте (низкая посещаемость, слабые результаты или пропуски контрольных работ) – увели- чено (возможно, на 2-3). Однако критерии не зависят от количества предложенных зада- ний, оценка выставляется по следующей схеме: пять минус количество заданий, справить- ся с которыми не удалось. Таким образом, активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации, а те, кто своим жизнен- ным стилем избрали упомянутый в эпиграфе принцип, для успешного прохождения экза- менационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий.

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и про- зрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулиру- ет студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

### Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности компетенции по окончании освое- ния дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворитель- но», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полно- стью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полно- стью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компе- тенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полно- стью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на по- роговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

В рамках экзамена выставление оценки и проверки уровня сформированности про- фессиональной компетенции ОПК-1 производится в соответствии с описанными выше принципами и критериями из раздела 3.3. Оценка «отлично» (обучающийся справился со всеми предложенными экзаменационными заданиями) соответствует высокому уровню сформированности компетенции. Если обучающийся не справился лишь с одним из пред- ложенных заданий, то делается вывод о продвинутом уровне сформированности компе- тенции и выставляется оценка «хорошо». Оценка «удовлетворительно» и вывод о ба- зовом уровне сформированности компетенции соответствуют ситуации, когда экзамену- емый не справился с двумя предложенными заданиями (и остальные задания выполнены на необходимом уровне). Если обучающийся не справился с тремя или большим количе- ством экзаменационных заданий, то можно сделать вывод, что компетенция сформиро- вана на уровне ниже порогового, а за экзамен выставляется оценка «неудовлетворитель- но».

### Приложение №2 к рабочей программе дисциплины

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс теории вероятностей и математической статистики является одним из важ- нейших математических курсов для специальности прикладная математика и информати- ка и относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

В ходе изучения курса предполагается проведение пяти контрольных работ по следующим темам:

1. Исчисление вероятностей
2. Дискретные случайные величины
3. Непрерывные случайные величины
4. Числовые характеристики случайных величин
5. Элементы математической статистики

В процессе решения контрольных работстуденты должны овладеть практически- ми навыками по исчислению вероятностей (в том числе с использованием комбинаторных свойств), построения законов распределения дискретных и непрерывных случайных вели- чин, нахождению их числовых характеристик, статистическойобработке и анализу опыт- ных данных, получаемых в ходе проведенияэкспериментальных исследований.

Подробные сведения по данным темам Вы можете найти в книгах изприведен- ного ниже списка рекомендуемой литературы, где есть ссылки насоответствующие главы и параграфы.

### Рекомендуемая литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110c
2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479c

### Примеры выполнения заданий контрольных работ

**Пример 1.** Опыт состоит в бросании игральной кости. Событие *Аi,* (*i* = 1, 2, 3, 4, 5, 6)

– выпадение *i* очков; событие *А* – выпадение четного числа очков, *В* – выпадение нечетного числа очков, *С* – выпадение числа очков, кратного трем, и *D* – выпадение числа очков, большего трех. Выразите события *А, В, С* и *D* через *Аi,* (*i* = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

**Решение.** Событие *А* наступает тогда и только тогда, когда наступает *А2,* или *А4,* или

*А6.*Значит*А = А2 + А4 + А6.*Аналогично:*В = А1 + А3 + А5, С = А3 + А6*и *D = А4 + А5 + А6.*

**Пример 2.** Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля?

**Решение.**Такие четырехзначные числа можно рассматривать как строки длиной 4, составленные из элементов множества Х = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, т.е. как размещения с повторениями из 9 элементов по 4. Поэтому искомое число способов равно: 94 = 6561.

**Пример 3.** В бригаде 4 женщины и 3 мужчин. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчин?

**Решение.** Применим схему статистического выбора. Из 7 членов бригады 4 человека

*С*4

можно выбрать 7 = 35 способами, следовательно, число всех элементарных исходов

*С*2

испытания равно 35. Далее, из 4 женщин можно выбрать 2 женщины 4 = 6 способами,

*С*2

а из 3 мужчин можно выбрать 2 мужчин 3 = 3 способами. Тогда число благоприятных

*р*=18

случаев будет равно 6  3 = 18. Таким образом,

35 .

**Пример 4.** Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго

– 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

**Решение.** Введем обозначения: событие А – попадание первого стрелка, событие В – попадание второго стрелка, событие С – попадание хотя бы одного из стрелков. Тогда, очевидно С = А + В, причем события А и В совместны. Следовательно, по формуле (3)

р(С) = р(А) + р)В) – р(АВ).

Так как события А и В независимы, то р(С) = р(А) + р)В) – р(А) р(В).

Учитывая, что р(А) = 0,8, р(В) = 0,6, получаем: р(С) = 0,8 + 0,6 – 0,8 · 0,6 = 0,92.

**Пример 5.** Найдите наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах, используя условие примера 1, и соответствующую этому числу вероятность.

**Решение.** Так как np + p = 5  0,8 = 4,8 не целое, то k0 = [4,8] = 4; вероятность Р5(4)

# *P* ( 4 ) = *C*4 0,84⋅0,2 =0 *,* 4096

находим по формуле Бернулли: 5 5 .

**Пример 6.** По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле р = 0,8. Найти закон распределения дискретной случайной величины х, равной числу попаданий в мишень

**Решение.** Возможные значения случайной величины х: 0, 1, 2, 3, 4.

Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

*р* = *р* ( *х* =0) = *С*0 0,80 ⋅0,24 = 0 *,* 0016 .

4

0

*р* =*р* ( *х* =1 ) = *С*1 0,8⋅0,23 = 0 *,* 0256 .

4

1

*р* = *р* ( *х* =2) = *С*2 0,82 ⋅0,22 = 0 *,*1536 .

4

2

*р* = *р* ( *х* =3) = *С*3 0,83⋅ 0,2 = 0 *,* 4096 .

4

3

*р* = *р* ( *х* =4 ) = *С*4 0,84 ⋅0,20 = 0 *,* 4096 .

4

4

Закон распределения х представится таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *pi* | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

**Пример 7.** Дана функция

{

*F*(*x*)=¿{0*, если x*≤0*,*¿ sin*x, если*0∈*x*≤

2*,*¿¿¿

Является ли функция F(x) функцией распределения некоторой случайной величины?

*р*(*π* ≤ *х* ∈ *π* )

В случае положительного ответа найдите 6

F(x).

3 . Построить график функции

**Решение.** Для того чтобы наперед заданная функция F(x) являлась функцией распре- деления некоторой случайной величины х, необходимо и достаточно выполнение следу- ющих условий (характеристических свойств функции распределения):

1. F(x) – неубывающая функция.

lim *F* ( *x* ) = 1

2. *x* → ∞ ,

lim

*x* →−∞

*F* ( *x* ) = 0

.

3. При любом х  R F(*x* – 0) = F(*x*).

Для заданной функции F(x) выполнение этих условий очевидно. Значит, F(x) –

функция распределени*π*я. *π*

Вероятность

*р*(6 ≤ *х* ∈ 3 )

вычисляем по формуле:

*р*(*π* ≤ *х* ∈ *π* )= *F* (*π* )− *F* (*π* ) =sin *π*

− sin *π* = √3−1

# 6 3 3 6

3 6 2 .

*F*(*x*)=¿{0*,еслиx*≤0*,*¿{0,2*,если*0∈*x*≤1*,*¿{0,1*х,если*1∈*x*≤3*,*¿¿¿

**Пример 8.** Дана функция

Является ли F(x) функцией распределения случайной величины?

**Решение.** Легко заметить, что F(1) = 0,2 > 0,11 = F(1,1). Следовательно, F(*x*) не является неубывающей, а значит, не является функцией распределения случайной величины. Заметим, что остальные два свойства для данной функции справедливы.

**Пример 9.** Дана функция

*f* (*x*)=¿{0*, если x*≤ 0*,*¿¿¿

При каком значении постоянной *а* функция *f*(*x*) является плотностью вероятности

некоторой случайной величины **х**? Найдите функцию распределения F(*x*) величины х? Вы- числите вероятность попадания случайной величины х в промежуток [0; 1] двумя способами: при помощи плотности вероятности *f*(*x*) и при помощи функции распределе- ния F(*x*).

**Решение.** Прежде всего должно быть *а* 0. Для нахождения значения *а* запишем

∞ ∞ *a* ∞

∫ *f* (*x* )*dx*=1*, a* ∫ *e*−*αx dx*=1*,* −

*e*−*αx* ∣ = 1 *,*

условие (3) и преобразуем его: −∞

−∞ *α* 0

*a* = 1

*α*

Следовательно, *а* =  и функция *f*(*x*) имеет вид:

*f* (*x*)=¿{0*, если x*≤ 0*,*¿¿¿

Найдем функцию распределения F(*x*):

*x x*

*F*( *x* )=∫ *f* (*t* )*dt*=∫ 0 *dt*= 0 *;*

если *х* 0, то −∞ −∞

*x x x*

*F*( *x* )=∫ *f* (*t* )*dt* =∫ 0 *dt* + ∫ *α e*−*α t dt* = 1 − *e*−*α x*

если *x*> 0, то −∞

−∞ 0 .

Следовательно,

*F*(*x*)=¿{0*, если x*≤ 0*,*¿¿¿

1 1

*P*(0≤ *x*≤1) =∫ *f* ( *x* )*dx* =∫ *α e*−*αx dx* = 1− 1 .

Вычислим вероятность Р( 0 **х** 1) : 0 0 *eα*

**Пример 10.**Случайная величина X имеет плотность распределения (показательный закон распределения):

*f* (*x* )=¿{0*, если x* ∈ 0*,* ¿¿¿¿

Найдите математические ожидания величин **X** и **у** = 2**X**2 +3.

**Решение.** Имеем:

∞

∞

−*αx*

−*αx* ∞ −*αx* 1

*MX*= ∫ *x α e dx* = − *x e* ∣ + ∫*e*

*dx* = *α* .

0 0 0

∞

*MY* = ∫(2 *x*

0

2+3 ) *α e*−*αx dx* =

3 *α*2 + 4

*α*2 .