

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Теория уравнений с запаздыванием**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Теория уравнений с запаздыванием» – дать студентам представление о применении методов функционального анализа к исследованию конкретных прикладных задач. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом;
- познакомить студентов с основными видами дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
- научить студентов методам исследования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом
- познакомить с краевыми задачами для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
- дать представление о корректности постановки задачи;
- научить студентов исследовать вопросы существования и устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины «Теория уравнений с запаздыванием», используются студентами в процессе изучения специальных дисциплин, а также в ходе выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> основные понятия и результаты теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. <b>Уметь:</b> решать типовые вычислительные и аналитические задачи теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. <b>Владеть навыками:</b> самостоятельного изучения вопросов теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в частности, в области разработки алгоритмов нахождения решения таких задач

	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Знать:</b> основные алгоритмические методы решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом <b>Уметь:</b> выделять составляющие теории уравнений с запаздывающим аргументом в поставленных задачах <b>Владеть навыками:</b> численного решения уравнений с запаздывающим аргументом
	<b>И-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата	<b>Уметь:</b> пользоваться аналитическими методами теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.) <b>Владеть:</b> способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

#### 4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единиц, 144 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Определение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (ДУЗА). Прикладные задачи, приводящие к ДУЗА. Пространство начальных условий. Метод шагов. Линейные ДУЗА с постоянными коэффициентами.	7	2	2				3	задания для самостоятельной работы, устный опрос

	Общий вид линейного ДУЗА. Теорема существования, единственности решения задачи Коши для линейного ДУЗА. Теорема о непрерывной зависимости решений линейного ДУЗА от начальных условий и параметров уравнения.								
2.	Решения Эйлера. Характеристическое уравнение. Представление решений линейного автономного ДУЗА с помощью преобразования Лапласа. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Сопряженное уравнение. Теорема о взаимосвязи исходного и сопряженного уравнений.	7	4	4		2		4	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
3.	Методы исследования нулей характеристических квазиполиномов. Асимптотическое расположение нулей. Условия, обеспечивающие принадлежность нулей заданному типу. Метод D-разбиений.	7	4	4				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
4.	Экспоненциальная дихотомия решений уравнений с постоянными коэффициентами устойчивость решений. Периодические решения неоднородного уравнения.	7	2	2				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
5.	Полугруппа и производящий оператор. Вложение фазового пространства с помощью сопряженного уравнения. Решение решений на корневых подпространствах	7	2	2				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
6.	ДУЗА с близкими к постоянным периодическими коэффициентами. Экспоненциальная дихотомия решений. Проекторы. Устойчивость решений.	7	2	2		2		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
							<b>0,3</b>	<b>4,7</b>	<b>Зачёт</b>

	<b>Всего за семестр</b>		<b>16</b>	<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,3</b>	<b>35,7</b>	
7.	Структура матриц, зависящих от параметра. Структура решений линейных периодических ДУЗА из критического подпространства.	8		4		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
8.	Явление параметрического резонанса в ДУЗА.	8		8				6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
9.	Нелинейные ДУЗА. Метод нормальных форм исследования нелинейных ДУЗА.	8		4		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос, контрольная работа
						<b>2</b>	<b>0,5</b>	<b>33,5</b>	<b>Экзамен</b>
	<b>Всего за семестр</b>			<b>16</b>		<b>4</b>	<b>0,5</b>	<b>51,5</b>	
	<b>Всего</b>		<b>16</b>	<b>32</b>		<b>8</b>	<b>0,8</b>	<b>87,2</b>	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний. В рамках практических занятий возможно привлечение компьютерного практикума.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## 6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине при формировании материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, при формировании методических материалов по дисциплине используются:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)

Программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.  
Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература:**

1. Королев А. В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов - Москва: Издательство Юрайт, 2023. <https://urait.ru/viewer/differencialnye-i-raznostnye-uravneniya-512166>
2. Е. П. Кубышкин, С.Е. Биркган Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Учебное пособие - Ярсл.гос.ун-т. Ярославль. 1989.
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н. , Фомин С. В. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102667.html>

### **б) дополнительная литература:**

1. А. Д. Мышкис. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Из-во Наука. 1972.
2. Р. Беллман, К. Л. Кук Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир. 1967.

### **в) ресурсы сети «Интернет»**

Математические журналы базы Scopus

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ

### **Автор:**

Профессор кафедры математического моделирования,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Кубышкин Е.П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория уравнений с запаздыванием»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

*Пример задания, предлагающегося на зачете*

1. Найти условия на параметры уравнения, обеспечивающие устойчивость его решений:

$$\dot{x}(t) + ax(t - 1) + bx(t - 2) = 0.$$

2. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Сопряженное уравнение

**Вопросы к зачету**

1. Определение ДУЗА. Прикладные задачи, приводящие к ДУЗА. Пространство начальных условий. Метод шагов.
2. Линейные ДУЗА с постоянными коэффициентами. Общий вид линейного ДУЗА...
3. Решения Эйлера. Характеристическое уравнение. Преобразование Лапласа.
4. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Периодические решения неоднородного уравнения.
5. Экспоненциальная дихотомия решений уравнений с постоянными коэффициентами. Устойчивость решений.
6. Методы исследования нулей характеристических квазиполиномов. Асимптотическое расположение нулей.
7. Условия, обеспечивающие принадлежность нулей заданному типу.
8. Метод D-разбиений.
9. Полугруппа и производящий оператор..
10. Расщепление фазового пространства с помощью сопряженного уравнения.
11. Поведение решений на корневых подпространствах.
12. ДУЗА с близкими к постоянным периодическими коэффициентами.
13. Экспоненциальная дихотомия решений.

**Вопросы к экзамену**

1. Определение ДУЗА. Прикладные задачи, приводящие к ДУЗА. Пространство начальных условий. Метод шагов.
2. Линейные ДУЗА с постоянными коэффициентами. Общий вид линейного ДУЗА. Теорема существования, единственности решения задачи Коши для линейного ДУЗА..
3. Решения Эйлера. Характеристическое уравнение. Представление решений линейного автономного ДУЗА с помощью преобразования Лапласа.
4. Функция Коши. Решение неоднородного уравнения. Сопряженное уравнение.
5. Периодические решения неоднородного уравнения.
6. Экспоненциальная дихотомия решений уравнений с постоянными коэффициентами.



7. Устойчивость решений.
8. Методы исследования нулей характеристических квазиполиномов.  
Асимптотическое
9. расположение нулей.
10. Условия, обеспечивающие принадлежность нулей заданному типу.
11. Метод D-разбиений.
12. Полугруппа и производящий оператор..
13. Расщепление фазового пространства с помощью сопряженного уравнения.
14. Поведение решений на корневых подпространствах.
15. ДУЗА с близкими к постоянным периодическими коэффициентами.
16. Экспоненциальная дихотомия решений.
17. Проекторы. Устойчивость решений.
18. Структура матриц, зависящих от параметра
19. Структура решений линейных периодических ДУЗА из критического подпространства.
20. Явление параметрического резонанса в ДУЗА.
21. Нелинейные ДУЗА. Метод нормальных форм исследования нелинейных ДУЗА

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Теория уравнений с запаздыванием»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Студентам предлагается изучить не только рекомендованную литературу, но и возможные дополнительные источники (например, научные статьи), на которые может указать преподаватель. Эта работа по большей части может выполняться студентами индивидуально, под руководством преподавателя.

В процессе освоения дисциплины обучающиеся выполняют курсовые работы, которые являются важным этапом написания ВКР на 4-м курсе. Вопросы, связанные с выполнением курсовой работы и ВКР, оформлением текстов, разнообразные вопросы по выступлению на защитах этих работ, вполне целесообразно задать преподавателю дисциплины. Большую пользу принесет выступление на семинаре или студенческой (молодежной) конференции. Тема доклада для выступления вполне может быть связана с тематикой прикладного функционального анализа и смежными науками, в том числе, с компьютерной реализацией алгоритмов аппроксимации. Такой расширенный подход к освоению материала дисциплины может быть весьма полезен студентам.

Отметим, наконец, важность самостоятельной работы над математическими доказательствами. Именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий, и именно доказательства наиболее полезны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте его воспроизвести - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.