

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
Кафедра математического моделирования

И. С. Кащенко

Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием

Методические указания

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2012

УДК 517.9(072)
ББК В161.6я73
К 31

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2011 / 2012 года*

Рецензент

кафедра математического моделирования
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова

**Кащенко, И. С. Метод квазинормальных форм
в уравнениях с запаздыванием: методические
указания** / И. С. Кащенко; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Де-
мидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 48 с.

В методических указаниях проводится исследование локальной динамики простейшего нелинейного уравнения с запаздыванием. Основное внимание уделено использованию методов нормальных и квазинормальных форм.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 Прикладная математика и информатика (дисциплины “Теория уравнений с запаздыванием”, “Теория бифуркаций”, цикл Б3), и магистрантов, обучающихся по направлению 010400.68 (дисциплина “Регулярные и сингулярные методы теории возмущений”, цикл М2), очной формы обучения.

УДК 517.9(072)
ББК В161.6я73

© Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2012

Оглавление

§1. Общие сведения	7
§2. Бифуркация Андронова–Хопфа	15
§3. Уравнение с большим запаздыванием	24
§4. Квазинормальные формы	33
Литература	45

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием вида

$$\dot{x} = f(x, x(t - T)) \quad (T > 0) \quad (0.1)$$

возникают во многих прикладных задачах: в нейродинамике [1], лазерной физике [2, 3], в задачах математической экологии [4, 5], в описании работы ядерного реактора [6], в радиофизике [7] и во многих других областях знаний [8].

Фазовым пространством уравнения (0.1) удобно считать пространство $C_{[-T, 0]}$ непрерывных на $[-T, 0]$ функций со стандартной нормой. В этом смысле уравнение (0.1) существенно сложнее уравнения

$$\dot{x} = f(x, x), \quad (0.2)$$

в которое оно переходит при $T = 0$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (0.2), как известно, интегрируется в квадратурах. Его решения стремятся либо к состоянию равновесия, т. е. к решению уравнения $x = f(x)$, либо неограниченно растут по модулю при $t \rightarrow \infty$. Решения уравнения (0.1) тоже вычислить достаточно просто. Так, положив в качестве начального условия функцию $\varphi(s) \in C_{[-T, 0]}$ (т.е. $x(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-T, 0]$), на отрезке $t \in [0, T]$ приходим к уравнению

$$\dot{x} = f(x, \varphi(t - T)), \quad t \in [0, T],$$

из которого, решая это нелинейное скалярное уравнение первого порядка, получаем $x(t)$ при $t \in [0, T]$. Теперь, зная решение $x(t)$ при $t \in [0, T]$, мы аналогично можем найти $x(t)$ при $t \in [T, 2T]$ и т. д.

Ниже будет показано, что в отличие от уравнения (0.2) динамика уравнения (0.1) может быть существенно богаче и интерес-

нее. Основное внимание будет уделено специальным асимптотическим методам изучения динамики уравнения (0.1) — методу нормальных форм и методу квазинормальных форм.

В указаниях будет проводиться локальный анализ уравнения (0.1), т. е. исследование поведения решений (0.1) в малой окрестности состояния равновесия. Наибольший интерес будет представлять изучение поведения решений этого уравнения при условии, когда запаздывание T достаточно велико.

Структура указаний такова. В первом параграфе приводятся общие сведения относительно линейного анализа уравнения (0.1). Вводятся основные определения, формулируются и доказываются результаты об устойчивости состояния равновесия. Во втором параграфе исследуются бифуркации устойчивого состояния равновесия; строятся нормальные формы, исследуется их динамика, делаются выводы о поведении решений исходного уравнения.

Параграфы 3 и 4 посвящены локальной динамике уравнений с большим запаздыванием. В §3 приведен линейный анализ таких уравнений. Показано, что возникающие здесь критические случаи имеют бесконечную размерность. Наконец, в параграфе 4 исследуются бифуркации, возникающие в найденных критических случаях. С помощью специального метода исходное уравнение сводится к существенно более простому — квазинормальной форме. Приводятся результаты из [9–13].

§1. Общие сведения

1.1. Автономным *дифференциальным уравнением с запаздыванием* (иногда говорят *дифференциально-разностным уравнением*) называется уравнение

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - T)). \quad (1.1)$$

Здесь T — время запаздывания. Для корректной разрешимости этого уравнения необходимо $T > 0$. Если $x \in \mathbb{R}$ (а мы будем рассматривать именно этот случай), то уравнение (1.1) называется *скалярным*. Известная функция $f(x_1, x_2)$ предполагается достаточно гладкой по совокупности переменных.

В качестве *начальных условий* для уравнения (1.1) будем брать непрерывную на отрезке $[-T, 0]$ функцию. Таким образом, $x_\varphi(t)$ является решением (1.1) с начальным условием $\varphi(t)$, если, во-первых, $x_\varphi(t)$ удовлетворяет равенству (1.1) при всех $t \geq 0$, а во-вторых, удовлетворяет соотношению

$$x_\varphi(t) = \varphi(t), \quad t \in [-T, 0].$$

Пусть x_0 — это состояние равновесия этого уравнения, т. е. корень уравнения

$$0 = f(x, x).$$

Тогда уравнение (1.1) имеет не зависящее от времени решение $x(t) \equiv x_0$. Поставим задачу исследовать устойчивость этого решения.

Устойчивость будет исследоваться в фазовом пространстве $C_{[-T, 0]}$ — непрерывных на отрезке длины T функций со стандартной нормой

$$\|x(t)\| = \max_{t \in [-T, 0]} |x(t)|.$$

Согласно [14], будем называть решение $x_0(t)$ *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ любое решение с достаточно близкими к $x_0(t)$ начальными условиями остается в „ ε -трубе“ $x_0(t)$. Более аккуратно, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r = r(\varepsilon)$, что для любой функции $\varphi(t) \in C_{[-T, 0]}$, для которой

выполнено $\max_{t \in [-T, 0]} |x_0(t) - \varphi(t)| < r$, решение $x_\varphi(t)$ уравнения (1.1) удовлетворяет соотношению

$$|x_\varphi(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Также решение $x_0(t)$ уравнения (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и все решения $x_\varphi(t)$ уравнения (1.1), с достаточно близкими к $x_0(t)$ начальными условиями, сходятся к $x_0(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_0(t+s) - x_\varphi(t+s)| = 0.$$

Решение $x_0(t)$ уравнения (1.1) называется *неустойчивым*, если найдется такое $\gamma > 0$, что при каждом положительном r существует такая функция $\varphi_r(t) \in C_{[-T, 0]}$, удовлетворяющая $\max_{t \in [-T, 0]} |x_0(t) - \varphi_r(t)| < r$, что в некоторой точке $t_0 > 0$ решение $x_\varphi(t)$ уравнения (1.1) с начальным условием $\varphi(t)$ отличается от $x_0(t)$ больше, чем на γ :

$$|x_0(t_0) - x_\varphi(t_0)| > \gamma.$$

1.2. В уравнении (1.1) произведем замену

$$x(t) = x_0 + y(t),$$

подразумевая, что $y(t)$ невелика. В результате получаем

$$\dot{y} = f(x_0 + y(t), x_0 + y(t - T)).$$

Обозначим

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_0)$$

и введем функцию

$$F(x_1, x_2) = f(x_0 + x_1, x_0 + x_2) - ax_1 - bx_2.$$

Обратим внимание, что $F(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(0, 0) = 0$. Про такую функцию говорят, что она *имеет в нуле порядок малости выше первого*.

С учетом сделанных обозначений, исходное уравнение записывается в виде

$$\dot{y} = ay(t) + by(t - T) + F(y(t), y(t - T)). \quad (1.2)$$

Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (1.2) имеет место теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению [14, 15]. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, рассмотрим *линеаризованное на нулевом состоянии равновесия* уравнение (оно получается из (1.2) отбрасыванием слагаемого, порядок малости которого выше первого)

$$\dot{y} = ay(t) + by(t - T). \quad (1.3)$$

Ниже через $R(r)$ обозначим шар радиуса r с центром в нуле в пространстве $C_{[-T,0]}$, т. е. множество таких непрерывных функций $\varphi(t)$, заданных на отрезке $[-T, 0]$, что

$$\max_{t \in [-T, 0]} |\varphi(t)| \leq r.$$

Утверждение 1.1 Пусть все решения линейного уравнения (1.3) сходятся к нулю. Тогда нулевое решение уравнения (1.2) асимптотически устойчиво. В частности, найдется такое $r_0 > 0$, что при всех $\varphi(t) \in R(r_0)$ решения уравнения (1.2) с начальными условиями $y(t) = \varphi(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по всем $\varphi(t) \in R(r_0)$.

Утверждение 1.2 Если же линейное уравнение (1.3) имеет экспоненциально растущее по модулю при $t \rightarrow \infty$ решение, то нулевое решение (1.2) неустойчиво. Найдется такое $r_0 > 0$, что для каждого $0 < r < r_0$ в шаре $R(r)$ найдется такой элемент $\varphi(t)$ и такое $t_0(r, \varphi)$, что решение $y(t)$ с начальным условием $\varphi(t)$ не принадлежит шару $R(r_0)$ при $t = t_0(r, \varphi)$, т. е.

$$\max_{s \in [-T, 0]} |y(t + s)| > r_0.$$

Таким образом, для анализа решений исходного уравнения (1.2) весьма важно существенно более простое линейное уравнение (1.3). Отметим, что если у линейного уравнения (1.2) есть

хотя бы одно асимптотически устойчивое решение, то все его решения асимптотически устойчивы¹. Поэтому обычно говорят об устойчивости либо неустойчивости всего линейного уравнения, которое равносильно, например, устойчивости нулевого решения.

Как и в случае ОДУ, поведение решений линейного автономного уравнения определяется характеристическим уравнением. Для его нахождения положим в (1.3)

$$y = e^{\lambda t}$$

и после очевидных сокращений получим для нахождения неизвестного параметра λ *характеристический квазиполином*

$$\lambda = a + be^{-\lambda T}. \quad (1.4)$$

Отметим, что квазиполином (1.4) имеет бесконечное число корней, но для любого вещественного p в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq p$ количество его корней конечно.

Имеет место следующее утверждение (см. [14, 15]).

Утверждение 1.3 Пусть все корни характеристического уравнения (1.4) имеют отрицательные вещественные части. Тогда решения (1.3) асимптотически устойчивы. Если же характеристический квазиполином (1.4) имеет корень λ_0 с положительной вещественной частью, то уравнение (1.3) имеет экспоненциально растущее (по модулю) решение $y = \exp \lambda_0 t$.

Таким образом, необходимо более детально исследовать поведение решений уравнения (1.2) в малой окрестности состояния равновесия лишь в тех случаях, когда квазиполином (1.4) имеет корни с нулевой вещественной частью и не имеет с положительной.

1.3. Изучим расположение корней характеристического квазиполинома (1.4) в зависимости от параметров. Мы ограничимся только более важным для приложений случаем $a < 0$.

При $b = 0$ все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части. При всех близких к нулю значениях b это свойство

¹Докажите этот факт самостоятельно.

сохраняется. Действительно, реальная часть (1.4) имеет вид:

$$\operatorname{Re} \lambda = a + b e^{-\operatorname{Re} \lambda T} \cos(-\operatorname{Im} \lambda T).$$

Первое слагаемое отрицательно, а для второго при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ справедлива оценка

$$|b e^{-\operatorname{Re} \lambda T} \cos(-\operatorname{Im} \lambda T)| \leq |b|,$$

т. е. при близких к нулю b оно мало (при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$), а значит, уравнение (1.4) не может иметь корней в правой комплексной полуплоскости.

В силу непрерывной зависимости корней от параметра b , найдутся такие $b_+(T) > 0$ и $b_-(T) < 0$, что при $b_-(T) < b < b_+(T)$ все корни квазиполинома имеют отрицательные вещественные части, а при $b = b_+(T)$ и при $b = b_-(T)$ квазиполином (1.4) имеет чисто мнимый корень $\lambda_0 = i\omega$. Т. к. в то же время существует и комплексно-сопряженный ему корень $\bar{\lambda}_0 = -i\omega$, то, не ограничивая общности, будем считать, что $\omega \geq 0$.

Рассмотрим сначала случай $b < 0$. Положим в (1.4) $b = b_-(T)$ и $\lambda = i\omega$. В результате получим

$$i\omega = a + b_- e^{-i\omega T}.$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} -a &= b_- \cos \omega T, \\ \omega &= -b_- \sin \omega T. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b_-^2 = a^2 + \omega^2, \tag{1.5}$$

$$\omega = a \operatorname{tg} \omega T. \tag{1.6}$$

В силу условия $b_- < 0$ значение ω не может обращаться в ноль. Обозначим через $\omega(T)$ наименьший положительный корень уравнения (1.6) (см. рис. 1). Положим $b_-(T) = -\sqrt{a^2 + \omega^2(T)}$.

Лемма 1.1 Пусть $a < 0$, тогда при всех $b_-(T) < b < 0$ все корни уравнения (1.4) имеют отрицательные вещественные части, а при $b < b_-(T)$ существует корень (1.4) с положительной вещественной частью.

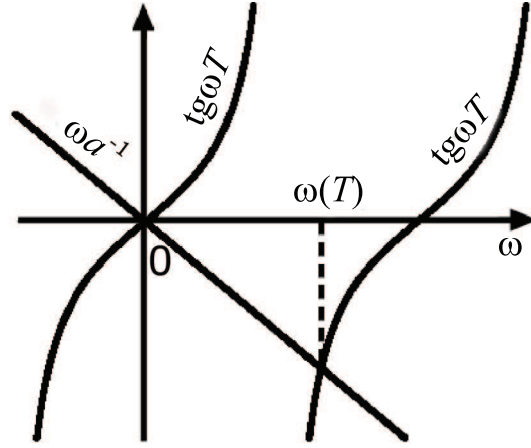


Рис. 1.

Для обоснования леммы надо лишь показать, что при каждом $b < b_-(T)$ найдется корень с положительной вещественной частью. Обозначим через $\lambda(b)$ какой-либо корень уравнения (1.4). Очевидно, что $\lambda(b)$ непрерывно зависит от параметра b . Утверждение будет доказано, если удастся показать, что

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b)}{db} \Big|_{\lambda(b)=i\omega} < 0.$$

Это будет говорить о том, что при возрастании b корень $\lambda(b)$ через мнимую ось движется влево по комплексной плоскости, т. е. при убывании b корень, пересекая мнимую ось, движется вправо.

Продифференцируем равенство (1.4) по b , помня о том, что λ есть функция от b :

$$\lambda' = e^{-\lambda T} - bT\lambda'e^{-\lambda T}.$$

Учитывая, что $\lambda(b)$ есть корень (1.4), имеем

$$e^{-\lambda T} = \frac{\lambda - a}{b}.$$

Используя это, получаем выражение для λ' :

$$\lambda'(b) = \frac{\lambda - a}{b(1 + T(\lambda - a))}$$

Подставим теперь $\lambda(b) = i\omega$. Получим, что

$$\lambda'(b) = \frac{i\omega - a}{b(1 - aT + iT\omega)}.$$

Преобразуем это выражение, чтобы избавиться от мнимой части в знаменателе. В результате получим, что

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b)}{db} \Big|_{\lambda(b)=i\omega} = \frac{\omega^2 T - a(1 - aT)}{b((1 - aT)^2 + \omega^2 T^2)}. \quad (1.7)$$

Отсюда и из условий $a < 0$ и $b < b_-(T) < 0$ следует требуемое неравенство.

Таким образом, лемма доказана.

Пусть теперь $b > 0$. Из уравнений перед (1.5)–(1.6) очевидно, что $b_+(T) = -a$ и $\omega(T) = 0$.

Лемма 1.2 Пусть $a < 0$ и $0 < b < -a$. Тогда все корни (1.4) имеют отрицательные вещественные части. Если же $b > -a$, то уравнение (1.4) имеет корень с положительной вещественной частью.

Как и при доказательстве леммы 1.1, для доказательства второго утверждения этой теоремы привлекаем неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b)}{db} \Big|_{\lambda(b_+)=i\omega} > 0,$$

которое следует из аналога (1.7) и условий $a < 0$, $b_+ > 0$.

1.4. Итак, мы показали, что состояние равновесия при определенных условиях может терять устойчивость. Это происходит двумя способами: при $b = b_+$ в правую комплексную полуплоскость переходит один корень характеристического уравнения (1.4); а при $b = b_-$ через мнимую ось вправо переходят два корня.

В следующем параграфе будет изучаться поведение решений в окрестности стационара в случае, когда потеря устойчивости только произошла. Иными словами, будет изучена бифуркация состояния равновесия при $b = b_{\pm}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Когда решение (не обязательно постоянное) дифференциального уравнения с запаздыванием является устойчивым?
2. Как можно исследовать устойчивость состояния равновесия дифференциального уравнения с запаздыванием?
3. Прделайте самостоятельно все необходимые вычисления для доказательства леммы 1.2.
4. Покажите, что при условии $0 < aT < \pi/2$ решения уравнения

$$\dot{x} = -ax(t - T)$$

асимптотически устойчивы, а при $a < 0$ или $a > \pi/2$ — неустойчивы.

§2. Бифуркация Андронова–Хопфа

В предыдущем параграфе мы показали, что при изменении параметров, состояние равновесия может потерять устойчивость. Изучим, как это может происходить.

2.1. Не ограничивая общности, можно считать, что состояние равновесия, в окрестности которого исследуется поведение решений, равно нулю. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = ax + bx(t - T) + F(x, x(t - T)), \quad (2.1)$$

в случае, когда значения параметров a , b и T близки к критическим, т.е.

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon b_1, \quad T = T_0(1 + \varepsilon T_1).$$

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ малый параметр, a_0 отрицательно, $b_0 = b_+(T_0)$ либо $b_0 = b_-(T_0)$, где $b_+(T)$ и $b_-(T)$ определены в предыдущем параграфе. Исследуем поведение решений (2.1) при достаточно малых значениях ε в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого решения.

Функция $F(x, y)$ имеет порядок малости выше первого. Для упрощения дальнейших вычислений будем считать, что она зависит только от второго аргумента, т. е.

$$F(x, y) \equiv F(y).$$

Тогда в окрестности нуля она раскладывается в ряд Тейлора следующим образом:

$$F(y) = f_2 y^2 + f_3 y^3 + o(y^3).$$

Для того чтобы исключить зависимость запаздывания от малого параметра ε , произведем в (2.1) замену

$$t = (1 + \varepsilon T_1)t_1.$$

Полученное уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \varepsilon T_1} \frac{dx}{dt_1} = & ax((1 + \varepsilon T_1)t_1) + bx((1 + \varepsilon T_1)(t_1 - T_0)) + \\ & + F(x((1 + \varepsilon T_1)(t_1 - T_0))). \end{aligned}$$

Переобозначим опять t_1 через t и $x((1 + \varepsilon T_1)t_1)$ через $x(t)$. В результате получим уравнение

$$\frac{1}{1 + \varepsilon T_1} \frac{dx}{dt} = (a_0 + \varepsilon a_1)x + (b_0 + \varepsilon b_1)x(t - T_0) + f_2 x^2(t - T_0) + f_3 x^3(t - T_0) + \dots \quad (2.2)$$

Рассмотрим отдельно случаи $b_0 < 0$ (т.е. $b_0 = b_-$) и $b_0 > 0$ (т.е. $b_0 = b_+$).

2.2. Пусть сначала

$$b_0 = b_-(T_0) < 0.$$

Из результатов прошлого параграфа следует, что в этом случае характеристический квазиполином

$$\lambda = a_0 + b_- e^{-\lambda T_0} \quad (2.3)$$

имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, а все остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Линеаризованное уравнение

$$\dot{x} = a_0 x + b_- x(t - T_0) \quad (2.4)$$

имеет периодические решения $x = \exp(\pm i\omega_0 t)$.

Известно, что в фазовом пространстве $C_{[-T_0, 0]}$ имеется локальное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие (см. [14, 16–18]) C_2 . К этому многообразию при $t \rightarrow \infty$ стремятся все решения (2.2) с достаточно малым (и не зависящим от ε) начальным условием. Таким образом, необходимо лишь исследовать поведение решений (2.2) только на двумерном многообразии C_2 . На нем уравнение (2.2) можно записать в виде системы двух ОДУ, которую с помощью некоторых преобразований можно представить в наиболее простой форме. Эта форма называется нормальной (см., например, [17, 18]). В рассматриваемом случае, когда в линеаризованном уравнении (2.4) реализуется критический случай пары чисто мнимых корней характеристического квазимногочлена, соответствующая нормальная форма имеет вид одного комплексного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \lambda_1 z + d|z|^2 z + O(\varepsilon^2 |z| + \varepsilon |z|^3 + |z|^5). \quad (2.5)$$

Известно (см. [16–18]), что в случае, когда $Re \lambda_1 \neq 0$ и $Re d \neq 0$, динамические свойства решений (2.5), а значит, и уравнения (2.2) определяются укороченным нормализованным уравнением

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + d|\xi|^2 \xi, \quad (2.6)$$

где $\tau = \varepsilon t$ и $z = \sqrt{\varepsilon} \xi$. Формула, которая связывает решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (2.2) и его нормальной формы (2.5), имеет вид [16–18]

$$x(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} [\xi(\tau) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 t}] + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_3(t, \tau) + \dots \quad (2.7)$$

При этом требуется, чтобы зависимость от t всех слагаемых в (2.7) была $2\pi/\omega_0$ -периодичная. Формула (2.7) дает одновременно алгоритм нахождения коэффициентов λ_1 (называется *надкритичностью*) и d (называется *ляпуновской величиной*). Для определения λ_1 и d подставим в (2.2) формулу (2.7) и будем собирать в получившемся тождестве коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом шаге, приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$, в силу определения величин b_- и ω_0 получим верное тождество. На втором шаге придем к дифференциальному уравнению относительно x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial t} = & a_0 x_2 + b_- x_2(t - T_0, \tau) + \\ & + f_2 \left[\xi(\tau)^2 e^{2i\omega_0(t-T_0)} + 2|\xi(\tau)|^2 + \bar{\xi}(\tau)^2 e^{-2i\omega_0(t-T_0)} \right]. \end{aligned}$$

Это линейное неоднородное уравнение на функцию $x_2(t)$ (τ выступает в качестве параметра). Согласно общей теории линейных уравнений, его решение записывается в виде суммы общего решения однородной задачи и частного решения неоднородной:

$$x_2 = x_{\text{общ}} + x_{\text{част}}.$$

Однородное уравнение имеет вид (2.4). Мы уже отмечали, что оно имеет периодические решения $\exp(\pm i\omega_0 t)$. Их добавление не повлияет на дальнейшие вычисления, поэтому мы ограничимся только частным решением: $x_2 = x_{\text{част}}$.

Частное решение, как и в линейных ОДУ, может быть найдено исходя из вида неоднородности:

$$x_2(t, \tau) = x_{20}(\tau) + x_{21}(\tau)e^{2i\omega_0 t} + \bar{x}_{21}(\tau)e^{-2i\omega_0 t}.$$

Подставляя это выражение в уравнение на $x_2(t, \tau)$, находим, что

$$\begin{aligned} x_{20}(t) &= -\frac{2f_2}{a_0 + b_-} |\xi(\tau)|^2, \\ x_{21} &= \frac{f_2 \exp(-2i\omega_0 T_0)}{2i\omega_0 - a_0 - b_- \exp(-2i\omega_0 T_0)} \xi^2(\tau). \end{aligned}$$

Наконец, собирая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial t} - a_0 x_3 - b_- x_3(t - T_0, \tau) = & \\ &= - \left((1 + b_- T_0 e^{-i\omega_0 T_0}) \frac{d\xi}{d\tau} e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.} \right) + \\ &+ (a_0 T_1 + a_1) (\xi(\tau) e^{i\omega_0 t} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0 t}) + \\ &+ (b_- T_1 + b_1) \left(\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)} \right) + \\ &+ 2f_2 x_2(t - T_0, \tau) \left(\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)} \right) + \\ &+ f_3 \left(\xi(\tau) e^{i\omega_0(t-T_0)} + \bar{\xi}(\tau) e^{-i\omega_0(t-T_0)} \right)^3. \end{aligned}$$

Необходимое и достаточное условие существования $2\pi/\omega_0$ -периодических решений этого уравнения состоит в том, что сумма всех коэффициентов при $\exp(i\omega_0 t)$ и при $\exp(-i\omega_0 t)$ в правой части должна быть равна нулю. Подставляя выражение для x_2 , раскрывая скобки и используя (2.3), получим, что для существования $2\pi/\omega_0$ -периодических решений должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} (1 - a_0 T_0 + iT_0 \omega_0) \frac{d\xi}{d\tau} = & \left(a_1 + \frac{i\omega_0(b_1 + b_- T_1) - a_0 b_1}{b_-} \right) \xi + \\ + & \left[\frac{2f_2^2}{2i\omega_0 - b_- \exp(-2i\omega_0 T_0) - a_0} - \frac{4f_2^2}{a_0 + b_-} + 3f_3 \right] e^{-i\omega_0 T_0} |\xi|^2 \xi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение также будет и для $\bar{\xi}$. Как легко заметить, полученное равенство в точности соответствует (2.6). Используя выражение (2.3), надкритичность λ_1 и ляпуновскую величину d можно записать следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{a_1 b_- - a_0 b_1 + i\omega_0(b_1 + b_- T_1)}{b_-(1 - a_0 T_0 + iT_0 \omega_0)},$$

$$d = \left[\frac{2f_2^2}{2i\omega_0 - b_- \exp(-2i\omega_0 T_0) - a_0} - \frac{4f_2^2}{a_0 + b_-} + 3f_3 \right] \times$$

$$\times \frac{i\omega_0 - a_0}{b_-(1 - a_0 T_0 + iT_0 \omega_0)}.$$

Нормализованное уравнение (2.8) является комплексным. Если комплексную функцию ξ представить в виде $\xi(\tau) = \rho(\tau) \exp i\varphi(\tau)$, то для амплитуды ρ и для фазы φ получим уравнения

$$\frac{d\rho}{d\tau} = (Re \lambda_1)\rho + (Re d)\rho^3, \quad (2.9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = (Im \lambda_1)\rho + (Im d)\rho^2. \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнение (2.9). Это скалярное, автономное уравнение. Корни его правой части – это корни уравнения

$$(Re \lambda_1)\rho + (Re d)\rho^3 = 0.$$

Это уравнение всегда имеет нулевой корень и, если $Re \lambda_1$ и $Re d$ разных знаков, пару корней $\pm \rho_*$, где

$$\rho_* = \sqrt{-\frac{Re \lambda_1}{Re d}}.$$

Как известно, решения скалярных дифференциальных уравнений либо стремятся к постоянной величине (корню правой части), либо неограниченно возрастают. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 *Если $Re \lambda_1 < 0$, $Re d < 0$, тогда все решения уравнения (2.9) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$.*

Если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} d > 0$, тогда решения уравнения (2.9) с начальным условием $|\rho(0)| < \rho_*$ стремятся к нулю, а все остальные неограниченно возрастают при $\tau \rightarrow \infty$.

Если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d > 0$, тогда все решения уравнения (2.9) неограниченно возрастают при $\tau \rightarrow \infty$.

Если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d < 0$, тогда все решения уравнения (2.9) стремятся либо к ρ_* , либо к $-\rho_*$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В силу теоремы 2.1 и равенства (2.7), которое связывает решения нормальной формы и решения исходного уравнения на экспоненциально устойчивом интегральном многообразии C_2 , верны следующие утверждения. Фазовые портреты системы (2.9)–(2.10) на многообразии C_2 показаны на рис. 2.

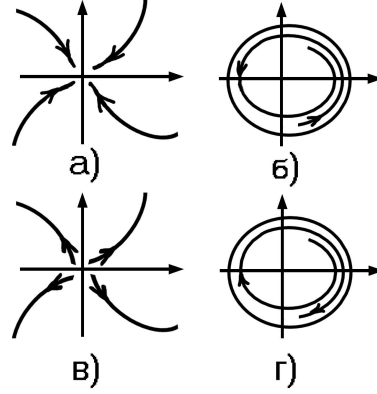


Рис. 2. Фазовые портреты системы (2.2) на многообразии C_2 при $a_0 = a_0(T) < 0$ в случаях: а) $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} d < 0$; б) $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} d > 0$; в) $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d > 0$; г) $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d < 0$.

Наконец, сделаем выводы о поведении решений исходного уравнения с запаздыванием (2.2) в рассматриваемом случае.

Теорема 2.2 Если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} d < 0$, то при достаточно малых значениях ε решения уравнения (2.2) из некоторой окрестности нуля стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2.3 Если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} d > 0$, то при достаточно малых значениях ε нулевое решение уравнения (2.2) асимптотически устойчиво, кроме того, в окрестности нуля существует неустойчивый цикл с асимптотикой $x_*(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\rho_* \cos \omega_0 t(1 + o(1)) + o(\sqrt{\varepsilon})$.

Теорема 2.4 Если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d > 0$, то при малых ε нулевое решение уравнения (2.2) неустойчиво и в его некоторой (не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых режимов.

Теорема 2.5 Если $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Re} d < 0$, тогда все решения уравнения (2.2) из некоторой окрестности нуля стремятся к устойчивому циклу $x_*(t) = 2\sqrt{\varepsilon}\rho_* \cos \omega_0 t(1 + o(1)) + o(\sqrt{\varepsilon})$.

Теоремы 2.2–2.5 полностью описывают локальную динамику уравнения (2.2) в окрестности нуля при малых ε .

2.3. Пусть теперь

$$b_0 = b_+(T_0) > 0.$$

Как было показано в §1,

$$b_+ = -a_0.$$

При таких значениях параметров линеаризованное уравнение

$$\dot{x} = a_0 x - a_0 x(t - T_0)$$

имеет постоянное ненулевое решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda = a_0 - a_0 e^{-\lambda T_0}$$

имеет нулевой корень, а все остальные его корни имеют отрицательные действительные части. В этом случае в фазовом пространстве $C_{[-T_0, 0]}$ существует одномерное экспоненциально устойчивое интегральное многообразие C_1 . Все решения (2.2) с достаточно малым (но не зависящим от ε) начальным условием стремятся при $t \rightarrow \infty$ к этому многообразию. Следовательно, нужно исследовать поведение решений (2.2) на гладком одномерном многообразии C_1 . Так же, как и в предыдущем случае, на этом многообразии исходную систему можно представить в наиболее простом виде — нормальной форме. В нашем случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень на мнимой оси, нормальная форма имеет вид скалярного уравнения

$$\dot{z} = \varepsilon \lambda_1 z + dz^2 + O(\varepsilon^2 z + \varepsilon z^2 + z^3). \quad (2.11)$$

В случае общности положения, когда $\lambda_1 d \neq 0$, поведение решений (2.11), а значит, и (2.2) определяются укороченным уравнением

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_1 \xi + d\xi^2. \quad (2.12)$$

Здесь $z = \varepsilon \xi$, $\tau = \varepsilon t$. Алгоритм нахождения коэффициентов λ_1 и d получается из формулы, связывающей решения системы (2.2) и ее нормальной формы (2.11):

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \xi(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (2.13)$$

Действуя так же, как и выше, т. е. подставляя (2.13) в (2.2) и собирая в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим, что для $\xi(\tau)$ должно выполняться соотношение

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{a_1 + b_1}{1 - a_0 T_0} \xi + \frac{f_2}{1 - a_0 T_0} \xi^2. \quad (2.14)$$

Динамика этой системы полностью описывается следующей теоремой.

Теорема 2.6 Пусть $a_1 + b_1 < 0$, $f_2 > 0$ ($f_2 < 0$), тогда решения (2.14) с начальными условиями меньше (больше) $-(a_1 + b_1)f_2^{-1}$ стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, а остальные неограниченно возрастают по модулю.

Пусть $a_1 + b_1 > 0$, $f_2 > 0$ ($f_2 < 0$) тогда решения (2.14) с положительными (отрицательными) начальными условиями стремятся по модулю к бесконечности, а все остальные сходятся к $\xi_* = -(a_1 + b_1)f_2^{-1}$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Исходя из этой теоремы, можно описать динамику уравнения (2.2) в окрестности нулевого решения.

Теорема 2.7 Пусть $a_1 + b_1 < 0$, тогда при достаточно малых значениях ε нулевое решение (2.2) асимптотически устойчиво. Все решения из некоторой его окрестности сходятся к нулю.

Теорема 2.8 Пусть $a_1 + b_1 > 0$, тогда нулевое решение (2.2) неустойчиво и в его малой (но не зависящей от ε) окрестности существует единственное асимптотически устойчивое решение

$$x_* = -\varepsilon \frac{a_1 + b_1}{f_2} (1 + o(1)).$$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для чего нужна нормальная форма? Какими преимуществами по сравнению с исходным уравнением она обладает?
2. Постройте укороченные нормальные формы для более общего по сравнению с (2.1) уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} + x = (a_0 + \varepsilon)x(t - T_0) + f_{21}x^2(t - T_0) + f_{31}x^3(t - T_0) + \\ + f_{22}x^2(t) + f_{32}x^3(t). \end{aligned}$$

3. Для уравнения Хатчинсона

$$\dot{x} = ax(t - T)[1 + x(t)],$$

где $aT = \pi/2 + \varepsilon$, изучите вопрос о поведении решений этого уравнения при $0 < \varepsilon \ll 1$ в достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия.

§3. Уравнение с большим запаздыванием

В предыдущем параграфе мы изучили, как могут вести себя решения дифференциально-разностных уравнений при фиксированном значении запаздывания. Теперь мы перейдем к принципиально иному случаю, когда запаздывание является асимптотически большим.

3.1. Итак, основное предположение этого параграфа состоит в том, что в уравнении

$$\frac{dx}{dt} = ax + bx(t - T) + F(x, x(t - T)) \quad (3.1)$$

параметр T , характеризующий запаздывание, является достаточно большим, т. е.

$$T \gg 1.$$

Функция $F(x, y)$ здесь имеет порядок малости выше первого.

Поставим задачу исследовать поведение решений уравнения (3.1) в малой (но не зависящей от T) окрестности нулевого состояния равновесия.

Через ε обозначим малый параметр $\varepsilon = T^{-1}$. Тем самым

$$0 < \varepsilon \ll 1.$$

Чтобы избавиться от большого запаздывания, в уравнении (3.1) произведем замену времени $t \rightarrow Tt$ и переобозначим затем $x(Tt) \rightarrow x(t)$ (тогда в результате цепочки преобразований $x(t - T) \rightarrow x(tT - T) \rightarrow x(t - 1)$ получим из большого запаздывания фиксированное). В итоге приходим к эквивалентному уравнению

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = ax + bx(t - 1) + F(x, x(t - 1)). \quad (3.2)$$

Это уравнение является *сингулярно возмущенным* [19]. Дело в том, что если в нем формально занулить малый параметр ε , то полученное *вырожденное уравнение*

$$0 = ax + bx(t - 1) + F(x, x(t - 1))$$

уже не является дифференциальным и, вообще говоря, имеет иную динамику (поведение решений).

Для уравнения (3.2) справедливы аналоги утверждений 1.1 и 1.2, т. е. о локальной динамике уравнения (3.2) можно судить по динамике линеаризованного уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = ax + bx(t-1).$$

Подставим сюда $x = \exp \lambda t$. Для λ получится характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda = a + be^{-\lambda}. \quad (3.3)$$

Согласно утверждению 1.3, расположение корней характеристического квазиполинома (3.3) определяет поведение решений (3.2). Однако возникающая в определениях устойчивости и неустойчивости константа r зависит от ε . В частности, возможна ситуация, когда $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. получится решить поставленную задачу в бесконечно малой по ε окрестности состояния равновесия, в то время как необходимо исследовать динамику в не зависящей от малого параметра области. Сформулируем более строгие утверждения, позволяющие сделать вывод о поведении решения в не зависящей от ε области фазового пространства. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 3.1 Пусть существует такое $M > 0$, что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ есть корень характеристического полинома (3.3) $\lambda(\varepsilon)$, такой что $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) > M$. Тогда при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение уравнения (3.2) неустойчиво, более того, в некоторой его достаточно малой (но не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых режимов.

Утверждение 3.2 Пусть существуют такие $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ все корни характеристического квазиполинома (3.3) удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda < -M$. Тогда при малых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение исходного уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

Таким образом, необходимо проводить дополнительные исследования поведения решений уравнения (3.2) только в том

случае, когда характеристический квазиполином (3.3) имеет корень $\lambda(\varepsilon)$ такой, что $\operatorname{Re} \lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ (при $\varepsilon \rightarrow 0$), и не имеет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.2. Исследуем расположение корней квазиполинома (3.3) при малых значениях ε в зависимости от параметров a и b .

Прежде всего отметим, что если $a > 0$, то выполняются условия утверждения 3.1. Действительно, в этом случае у уравнения (3.3) существует корень²

$$\lambda_+ = \frac{a}{\varepsilon} + o(1).$$

Понятно, что при малых ε выполняется $\operatorname{Re} \lambda_+ > M > 0$, где M — произвольная положительная константа.

Таким образом, при $a > 0$ динамика уравнения (3.2) становится нелокальной — есть решения, которые отходят от состояния равновесия на фиксированное расстояние. Далее будем считать, что $a < 0$.

При $b = 0$ все корни находятся в левой комплексной полуплоскости. При близких к нулю значениях b все корни (3.3) удовлетворяют условиям утверждения 3.2 (для объяснения этого достаточно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям из параграфа 1). Пусть это свойство впервые нарушается при $b = b_0 < 0$ или $b = b^0 > 0$. В силу непрерывной зависимости корней (3.3) от b , при таком значении параметра у характеристического квазиполинома существует корень, действительная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Представим этот корень в виде

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega(\varepsilon) + o(1),$$

где $\omega(\varepsilon)$, возможно, не ограничена (или даже стремится к бесконечности) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставим это в (3.3):

$$i\varepsilon\omega(\varepsilon) + o(1) - a = be^{-i\omega(\varepsilon) - o(1)}.$$

Модуль правой части асимптотически близок к $|b|$, а левой — к $\sqrt{\varepsilon^2\omega^2(\varepsilon) + a^2}$. Таким образом,

$$\varepsilon^2\omega^2(\varepsilon) + a^2 = b^2.$$

²Проверьте существование такого корня самостоятельно.

Наименьшие (по модулю) значения b , когда это равенство может быть выполнено, — это $b = \pm a$.

Пусть сначала $b = -a > 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\varepsilon \lambda = a(1 - e^{-\lambda}).$$

Легко видеть, что это уравнение имеет бесконечное множество корней

$$\lambda_n = 2\pi ni + o(1).$$

Если $b = a < 0$, то квазиполином (3.3) принимает вид

$$\varepsilon \lambda = a(1 + e^{-\lambda}).$$

У него есть корни, стремящиеся к мнимой оси, вида

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi i + o(1).$$

Итак, при $b = \pm a$ реализуется „промежуточный“ случай: уравнение (3.3) не имеет корней с положительной вещественной частью, отделенных от мнимой оси, но при этом есть корни, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Относительно остальных значений параметров сформулируем следующую лемму.

Лемма 3.1 *Если $|b| < |a|$, то существуют такие $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что все корни характеристического квазиполинома (3.3) при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda < -M$.*

Если $|b| > |a|$, то существуют такие $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ квазиполином (3.3) имеет корень λ_0 , удовлетворяющий $\operatorname{Re} \lambda_0 > M$.

Для доказательства леммы нам достаточно показать, что при $|b| > |a|$ найдутся $M > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение (3.3) имеет корень с вещественной частью большей M . Обозначим через $\lambda(b, \varepsilon)$ какой-нибудь корень, находящийся в окрестности мнимой оси при $b = b_*$, т. е. $\lambda(b_*, \varepsilon) = i\omega + o(1)$. Утверждение будет доказано, если удастся показать, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполняется одно из неравенств

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b, \varepsilon)}{db} \Big|_{\lambda=i\omega+o(1)} > 0 \quad \text{при } b_* > 0,$$

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b, \varepsilon)}{db} \Big|_{\lambda=i\omega+o(1)} < 0 \quad \text{при } b_* < 0.$$

Вычислим значение действительной части производной, которая стоит в левой части неравенств. Получим

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda(b, \varepsilon)}{db} = \frac{a^2 + \varepsilon(\varepsilon \operatorname{Re} \lambda - a - 2a \operatorname{Re} \lambda + \varepsilon |\lambda|^2)}{b|\varepsilon - a + \varepsilon \lambda|^2}.$$

Подставим $\lambda = i\omega + o(1)$. Тогда выражение, стоящее в числителе дроби, при малых ε положительно, следовательно, знак всей дроби совпадает со знаком b . Что и требовалось доказать.

Из этой леммы следует, что при $|b| < |a|$ локальная динамика (3.2) при достаточно малых ε является тривиальной: все решения из некоторой (не зависящей от ε) окрестности нулевого решения стремятся к нулю. При $|b| > |a|$ динамика становится нелокальной: при малых ε существуют решения со сколь угодно близкими к нулевым начальными условиями, которые отходят от состояния равновесия на фиксированную величину.

Наконец, при $|b| = |a|$ реализуется критический случай: существует бесконечное количество корней (3.3), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом смысле мы будем говорить, что эти *критические случаи имеют бесконечную размерность*.

3.3. Дальнейшее исследование поведения решений в случаях, близких к критическим, которое будет проведено в следующем параграфе, будет понятнее, если мы выпишем асимптотические формулы для корней (3.3), которые стремятся к мнимой оси, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Здесь мы подробно разберем только случай $b = a$, а для случая $b = -a$ только приведем итоговый результат (все рассуждения там аналогичны).

Корень, асимптотику которого мы ищем, можно представить в виде

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega(\varepsilon) + o(1).$$

Причем возможно, что $\omega(\varepsilon)$ не ограничена (или даже стремится к бесконечности) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

После подстановки в уравнение (3.3) получаем:

$$i\varepsilon\omega(\varepsilon) - a + \varepsilon o(1) = ae^{-i\omega(\varepsilon)+o(1)}. \quad (3.4)$$

Возможны следующие варианты.

1 случай. $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ не ограничено при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако остальные слагаемые в (3.4) ограничены, следовательно, равенство (3.4) невозможно.

2 случай. $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ ограничено. Для каждой ограниченной (при $\varepsilon \rightarrow 0$) функции можно выбрать последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такую, что $\varepsilon_n\omega(\varepsilon_n)$ сходится к некоторому частичному пределу ω_* . Приравняем в (3.4) квадраты модулей правой и левой частей:

$$\varepsilon^2\omega^2(\varepsilon) + (a + \varepsilon o(1))^2 = a^2 e^{o(1)}.$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$, получим

$$\omega_*^2 + a^2 = a^2.$$

Отсюда

$$\omega_* = 0.$$

Значит, все частичные пределы $\varepsilon\omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равны нулю. Следовательно, $\varepsilon\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$, т. е. $\varepsilon\omega(\varepsilon) = o(1)$. Вользовавшись этим, перепишем (3.4)

$$1 = -e^{-i\omega + o(1)} + o(1)$$

Из этого следует, что $\omega(\varepsilon) = \pi(2k + 1)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Если выбрать некоторое фиксированное k , то дальнейшее построение асимптотики завершается без труда. Действительно, положим

$$\lambda_k = i\pi(2k + 1) + \varepsilon\lambda_{k1} + \varepsilon^2\lambda_{k2} + o(\varepsilon^2). \quad (3.5)$$

В результате действий, описанных, например, в [20], получим, что

$$\lambda_{k1} = \frac{i\pi(2k + 1)}{a}, \quad \lambda_{k2} = -\frac{\pi^2(2k + 1)^2}{2a^2} + \frac{i\pi(2k + 1)}{a^2}.$$

Пусть теперь k зависит от ε , причем $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Такую зависимость мы представим в следующем виде

$$2k + 1 = \frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Здесь z — произвольное положительное число. Параметр γ должен быть положительным (чтобы $k(\varepsilon) \rightarrow \infty$), но меньше 1 (чтобы $\varepsilon\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$). Функция $\theta(\varepsilon)$ нужна для того, чтобы значение правой части получалось целым и нечетным. Например, можно определить ее следующим образом: $\theta \in [0, 2)$ такое, что $\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon)$ целое нечетное. Используя целые части, можно сказать, что $\theta(\varepsilon) = 2]\frac{z}{2\varepsilon^\gamma}[+1 - \frac{z}{\varepsilon^\gamma}$, где $]x[$ — большая целая часть — самое маленькое целое, не меньшее x .

Понятно, что θ — разрывная ограниченная функция, принимает значения из полуинтервала $[0; 2)$. Причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ каждое свое значение θ принимает бесконечное число раз.

Значит, корень уравнения (3.3) записывается как

$$\lambda(\varepsilon) = i \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) \right) \pi + o(1).$$

Более того, для любого n можно представить корень в виде

$$\lambda_n(\varepsilon) = i \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) \right) (2n + 1)\pi + o(1).$$

Уточним эту асимптотику. Подставим в (3.3)

$$\lambda = \lambda_n(\varepsilon) = i \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^q \lambda_1 \right) (2n + 1)\pi + \varepsilon^p \lambda_2, \quad p, q > 0,$$

где λ_1 и λ_2 действительные.

Получаемое уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \varepsilon i \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^q \lambda_1 \right) (2n + 1)\pi + \varepsilon^{p+1} \lambda_2 - a = \\ & = a \exp \left[-i \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^q \lambda_1 \right) (2n + 1)\pi - \varepsilon^p \lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Используем свойство функции $\theta(\varepsilon)$ дополнять $z\varepsilon^{-\gamma}$ до целого нечетного числа, а также, что $\exp[i\pi(2N + 1)] = -1$ при любых целых N .

$$\begin{aligned} & i\pi \left(z\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon\theta(\varepsilon) + \varepsilon^{1+q}\lambda_1 \right) (2n + 1) + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 - a = \\ & = -a \exp \left[-i\pi\varepsilon^q(2n + 1)\lambda_1 - \varepsilon^p\lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Перепишем выражение в левой части:

$$\begin{aligned} & -a + i\pi z(2n + 1)\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 + io(\varepsilon^{1-\gamma}) = \\ & = -a \exp \left[-i\pi\varepsilon^q(2n + 1)\lambda_1 - \varepsilon^p\lambda_2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы сохраняем множитель i перед “о-малым” чтобы показать, что все переменные и константы могут принимать только вещественные значения.

Разложим теперь правую часть в асимптотический ряд (используем для этого разложение экспоненты в ряд Тейлора)

$$\begin{aligned} -a + i\pi z(2n+1)\varepsilon^{1-\gamma} + \varepsilon^{p+1}\lambda_2 + io(\varepsilon^{1-\gamma}) = \\ = -a + a[i\pi\varepsilon^q(2n+1)\lambda_1 + \varepsilon^p\lambda_2] - \\ -a\frac{1}{2}[i\pi\varepsilon^q(2n+1)\lambda_1 + \varepsilon^p\lambda_2]^2 + o(\varepsilon^{2p}, \varepsilon^{2q}, \varepsilon^{p+q}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Самое большое по порядку мнимое слагаемое в левой части имеет порядок $\varepsilon^{1-\gamma}$, в правой — ε^q . Отсюда получаем, что $q = 1 - \gamma$, тогда λ_1 находится из равенства мнимых частей

$$\varepsilon^{1-\gamma}\pi z(2n+1) + o(\varepsilon^{1-\gamma}) = a\pi\varepsilon^{1-\gamma}(2n+1)\lambda_1 \implies \lambda_1 = \frac{z}{a} + o(1).$$

После сокращения $-a$, в (3.7) самое большое по порядку вещественное слагаемое в левой части имеет порядок ε^{p+1} , а в правой таких слагаемых два. Они имеют порядки ε^{2q} и ε^p . Понятно, что $\varepsilon^{1+p} = o(\varepsilon^p)$, следовательно, для существования λ_2 должно выполняться равенство $p = 2q = 2 - 2\gamma$. Тогда если приравнять действительные части, то получается уравнение

$$o(\varepsilon^{2-2\gamma}) = \varepsilon^{2-2\gamma}\lambda_2 + \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon^{2-2\gamma}(2n+1)^2\lambda_1^2 + o(\varepsilon^{2-2\gamma}).$$

Отсюда получаем

$$\lambda_2 = \frac{\pi^2 z^2 (2n+1)^2}{2a^2} + o(1).$$

Таким образом, получаем асимптотическое представление для корней (3.3) ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \lambda_n(z, \varepsilon) = i\pi(2n+1) \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \theta(\varepsilon) + \varepsilon^{1-\gamma} \left(\frac{z}{a} + o(1) \right) \right) - \\ - \varepsilon^{2-2\gamma} \left(\frac{\pi^2 z^2 (2n+1)^2}{2a^2} + o(1) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Несмотря на то что формула (3.8) зависит от непрерывных параметров $z > 0$ и $\gamma \in (0, 1)$, уравнение (3.3) имеет лишь счетное число корней. При $\varepsilon \rightarrow 0$ мы как бы “перескакиваем” из

окрестности одного корня в окрестность другого за счет разрывной функции θ . Таким образом, модуль каждого λ_n неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор z и γ влияет лишь на скорость перехода с одного корня на другой.

Аналогичным образом рассмотрим ситуацию $b = -a$. В результате получим, что квазиполином (3.3) также имеет счетное число корней, действительная часть которых стремится к нулю. Для фиксированного (не зависящего от малых параметров) номера корня $k \in \mathbb{Z}$ получаем асимптотику

$$\lambda_k = 2\pi i k \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a^2} + o(\varepsilon^2)\right) - \frac{2k^2\pi^2}{2a^2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \quad (3.9)$$

Для асимптотически больших номеров k , определяемых формулой (3.6), асимптотика имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_n(z, \varepsilon) &= 2i\pi n \left(\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \Theta + \varepsilon^{1-\gamma} \left(\frac{z}{a} + o(1) \right) \right) - \\ &- \varepsilon^{2-2\gamma} \left(\frac{2z^2 n^2}{a^2} + o(1) \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь, в отличие от случая $b = a$, $\Theta = \Theta(z, \varepsilon) \in [0; 1]$ таково, что выражение $\frac{z}{\varepsilon^\gamma} + \Theta(\varepsilon)$ является целым.

Контрольные вопросы и упражнения

1. В чем принципиальное отличие уравнения с большим запаздыванием от уравнения с фиксированным запаздыванием?
2. Докажите существование корня вида $\lambda_+ = \frac{a}{\varepsilon} + o(1)$ у уравнения (3.3).
3. Приведите явный вид (через целые части) для функции $\Theta(z, \varepsilon)$, фигурирующей в равенстве (3.10).

§4. Квазинормальные формы

В § 3 мы установили, что нулевое решение уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = ax + bx(t-1) + F(x, x(t-1)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (4.1)$$

при переходе значения b через $\pm a$ теряет устойчивость. Изучим теперь, как происходит потеря устойчивости в близких к критическим случаях.

Так же, как и в § 2, для упрощения вычислений предположим, что нелинейная функция $F(x, y)$ зависит только от второго аргумента: $F(x, y) \equiv F(y)$. Наконец, т. к. мы исследуем поведение решений в окрестности нуля, представим ее в виде ряда Тейлора

$$F(y) = f_2 y^2 + f_3 y^3 + \dots$$

Мы отдельно изучим случаи b близкого к $-a$ и b близкого к a .

Как было показано в предыдущем параграфе, при таких значениях параметров у характеристического квазиполинома

$$\varepsilon \lambda = a + b e^{-\lambda} \quad (4.2)$$

нет корней с отделенной при $\varepsilon \rightarrow 0$ положительной вещественной частью и есть счетное число корней $\lambda_k(\varepsilon)$, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $b = a$ все такие корни описываются асимптотическими равенствами (3.9) и (3.10), а при $b = -a$ — равенствами (3.5) и (3.8).

4.1. Пусть сначала b близко к $-a$. Рассмотрим случай, когда

$$b = -a(1 + \varepsilon^2 a_1). \quad (4.3)$$

В §2 мы рассматривали критические случаи, когда только один либо два корня характеристического квазимногочлена стремились к мнимой оси. Несмотря на то что теперь таких корней бесконечное количество, воспользуемся аналогичным методом.

Положим в (4.1)

$$x = \varepsilon^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k r} + \varepsilon^4 x_1(\tau, r) + \dots, \quad (4.4)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2 a^{-2})t$, а функция $x_1(\tau, r)$ предполагается периодической по второму аргументу с периодом 1. Так же, как и в §2, подставим выражение для x в уравнение (4.1) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε . На первом и втором шагах, приравнивая коэффициенты при ε^2 и ε^3 соответственно, получим верные тождества. На третьем шаге придем к уравнению относительно x_1 .

$$0 = ax_1 - ax_1(\tau, r-1) - a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(a_1 - \frac{2\pi^2 k^2}{a^2} \right) \xi_k(\tau) - \frac{d\xi_k}{d\tau} \right] e^{2\pi i k r} + f_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k r} \right)^2.$$

Так как $x_1(\tau, r) = x_1(\tau, r-1)$, то это уравнение принимает вид

$$0 = -a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(a_1 - \frac{2\pi^2 k^2}{a^2} \right) \xi_k(\tau) - \frac{d\xi_k}{d\tau} \right] e^{2\pi i k r} + f_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k r} \right)^2.$$

Откуда следует, что для каждого $k \in Z$ выполняется

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = \left[a_1 - \frac{2\pi^2 k^2}{a^2} \right] \xi_k - \frac{f_2}{a} \varphi_k(\xi). \quad (4.5)$$

Здесь через $\varphi_k(\xi)$ обозначен коэффициент при $\exp(2\pi i k r)$ в разложении функции

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e^{2\pi i k r} \right)^2$$

в ряд Фурье.

Систему (4.5) можно записать в виде одного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u - \frac{f_2}{a} u^2 \quad (4.6)$$

с периодическим краевым условием

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \quad (4.7)$$

Действительно, если разложить решение задачи (4.6), (4.7) в ряд Фурье

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) \exp(2\pi i k r),$$

то для определения амплитуд $\xi_k(\tau)$ получим в точности систему (4.5).

Решения задачи (4.6), (4.7) через формулу (4.4) определяют решения уравнения (4.1). Поэтому мы будем говорить, что задача (4.6), (4.7) является *квазинормальной формой* для исходного уравнения (4.1). Как известно, устойчивыми решениями такой краевой задачи могут быть только пространственно-однородные состояния равновесия, которым, в силу формулы (4.4), будут соответствовать устойчивые решения (4.1), близкие к постоянным. В силу этого, динамика (4.1) в случае (4.3) описывается следующей теоремой.

Теорема 4.1 *Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (4.1) неустойчиво, и в его окрестности существует асимптотически устойчивое стационарное решение $x_0(t, \varepsilon)$, причем*

$$x_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{aa_1}{f_2} (1 + o(1)).$$

Если же $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

Перейдем теперь к ситуации

$$b = -a(1 + \varepsilon^p a_1), \quad 0 < p < 2. \quad (4.8)$$

Выберем произвольное положительное число ω . Положим $\gamma = 1 - p/2$. Через Θ , как и в §3, обозначим такое значение из полуинтервала $[0; 1)$, что выражение $\omega \varepsilon^{-\gamma} + \Theta$ является целым.

Подставим в (4.1) следующий ряд:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{2\pi i k r} + \varepsilon^{2p} x_2(\tau, r) + \dots, \quad (4.9)$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $r = (\omega \varepsilon^{-\gamma} + \Theta + \varepsilon^{1-\gamma}(a^{-1}\omega + o(1)))t$, а $x_2(\tau, r)$ периодична по второму аргументу с периодом 1. Действуя так же,

как и выше, т. е. собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему для определения амплитуд ξ_k , которую можно представить в виде одного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\omega^2}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u - \frac{f_2}{a} u^2 \quad (4.10)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = u(\tau, r + 1). \quad (4.11)$$

Отметим, что выбор ω был абсолютно произволен. Следовательно, если мы возьмем другое значение параметра $\omega = \omega_1$, то получим аналогичную (4.10), (4.11) краевую задачу, но краевые условия будут уже иными. Таким образом, мы получили сразу целый класс уравнений, являющихся квазинормальными формами. Так же, как и у системы (4.6), (4.7), у краевой задачи (4.10), (4.11) могут быть устойчивы только пространственно-однородные состояния равновесия (которые от выбора ω не зависят).

Теорема 4.2 Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (4.1) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение, допускающее представление вида

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \frac{aa_1}{f_2} (1 + o(1)).$$

Если же $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (3.2) асимптотически устойчиво.

Таким образом, в результате бифуркации при переходе b через значение $-a$ у исходной системы (4.1) от нуля отходит устойчивое при $b > -a$ и неустойчивое при $b < -a$ ненулевое состояние равновесия.

4.2. Изучим теперь поведение решений (4.1) в малой окрестности нулевого состояния равновесия при значениях b , близких к a . Положим сначала

$$b = a(1 + \varepsilon^2 a_1). \quad (4.12)$$

Рассмотрим асимптотический ряд, аналогичный (4.4),

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k+1)r} + \varepsilon^2 x_2(\tau, r) + \varepsilon^3 x_3(\tau, r) + \dots, \quad (4.13)$$

где все параметры такие же, как и в предыдущем случае: $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2 a^{-2})t$, а функции $x_2(\tau, r)$ и $x_3(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. Обозначим для краткости

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi i(2k+1)r}.$$

Понятно, что $u(\tau, r)$ является антипериодической по r функцией, т. е.

$$u(\tau, r + 1) = -u(\tau, r).$$

Подставим ряд (4.13) в (4.1) и последовательно будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 , как легко убедиться, получим верное тождество. Из уравнения, получившегося при ε^2 после очевидных сокращений,

$$0 = ax_2 + ax_2(\tau, r - 1) + f_2 u^2,$$

используя периодичность x_2 , получим

$$x_2(\tau, r) = -\frac{f_2}{2a} u^2.$$

Приравнивая коэффициенты при ε^3 , приходим к уравнению

$$\begin{aligned} -ax_3 - ax_3(\tau, r - 1) - \frac{2f_2}{a} u \frac{\partial u}{\partial r} = \\ = -a \left(a_1 u + \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) - 2f_2 x_2 u - f_3 u^3. \end{aligned}$$

В левой части стоит периодическая по r функция. Значит, выражение в правой части тоже периодически зависит от r . Однако функция справа — антипериодическая (т. к. содержит только нечетные гармоники). Следовательно, правая часть равна нулю. т. е. справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + \left(\frac{f_2^2}{a^2} - \frac{f_3}{a} \right) u^3 \quad (4.14)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (4.15)$$

Краевая задача (4.14), (4.15) является квазинормальной формой для уравнения (3.2) при условии (4.12). Для того чтобы сформулировать итоговые результаты, введем определение асимптотического по невязке решения.

Будем говорить, что $x_*(t, \varepsilon)$ является *асимптотическим по невязке решением* уравнения $L(x, \varepsilon) = 0$ с точностью ε^n , если выполняется $L(x_*(t, \varepsilon), \varepsilon) = o(\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Теорема 4.3 Пусть краевая задача (4.14), (4.15) имеет ограниченное периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (4.1) имеет асимптотическое по невязке решение

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u(\varepsilon^2 t, (1 + a^{-1}\varepsilon + a^{-2}\varepsilon^2)t) + o(\varepsilon).$$

Теперь рассмотрим случай

$$b = a(1 + \varepsilon^p a_1), \quad 0 < p < 2. \quad (4.16)$$

Опять фиксируем произвольное положительное ω . Положим $\gamma = 1 - p/2$. Через θ , как и в §3, обозначим такое значение из полуинтервала $[0; 2)$, что $\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta$ является целым и нечетным.

Подставим в (4.1) следующий ряд:

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u(\tau, r) + \varepsilon^p x_2(\tau, r) + \varepsilon^{3p/2} x_3(\tau, r) + \dots, \quad (4.17)$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $r = (\omega\varepsilon^{-\gamma} + \theta + \varepsilon^{1-\gamma}(\frac{\omega}{a} + o(1)))t$, а через $u(\tau, r)$ обозначено

$$u(\tau, r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k(\tau) e^{\pi(2k+1)ir}.$$

Понятно, что $u(\tau, r + 1) = -u(\tau, r)$. Функции $x_2(\tau, r)$ и $x_3(\tau, r)$ предполагаются периодическими по второму аргументу с периодом 1.

Действуя так же, как и выше, т. е. собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим для определения $u(\tau, r)$ уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\omega^2}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + \left(\frac{f_2^2}{a^2} - \frac{f_3}{a} \right) u^3 \quad (4.18)$$

с антипериодическими краевыми условиями

$$u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \quad (4.19)$$

Так же, как и в предыдущем пункте, мы получили в качестве квазинормальной формы семейство краевых задач (4.18), (4.19), зависящее от непрерывного параметра $\omega > 0$. При различных значениях параметра динамика этой задачи может быть, вообще говоря, различной.

Теорема 4.4 Пусть при каком-то фиксированном $\omega > 0$ краевая задача (4.18), (4.19) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение (4.1) имеет асимптотическое по невязке решение вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_* \left(\varepsilon^p t, \left(\frac{\omega}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta + \varepsilon^{p/2} \left(\frac{\omega}{a} + o(1) \right) \right) t \right).$$

Из этой теоремы нельзя сделать вывод, существует ли у (4.1) точное решение с приведенной асимптотикой. Можно утверждать, что если u_* неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво. Поэтому рассматривать нужно только устойчивые решения (4.18), (4.19).

4.3. Применим полученные результаты для анализа локальной динамики одного из наиболее простых нелинейных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x} = -x + bx(t - T) + fx^3(t - T), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

В случае, когда запаздывание T достаточно велико, т. е.

$$T = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \ll 1,$$

перейдем в (4.20) к быстрому времени: сделаем замену $t \rightarrow tT$, $x(tT) \rightarrow x(t)$. В результате получим более удобное для анализа уравнение

$$\varepsilon \dot{x} = -x + bx(t-1) + fx^3(t-1). \quad (4.21)$$

Также будем считать, что в (4.21) выполнено условие $b = -(1 + \mu)$, где $\mu \ll 1$. Представим μ в виде $\mu = \varepsilon^p a_1$, $0 < p < 2$. Отметим, что параметры a_1 и p можно выбирать неединственным образом.

Выше мы показали, что при выполнении этих условий локальная динамика (4.21) определяется семейством параболических уравнений, зависящим от положительного параметра ω ,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + fu^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r+1). \quad (4.22)$$

Периодическому решению $u_*(\tau, r)$ системы (4.22), согласно теореме 4.4, соответствует асимптотическое по невязке решение $x_*(t)$ исходного уравнения (4.21) вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u_*(\varepsilon^p t, (\frac{\omega}{\varepsilon^{1-p/2}} + \theta - \varepsilon^{p/2}(\omega + o(1)))t).$$

Все параметры были определены выше, в пункте 4.2.

Рассмотрим постоянные по τ решения квазинормальной формы (4.22). Они определяются краевой задачей

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{d^2 u}{dr^2} + a_1 u + fu^3 = 0, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r+1).$$

Заменой переменной $s = \omega^{-1}r$ преобразуем эту задачу к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{ds^2} + a_1 u + fu^3 = 0, \quad u(\tau, s) = -u(\tau, s + \frac{1}{\omega}).$$

Последнее уравнение при $f < 0$ имеет периодическое решение $u_0(s; a_1)$ с ненулевым наименьшим периодом S (см., например [21]). Вообще говоря, таких решений бесконечное количество. Выберем какое-нибудь. Положим $\omega = 2S^{-1}$. Тогда $u_0(s; a_1)$ будет решением краевой задачи, а, значит, квазинормальная форма при таком ω имеет решение $u_0(\frac{1}{2}rS; a_1)$. Отметим, что $\frac{du_0}{dr}$ ровно один раз обращается в ноль на участке длины 1.

Линеаризуем (4.22) на $u_0(\frac{1}{2}rS; a_1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{2}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + a_1 + 3fu_0^2 \right) u, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1).$$

У линейного оператора, стоящего в правой части есть одно нулевое собственное значение, а все остальные отрицательны (см. [22]). В силу этого, $u_0(\frac{1}{2}rS; a_1)$ является устойчивым решением квазинормальной формы. Тогда, в силу теоремы 4.4, у исходного уравнения существуют устойчивые решения, близкие к

$$x(t) = \varepsilon^{p/2} u_0 \left(\frac{S}{2} \left(\frac{2}{S \varepsilon^{1-p/2}} + \theta - \varepsilon^{p/2} \left(\frac{2}{S} + o(1) \right) t; a_1 \right). \quad (4.23)$$

Выберем несколько значений a_1 и для каждого a_1 определим какое-нибудь решение $u_0(r; a_1)$ и значение ω . Таким образом, у нас получится набор решений (устойчивых решений) семейства краевых задач (4.22). Затем с помощью последней формулы построим приближение решения исходного уравнения. В результате мы получим несколько различных решений исходного уравнения с запаздыванием (4.21).

На рис. 3 показаны графики получившихся функций.

Возьмем эти функции в качестве начальных условий для уравнения (4.21) и численными методами построим решения соответствующих начальных задач. На рис. 4 приведены графики получившихся решений при значении времени $t = 3000$.

Мы видим, что в малой окрестности состояния равновесия уравнения (4.21) существует несколько устойчивых решений. Эти решения близки к тем, что были предсказаны на основании анализа нормализованной формы (4.22) (см. рис. 3).

Отметим, что если в уравнении вида (4.21) для параметра выполнено условие $|a| < 1$, то нулевое решение экспоненциально устойчиво. То есть при $a = -1$ происходит бифуркация, в результате которой, как мы показали, рождается неограниченно большое количество циклов (мы привели численные расчеты для трех, но понятно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ их количество неограниченно растет). Такое явление, согласно [23], носит название *буферность*.

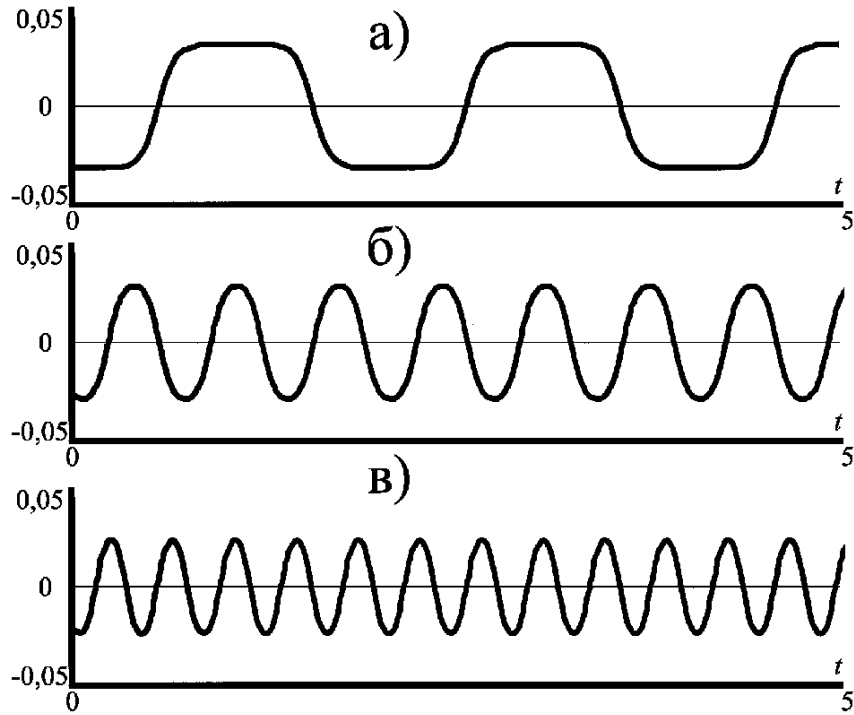


Рис. 3. Графики функций, построенные на основе решений квазинормальной формы (4.22) по формуле (4.23). Значения параметров: а) $a_1 = 5$, $p = 1,23$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 4$; б) $a_1 = 1$, $p = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 4$; в) $a_1 = 1$, $p = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $f = -1$, $\omega = 3$

Контрольные вопросы и упражнения

1. Прodelайте самостоятельно все необходимые вычисления для построения квазинормальной формы (4.18), (4.19).
2. Постройте квазинормальные формы для случая, когда функция $F(x, y)$ зависит только от первого аргумента, т. е. исходное уравнение имеет вид

$$\dot{x} = ax + bx(t-1) + F(x).$$

3. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\varepsilon \dot{z} = -z + az(t-1) + \mu f(z(t-1)),$$

где $0 < \mu \ll 1$. Покажите, что при условиях $a = 1$ и $a = -1$ роль квазинормальной формы, описывающей динамику исходной системы уже не в малой, но в произвольной фиксированной

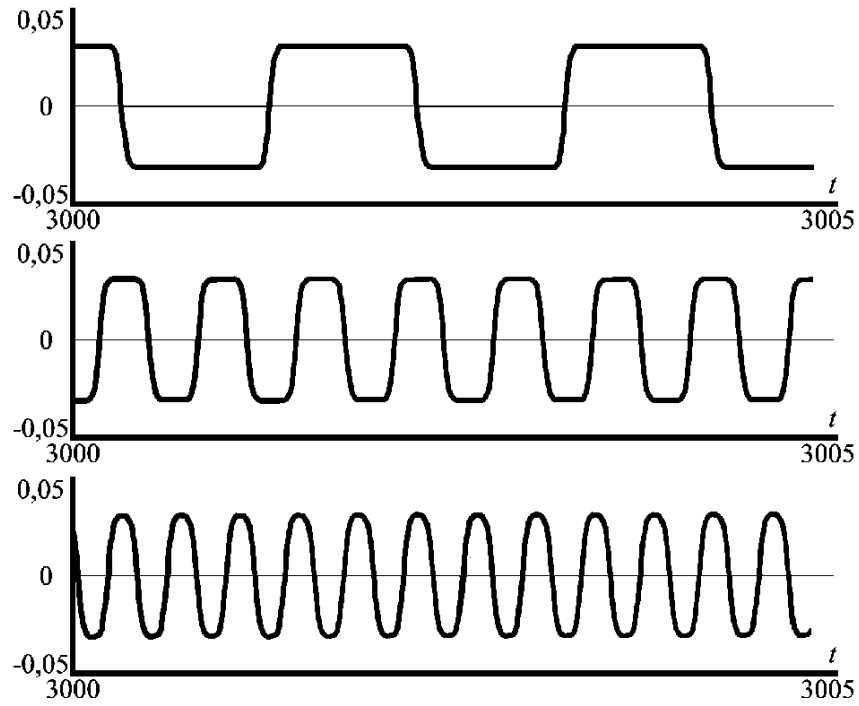


Рис. 4. Графики некоторых решений уравнения (4.21)

окрестности нуля, играют, соответственно, краевые задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + f(u), \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \Phi(u), \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1),$$

где обозначено: $\delta = \varepsilon \mu^{-1/2}$, $\Phi(u) = (f(-u) - f(u))/2$.

Литература

- [1] Кащенко С. А., Майоров В. В. Модели волновой памяти. М.: УРСС, 2009.
- [2] Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Параметры порядка в моделях лазеров с запаздывающей обратной связью // Синергетика: Исследования и технологии. Серия “Синергетика: от прошлого к будущему”. М.: УРСС, 2007. С. 156–192.
- [3] Vladimirov A., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers // Phys. Rev. A 72, 033808 (2005).
- [4] Кащенко С. А. Циклические риски и системы с запаздыванием // Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002.
- [5] Горяченко В. Д. Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последствий: Краткий обзор // Нелинейные колебания и экология: сб. Ярославль, 1984. С. 66–83.
- [6] Горяченко В. Д. Качественные методы в динамике ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1983 г.
- [7] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в радиотехнике. М.: Наука, 1989.
- [8] Горяченко В. Д., Капустин А. Д. Прикладные задачи устойчивости систем с запаздыванием. Горький, 1988.
- [9] Кащенко С. А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с

- малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
- [10] Кащенко И. С. Динамические свойства уравнений первого порядка с большим запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 2. С. 58–62.
 - [11] Кащенко И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады Академии наук. 2008. Т. 421, № 5, С. 586–589.
 - [12] Кащенко И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2141–2150.
 - [13] Кащенко И. С. Численный анализ локальной динамики одного уравнения с запаздыванием // Математика, кибернетика, информатика: тр. Междунар. науч. конф. памяти А. Ю. Левина. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 111–114.
 - [14] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
 - [15] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer, 1996.
 - [16] Марсден Дж. Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
 - [17] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
 - [18] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
 - [19] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
 - [20] Кащенко И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

- [21] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М: Наука, 1990.
- [22] Кащенко С. А. Устойчивость уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами: учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. Ярославль: ЯрГУ, 2006.
- [23] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994.

Учебное издание

Кащенко Илья Сергеевич

Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием

Методические указания

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерный набор и верстка И. С. Кащенко

Подписано в печать 2.10.2012. Формат 60×84/16.

Бумага тип.

Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,2.

Тираж 17 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.