

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра общей математики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 25 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основами геометрии выпуклых множеств, обоснование симплекс-метода решения задач линейного программирования, двойственного симплекс-метода и некоторых специальных классов задач линейного программирования.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Дисциплина “Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств” относится к числу прикладных математических дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплины “Алгебра” и “Аналитическая геометрия”. Знания и навыки полученные при изучении дисциплины “Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств” используются обучаемыми при решении определенного класса экстремальных задач.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-3</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники	<b>И-ПК-3.1</b> Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции). <b>И-ПК-3.2</b> Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными	<b>Знать:</b> основные теоремы линейного программирования; основные свойства и методы решения задач линейного программирования. <b>Уметь:</b> решать задачи линейного программирования геометрически; решать задачи линейного программирования симплекс-метода; составлять задачу, двойственную данной, и находить ее решение, пользуясь теоремами двойственности. <b>Владеть навыками:</b> применения симплекс-метода в решении задач экстремального типа;

	средствами, поддерживающими создание программного продукта.	защиты и методах его предупреждения.
--	---	--------------------------------------

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция	5	4	4		1			
2	Графический метод решения задачи линейного программирования.	5	4	4		1		10	Самостоятельная работа №1
3	Выпуклые множества.	5	2	2		1			
4	Симплекс-метод.	5	3	3				10	Самостоятельная работа №2
5	Двойственность в линейном программировании.	5	3	3		1		12	Самостоятельная работа №3
							0,3	3,7	Зачет
	Всего		16	16		4	0,3	35,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Раздел 1. Введение

1. История возникновения и развития линейного программирования.
2. Примеры задач линейного программирования.
3. Различные эквивалентные формы задачи линейного программирования.

##### Раздел 2. Графический метод решения задачи линейного программирования.

1. Геометрический смысл линейных неравенств и систем линейных неравенств при  $n=2,3$ .
2. Графический метод решения задач линейного программирования при  $n=2,3$ .
3. Выводы.

##### Раздел 3. Выпуклые множества.

1. Основные свойства выпуклых множеств.
2. Многогранные множества: ребра, вершины, грани.
3. Теоремы о выпуклости допустимого множества и множества оптимальных точек.
4. Необходимое и достаточное условие существования вершины многогранного множества.
5. Теорема о достижении оптимума задачи линейного программирования.

#### **Раздел 4. Симплекс-метод.**

1. Опорные решения задачи линейного программирования. Необходимое и достаточное условие.
2. Базис опорного решения. Переход от одного базиса опорного решения к другому. Основные формулы.
3. Симплекс-метод.
4. Критерии возможности улучшения опорного решения и оптимальности опорного решения.
5. Алгоритм симплекс-метода.
6. Вырожденный случай.
7. Зацикливание и методы его предупреждения.
8. Отыскание исходного базиса.

#### **Раздел 5. Двойственность в линейном программировании.**

1. Взаимно двойственные задачи и их свойства.
2. Теоремы двойственности.
3. Двойственный симплекс-метод.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Юрьева А. А. Математическое программирование: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/212210>
2. Лунгу К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач - М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922110297-SCN0000/000.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М., Наука, 1964.
2. Заславский Ю. А. Сборник задач по линейному программированию. - М., Наука, 1969.
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование: Теория и конечные методы. - М.: Физматлит, 1963.
4. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/210680>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;

- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор:**

Заведующая кафедрой общей математики,  
доцент, к.ф.-м.н.

Е.А. Марушкина

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
“Линейное программирование и  
геометрия выпуклых множеств”**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Самостоятельная работа №1**

**Вариант №1**

1. Составить математическую модель задачи:

Для изготовления различных изделий А, В и С предприятие использует три различных вида сырья, запасы которых составляют 420 кг., 280 кг., 90 кг. соответственно. Для изготовления одного изделия А необходимо 15 кг., 9 кг. и 3кг. сырья различных видов; для одного изделия В нужно сырье в количестве 14 кг., 10 кг., 4 кг., а для одного изделия С - 11 кг., 10 кг., 3 кг. соответственно. Цены одного изделия типа А, В, С составляют 21, 23, 27 д.е. соответственно. Составит план производства, обеспечивающий максимальную цену произведенных изделий.

2. Решить графически ЗЛП:

$$\begin{cases} X + 2Y \leq 4 \\ 2X + Y \leq 4 \\ X + Y \geq 1 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

$$f = X + Y \rightarrow \min$$

**Вариант №2**

1. Составить математическую модель задачи:

Перевозка 1 т. груза из пункта С в магазины I, II, III составляет 4,6 и 1,9 ед., а из пункта D – 3,5 и 3,8 ед. Составить план перевозок, минимизирующий затраты на перевозку 40 т. груза из пункта С и 60 т. груза из пункта D в магазины, потребности которых составляют соответственно 30 т., 17 т. и 45 т.

2. Решить графически ЗЛП:

$$\begin{cases} 2X + 3Y \leq 3 \\ X - Y \leq 4 \\ Y \leq 0,5 \\ 7X + Y \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 4X + Y \rightarrow \max$$

**Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:**

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 3 балла;

- при решении допущены незначительные ошибки – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 6 баллов,

Набранное количество баллов 6 соответствует оценке «отлично», 4-5 баллов – оценке «хорошо», 2-3 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## Самостоятельная работа № 2

### Вариант №1

1. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

2. Найти опорное решение ЗЛП и решить ее симплекс-методом.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 + 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 4 балла.

Набранное количество баллов: 4 балла соответствует оценке «отлично», 3 балла – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## Самостоятельная работа №3

### Вариант №1

1. Составить математическую модель задачи:

Для изготовления различных изделий А, В и С предприятие использует три различных вида сырья, запасы которых составляют 360 кг., 192 кг., 180 кг. соответственно. Для изготовления одного изделия А необходимо 18 кг., 6 кг. и 5кг. сырья различных видов; для одного изделия В нужно сырье в количестве 15 кг., 4 кг., 3 кг., а для одного изделия С - 12 кг., 8 кг., 3 кг. соответственно. Цены одного изделия типа А, В, С составляют 19, 20, 26 д.е. соответственно. Составит план производства, обеспечивающий максимальную цену произведенных изделий.

2. Привести задачу к каноническому виду:



$$\begin{cases} 4X + Y \geq 4 \\ X + 2Y \geq 4 \\ -X + Y \leq 3 \end{cases}$$

$$f = X + 2Y \rightarrow \min$$

#### Правила выставления оценки по результатам самостоятельной работы:

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание – 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены ошибки – 1 балл;
- полностью неправильно выполненное задание – 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 4 балла.

Набранное количество баллов: 4 балла соответствует оценке «отлично», 3 балла – оценке «хорошо», 2 балла – оценке «удовлетворительно», менее 2 баллов – оценке «неудовлетворительно» (умения на данном этапе освоения дисциплины не сформированы).

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Список заданий к зачету**

На зачете проверяется сформированность компетенции ПК-3, (индикатор И-ПК-3.1, индикатор И-ПК-3.2 в части умений работы с задачами линейного программирования, выпуклыми множествами, симплекс-методом).

Зачет выставляется по результатам контрольной работы при условии набора по итогам ее выполнения студентом с одной попытки не менее 4 баллов.

#### Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Оценка по результатам контрольной работы определяется в баллах по следующему принципу: правильно выполненное задание оценивается в 2 балла.

Каждое из заданий может быть оценено половиной заявленных по нему баллов, в случае, когда при его выполнении правильно применен алгоритм, но имеются ошибки в численных расчетах.

Полностью неправильно выполненное задание - 0 баллов.

#### **Примеры заданий:**

1. Составить математическую модель задачи:

Перевозка 1 т. груза из пункта А в магазины I, II, III составляет 3,2 и 1,5 ед., а из пункта В – 2,7 и 3,5 ед. Составить план перевозок, минимизирующий затраты на перевозку 30 т. груза из пункта С и 60 т. груза из пункта А и 80 т. из пункта В в магазины, потребности которых в грузе составляют соответственно 40 т., 15 т. и 55 т.

2. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

3. Найти опорное решение методом искусственного базиса и ЗЛП

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 = -1 \\ x_1 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

4. Привести задачу к стандартному виду

$$\begin{cases} 7X + 3Y - 5Z = 1 \\ X + Y + Z = 4 \\ X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0 \end{cases}$$

$$f = X - 3Y + Z \rightarrow \max$$

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины “Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств”**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине **“Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств”** являются как лекции, так и практические занятия. Это связано с тем, что студентам важно понимать связь теоретического материала с практическими задачами. Для этого на практических занятиях приводится решение большого количества задач, иллюстрирующих модели из жизни.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и обязательно прорешивать задачи, заданные для самостоятельного решения.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях. Добросовестное выполнение домашнего задания помогает студентам лучше усваивать пройденный материал, и прослеживать связь пройденного материала с новым.

Для проверки и контроля усвоения теоретического и практического материала, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде самостоятельных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для домашней работы, которые вызвали затруднения.

В конце курса студенты сдают зачет. Зачет принимается по результатам выполнения контрольной работы и собеседования.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины **“Линейное программирование и геометрия выпуклых множеств”** самостоятельно студенту бывает сложно. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым.