

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дискретная математика**

Направление подготовки (специальности)  
10.03.01 Информационная безопасность

Направленность (профиль)  
«Безопасность компьютерных систем (в сфере информационных технологий)»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 26 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Дискретная математика" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний, умений и навыков в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО, способствует развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами дискретной математики, формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по основным разделам дискретной математики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретная математика» относится к обязательной части образовательной программы и играет исключительно важную роль для общематематической и общепрофессиональной подготовки специалиста.

Дисциплина имеет разносторонние связи со всеми специальными и основными математическими дисциплинами. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин «Алгебра», "Теория чисел", "Информатика" и " Введение в теорию множеств и логическую символику".

Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Дискретная математика", являются основой для изучения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», «Математическая логика и теория алгоритмов» и активно используются обучаемыми при изучении других общепрофессиональных, профессиональных и профессионально-специализированных дисциплин.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК-3</b> Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности.	<b>И-ОПК-3.8</b> Знает основные понятия, результаты, методы современной математики и сценарии их применения в задачах профессиональной деятельности	<b>Знает:</b> - основные понятия теории графов; основные операции на графах; свойства и типы графов; основные результаты, классические оптимизационные задачи на графах; - основные модели комбинаторной математики, формулы чисел размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений, модели комбинаторики разбиений; принцип включения и исключения, основные классы производящих функций, понятие рекуррентного соотношения, алгоритм

		<p>решения линейного рекуррентного соотношения с постоянными коэффициентами.</p> <p><b>Умеет:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять формулы числа размещений, перестановок, сочетаний, применять принцип включений и исключений для решения комбинаторных задач;</li> <li>- строить производящую функцию для последовательности чисел, решать линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.</li> </ul> <p><b>Владеет навыками:</b></p> <p>решения стандартных задач по комбинаторике и теории графов.</p>
	<p><b>И-ОПК-3.9</b></p> <p>Умеет распознать математические структуры, возникающие в задачах профессиональной деятельности, конструировать, анализировать объекты и выполнять вычисления, формулировать требования к свойствам математических объектов, необходимым для решения профессиональной задачи</p>	<p><b>Знает:</b></p> <p>основные комбинаторные алгоритмы, основные алгоритмы решения задач теории графов: алгоритмы обхода в глубину и ширину, топологической сортировки, алгоритма поиска кратчайших путей в графах, алгоритм построения минимального каркаса, поиска гамильтонова цикла в графе, задачи о коммивояжере, задачи о максимальном потоке.</p> <p><b>Умеет:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теории графов для их решения;</li> <li>- строить графические модели задач и явлений практического характера по специальности;</li> <li>- применять стандартные графические модели к решению прикладных задач.</li> </ul> <p><b>Владеет навыками:</b></p> <p>использования библиотек прикладных программ для решения прикладных задач с использованием компьютера, алгоритмами решений задач на графах, решения комбинаторных задач, включая использование аппарата производящих функций.</p>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)		Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа		

			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция	4	2						
2	Числа размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений	4	2	4		1		5	Самостоятельная работа 1
3	Формула включений и исключений	4	2	2		1		2	Задания для домашней работы Устный опрос
4	Биномиальная теорема	4	2	2				2	Задания для домашней работы Устный опрос
5	Полиномиальная теорема	4	2	2		1			
6	Комбинаторика разбиений	4	2	2				4	Лабораторная работа 1
7	Производящие функции	4	2	2		1			
8	Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами	4	2	4				3	Контрольная работа по комбинаторике
9	Теория графов	4	2	2		1		5	Самостоятельная работа 2
10	Пути, циклы, связность	4	2	2				2	Задания для домашней работы Устный опрос
11	Деревья	4	2	2		1		2	Задания для домашней работы Устный опрос
12	Эйлеровы графы	4	2	2				2	Задания для домашней работы Устный опрос
13	Гамильтоновы графы	4	2	2		1		2	Задания для домашней работы Устный опрос
14	Плоские и планарные графы	4	2	2				2	Задания для домашней работы Устный опрос
15	Некоторые алгоритмы на графах	4	2	2		1		4	Лабораторная работа 2
16	Обзор тем, не вошедших в курс	4	2						
							0,3	0,7	зачет
	<b>ИТОГО</b>		<b>32</b>	<b>32</b>		<b>8</b>	<b>0,3</b>	<b>35,7</b>	

### Содержание разделов дисциплины

#### Тема 1. Вводная лекция.

Краткий исторический очерк. Разделы дискретной математики. Комбинаторика. Введение. Правила суммы и произведения. Выборки.

**Тема 2. Числа размещений, перестановок, сочетаний с повторениями и без повторений.**

**Тема 3. Формула включений и исключений.**

**Тема 4. Биномиальная теорема.**

Свойства биномиальных коэффициентов.

**Тема 5. Полиномиальная теорема**

**Тема 6. Комбинаторика разбиений.**

Некоторые комбинаторные алгоритмы.

**Тема 7. Производящие функции.**

Основные определения и свойства.

**Тема 8. Линейные однородные и неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.**

**Тема 9. Теория графов.**

Введение. Виды графов и операции над ними. Теорема Эйлера о сумме степеней вершин. Изоморфизм.

**Тема 10. Пути, циклы, связность.**

Вершинная и реберная связность. Двусвязные графы.

**Тема 11. Деревья.**

Остов минимального веса.

**Тема 12. Эйлеровы графы.**

Необходимые и достаточные условия. Построение эйлеровой цепи.

**Тема 13. Гамильтоновы графы.**

Задача поиска гамильтонова цикла в графе, задача о коммивояжере.

**Тема 14. Плоские и планарные графы.**

Формула Эйлера. Теорема Понтрягина-Куратовского.

**Тема 15. Некоторые алгоритмы на графах.**

Обходы в глубину и ширину, топологическая сортировка, алгоритм поиска кратчайшего пути в графе, задача о максимальном потоке.

**Тема 16. Обзор тем, не вошедших в курс.**

Паросочетания. Раскраски.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Обобщающая лекция** – проводится в завершение изучения раздела или темы для закрепления знаний. На лекции вновь выделяются основные вопросы, используются

обобщающие таблицы, схемы, алгоритмы, позволяющие включить усвоенные знания в новые связи и зависимости, переводя их на более высокие уровни усвоения.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультация** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Open Office;
- MikTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

для выполнения лабораторных работ:

- Microsoft Visual Studio Community

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используется:  
- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Башкин М. А., Якимова О. П. Дискретная математика: сборник задач. - Ярославль, ЯрГУ, 2012. <http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20120208.pdf>
2. Башкин М. А., Якимова О. П. Дискретная математика: сборник задач. Часть 2. Ярославль, ЯрГУ, 2013. <http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20130203.pdf>
3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: учебное пособие. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN9785922104777-SCN0000/000.html>
4. Князьков, В. С. Введение в теорию множеств и комбинаторику / Князьков В. С. , Волченская Т. В. - Москва : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2016.

- Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : [https://www.studentlibrary.ru/book/intuit\\_093.html](https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_093.html)

**б) дополнительная литература**

1. Дурнев В.Г., Башкин М.А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – Часть 1. <http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20070295.pdf>
2. Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О.П. Элементы дискретной математики. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – Часть 2. <http://www.lib.uni Yar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>
3. Лекции по теории графов: учеб. пособие для вузов. / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич; Гос. комитет СССР по народному образованию - М.: ЛИБРОКОМ; URSS, 2013. - 383 с.
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. - М: МЦНМО, 2018  
<https://djvu.online/file/LMWuWJyQ2iwdr?ysclid=lj63zin07n271837411>

**9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

**Автор(ы):**

Доцент кафедры КБиММОИ, к.ф.-м.н.

Федотова Н. П.

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Дискретная математика»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Самостоятельная работа 1. Вариант 1.**

1. Сколько существует четырехзначных чисел, в которых хотя бы одна семерка?
2. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 7 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно три буквы A?
3. Сколькими способами Буратино, кот Базилио и лиса Алиса могут поделить между собой 5 одинаковых золотых монет?
4. На доске нарисованы 10 прямых общего положения. Сколько они образуют точек пересечения? На сколько частей они делят плоскость?
5. Сколькими способами 12 банок тушенки можно разложить по пяти по пяти рюкзакам туристов так, чтобы каждый нес хотя бы одну банку?
6. Сколько различных чисел может получиться перестановкой цифр числа 13557? Чему равна сумма всех этих чисел?

**Лабораторная работа 1. Вариант 1.**

Дано натуральное число  $N$ . Рассмотрим его разбиение на натуральные слагаемые. Два разбиения, отличающихся только порядком слагаемых, будем считать за одно, поэтому можно считать, что слагаемые в разбиении упорядочены по невозрастанию. На вход подается единственное число  $N \leq 40$ .

Напишите программу, которая выводит все разбиения числа  $N$  на натуральные слагаемые в лексикографическом порядке.

Пример. Для  $N = 5$  существуют такие способы разбиения на слагаемые:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5$$

**Лабораторная работа 2. Вариант 1.**

Дан ориентированный взвешенный граф. Найдите кратчайший путь от одной заданной вершины до другой.

В первой строке содержатся три числа:  $N$ ,  $S$  и  $F$  ( $1 \leq N \leq 100$ ,  $1 \leq S, F \leq N$ ), где  $N$  – количество вершин графа,  $S$  – начальная вершина, а  $F$  – конечная. В следующих  $N$  строках вводится по  $N$  чисел, не превосходящих 100, – матрица смежности графа, где -1 означает отсутствие ребра между вершинами, а любое неотрицательное число – присутствие ребра данного веса. На главной диагонали матрицы записаны нули.

Требуется вывести последовательно все вершины одного (любого) из кратчайших путей, или одно число -1, если пути между указанными вершинами не существует.

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

1. Правило суммы, правило произведения.

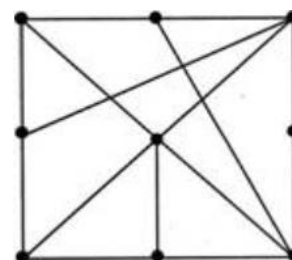


2. Размещения без повторений и с повторениями.
3. Перестановки без повторений и с повторениями.
4. Сочетания без повторений.
5. Сочетания и с повторениями.
6. Полиномиальная теорема.
7. Биномиальная теорема.
8. Свойства биномиальных коэффициентов.
9. Формула включений и исключений.
10. Производящие функции. Основные определения и свойства.
11. Решение линейные однородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
12. Решение линейные неоднородных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.
13. Виды графов и операции над ними. Теорема Эйлера о сумме степеней вершин.
14. Вершинная и реберная связность.
15. Двусвязные графы.
16. Деревья
17. Плоские и планарные графы. Формула Эйлера. Формулировка теоремы Понтрягина-Куратовского.
18. Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия.
19. Гамильтоновы графы.
20. Задача о коммивояжере
21. Алгоритм поиска кратчайшего пути в графе
22. Задача о максимальном потоке.

### **Примерный билет к зачету по дисциплине**

1. Эйлеровы графы. Необходимые и достаточные условия.
2. Дана матрица смежности графа. Определите, является ли данный граф двудольным, эйлеровым, гамильтоновым, планарным, двусвязным.
3. Найдите коэффициент при  $t^{11}$  разложения  $(2 - 3t - t^2)^k$ , если сумма полиномиальных коэффициентов равна 2187.
4. Леша поднимается по лестнице из 10 ступенек. За один раз он прыгает вверх либо на одну ступеньку, либо на две ступеньки, либо на три. Сколькими способами Леша может подняться по лестнице?
5. Инженер Иванов (см. рисунок) усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников. Можно ли изготовить плату так, чтобы все проводники размещались на одной ее стороне?

0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0



### **Критерии выставления оценки**

Билет состоит из 1 теоретического вопроса и 4 задач. Каждое задание оценивается в один балл. Базовая оценка равна сумме баллов. Оценка может быть понижена, если студент не выполнил все необходимые самостоятельные, контрольные и лабораторные работы. Оценка может быть повышена, если обучающийся выполнял кроме необходимых еще и дополнительные задания.

**Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины  
«Дискретная математика»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Дискретная математика" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большому числу тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.