

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра математического анализа

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИСТИКА.  
АЛГОРИТМЫ, ПРИМЕРЫ  
И ЗАДАЧИ**

Практикум

Ярославль  
ЯрГУ  
2019

УДК 510.6(076.5)

ББК В12я73

М34

Рекомендовано

Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2019 года

Рецензент

кафедра математического анализа  
Ярославского государственного университета  
им. П. Г. Демидова

Составитель

В. Е. Балабаев

М34 Математическая логистика. Алгоритмы, примеры  
и задачи : практикум / сост. В. Е. Балабаев ; Яросл. гос.  
ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2019. – 56 с.

Основная цель работы — научить студентов  
основным математическим методам в логистике. Главное  
внимание уделяется проблемам дискретной оптимизации.  
Для самостоятельной работы приведены задания.

Работа предназначена для студентов, обучающихся  
по дисциплине «Математические методы в логистике».

УДК 510.6(076.5)

ББК В12я73

© ЯрГУ, 2019

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИСТИКИ

Самый важный вопрос – это что производить самим, а что закупать. Нужно также решить, будет ли предприятие приобретать стандартную продукцию или имеющееся на рынке сырье вместо особой продукции для потребностей конкретного заказа.

При этом возникает проблема качества товаров и услуг. Высокое качество конечной продукции необходимо для поддержания и роста доли на рынке. Производство продукции «с первого раза» гораздо эффективнее по стоимости, чем внесение корректив после выяснения фактов брака. Требуются программы контроля качества для наблюдения за производственным процессом с целью внесения, необходимых корректив до того, как будет выпущена бракованная продукция. В этой ситуации на помощь приходит статистический контроль качества.

При проведении закупок необходимо решить, когда закупать, сколько всего закупать и сколько закупать за одну поставку. Ответы на эти вопросы дает управление запасами. При закупке сырья существует возможность фьючерсов и хеджирования.

Любое предприятие следует неким специфическим стратегиям цен. Выбор такой стратегии требует широкого применения анализа стоимости, расходов и интенсивных переговоров. Сокращение расходов возможно при использовании долгосрочной транспортной стратегии.

Отвечая на вопрос, где покупать, предприятию предстоит сделать выбор между местными, региональными, национальными и между народными источниками снабжения; между крупными и мелкими поставщиками; между одним и несколькими источниками снабжения. Для приобретения основного сырья и компонентов необходимо использование не менее двух поставщиков. Но такое дробление лишает возможности получения оптовой скидки. К тому же использование единственного источника снабжения может снизить административные расходы, связанные с закупками.

Для ответа на вопрос, как покупать, существует множество вариантов. Это переговоры, тендеры, системы открытых заказов,

системные контракты, совместные закупки, долгосрочные контракты. Обычно на выбор той или иной стратегии снабжения влияют общие организационные цели и стратегии предприятия, а также рыночные условия как в настоящем, так и в будущем.

Логистика отвечает за прохождение материального потока (то есть товаров и услуг) через цепь поставок, ряд видов деятельности и предприятий, через которые проходят материалы во время своего перемещения от поставщиков начального уровня до конечного потребителя. Другими словами, логистика – это управление цепью поставок, которое обеспечивает обслуживание высокого качества с низкими затратами. Сюда входят более быстрая доставка грузов, низкие затраты, небольшие отходы, оперативное реагирование на запросы потребителей, высокая продуктивность, низкий уровень запасов, отсутствие повреждений, небольшое число ошибок, хорошее отношение персонала к работе и т. д.

Без логистики никакие материалы не перемещаются, никакие операции не выполняются, никакие продукты не доставляются и никакие потребители не обслуживаются. Логистика оказывает значительное влияние на время выполнения заказов, надежность и другие параметры обслуживания потребителей. Она определяет оптимальные размеры элементов инфраструктуры и места их размещения.

Логистика состоит из ряда взаимосвязанных видов деятельности, которые начинаются со снабжения в начале выполнения операций и заканчиваются физическим распределением продукции. Это одна из областей, которую удобно передавать для выполнения посредникам, специализированным предприятиям, предлагающим ассортимент требуемых услуг.

Выделяют три направления развития логистики. Для тощей логистики характерны анализ операций и системное удаление всех действий, перемещений, времени, материальных и других ресурсов, приводящих к возникновению отходов. Это позволяет существенно повысить показатели деятельности предприятия.

Второе направление – это динамичная логистика, уделяющая основное внимание потребителям. Она предоставляет услуги

на заказ и оперативно реагирует на изменяющиеся требования потребителей.

Интеграция цепей поставок – это третье направление развития логистики. Для достижения своих целей предприятия должны тесно сотрудничать с другими участниками цепи поставок.

В идеале логистика должна стремиться к тому, чтобы одновременно иметь три вышеназванные характеристики: отсутствие «жира», динамизм и интегрированность.

Общие логистические издержки содержат затраты на перевозку, складирование, управление запасами, упаковывание, обработку информации и на другие накладные расходы логистического характера. При системном подходе к логистике, когда все взаимосвязанные логистические виды деятельности выполняются согласованно, сокращение затрат на один вид деятельности ведет к снижению общих логистических издержек, хотя затраты на другой вид деятельности могут и увеличиться.

Логистика должна постоянно совершенствоваться, то есть необходим постоянный поиск более совершенных способов логистической деятельности. В прошлом логистике не уделяли достаточного внимания. Сегодня же она находится в центре процесса принятия решения, оказывая долгосрочное влияние на все операции и общие показатели.

Каждое предприятие разрабатывает свою собственную логистическую стратегию, которая состоит из всех стратегических решений и планов, связанных с управлением цепью поставок. Существуют две базовые логистические стратегии: «тощая» и динамичная.

Цель тощей логистики – минимизировать общие логистические издержки, при этом гарантировать приемлемый уровень обслуживания потребителей (то есть производство той же или сопоставимой продукции более дешево).

Цель динамичной стратегии – обеспечить высокое качество обслуживания потребителей, оперативно реагировать на появление новых или изменение прежних условий (то есть выпуск продукции, которую потребители не могут получить у других поставщиков). Динамичная стратегия сфокусирована на потребителях.

Конечно, на практике нет никакой разграничительной линии между «тощей» и динамичной стратегиями. Поэтому предприятию вовсе не нужно выбирать какую-то одну из этих стратегий в ущерб другой. Никакой единой лучшей стратегии просто не существует. Логистическая стратегия должна соответствовать целям предприятия. При ее разработке следует учесть факторы, которые влияют на логистику, но которыми логистика не может управлять. Это потребители; рыночные условия, экономические условия (темпы инфляций, темпы роста, объем валового внутреннего продукта), конкуренты, правовые ограничения, акционеры (доход на инвестиции), социальные и политические условия.

При разработке логистической стратегии также нужно учесть факторы, которыми предприятие может управлять. Это сотрудники, финансы, сооружения, маркетинг, поставщики, технологии.

Стратегии только тогда становятся эффективными, когда они реализованы. Поэтому всегда необходимо рассматривать практические следствия любых выбираемых приемов. При переходе к реализации логистической стратегии следует сконцентрировать усилия на четырех областях: обслуживании потребителей, размещении элементов инфраструктуры, управлении запасами и транспорте.

Предприятие должно решить, с какими типами посредников оно будет иметь дело (то есть кто будет поставщиками и потребителями в цепи поставок), где должны располагаться склады, какая работа будет выполняться в логистических центрах, какие потребители будут обслуживаться из каждого центра, виды транспорта, скорость доставки, какова ширина цепи поставок (то есть число параллельных маршрутов, по которым может перемещаться продукция) и т. д.

Удлинение и расширение цепи поставок приводит к повышению качества обслуживания, но сопровождается ростом затрат и снижением контроля со стороны производителя. К сожалению, не существует наилучшего варианта и приходится выбирать компромиссный вариант, в наибольшей степени соответствующий заданным целям логистической стратегии.

Из-за постоянного изменения внешних и внутренних факторов в логистическую стратегию приходится постоянно вносить коррективы. Крупные изменения могут оказаться для предприятия очень разрушительными. Поэтому на практике гораздо чаще встречается непрерывное совершенствование. Такой подход гарантирует совершенствование логистической системы.

Однако в случае плохой логистической системы не следует тратить время на отыскание небольших улучшений, а следует отбросить всю прежнюю систему и разработать новую. Вполне возможно реализовать ряд крупных изменений в виде более мелких, но постоянно проводимых улучшений.

Для логистика главный вопрос заключается в том, как заставить потоки продуктов течь быстрее. Поэтому логистик изучает издержки предприятия, начиная с исходных составляющих и заканчивая моментом, когда потребитель получает товар. Сокращение времени на каждом этапе ведет к снижению издержек и цены продукта.

Цель логистики – обеспечить наличие нужного продукта в нужном месте в нужное время при наименьших издержках. Это достигается сокращением времени выполнения заказа, времени производства, времени транспортировки, контролем над запасами, повышением качества продукции и т. д.

Растущее внимание к экологическим вопросам удаления отходов и масштаб операций, связанных с потенциальным возвратом продукта, привели к созданию обратной логистики. Обратная логистика занимается сбором возвращаемых продуктов, их проверкой, ремонтом, модернизацией и переработкой. После этого продукты могут быть отправлены потребителю или на продажу на вторичном рынке.

Как правило, в книгах по логистике затрагиваются в основном вопросы терминологии и понятийного аппарата т. е. определения, цели, концепции, принципы и т. д. И на этом пути достигнут значительный прогресс. В этом же практикуме мы рассмотрим на простых и понятных примерах методы и алгоритмы логистики.

## **2. ВИДЫ ЗАТРАТ И ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА**

### **2.1. ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА**

Очень важно понимать взаимосвязь между затратами и достигаемыми объемами продаж и прибылью. Любой вводимый ресурс, который используется для производства продукции, называется фактором производства.

*Пример 7.* Земля, здания, оборудование, труд – это примеры факторов производства.

*Задача 7.* Привести примеры факторов производства.

Различают постоянные и переменные факторы производства. Постоянные факторы производства для своего изменения требуют зрительного периода времени. Переменные факторы производства могут быстро изменяться в ответ на изменение спроса.

*Пример 1.* Здания – это пример постоянного фактора производства.

*Задача 1.* Привести примеры постоянных факторов производства.

*Пример 2.* Количество часов, отработанных сотрудниками-почасовиками, – это пример переменного фактора производства.

*Задача 2.* Привести примеры переменных факторов производства.

### **2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАТРАТ**

Каждый фактор производства сопряжен с определенными затратами. Затраты, связанные с постоянными факторами производства, меняются только в долгосрочном плане и не зависят от объема продаж. Затраты, не зависящие от объема продаж, называются постоянными затратами.

*Пример 3.* Затраты на отопление заводоуправления – это постоянные затраты.

*Задача 3.* Привести примеры постоянных затрат.

Независимость постоянных затрат от объема производств следует понимать исключительно в том смысле, что при заданных

общих условиях (например, производственные фонды, списочный состав работников) постоянные затраты не зависят от объема выпуска продукции. При изменении указанных условий (например, при изменениях в производственных фондах, сокращении списочного состава работников) постоянные затраты могут соответственно измениться.

Независимо от того, сколько продукции производится за данный период, постоянные затраты должны быть осуществлены в полном объеме. Поэтому их иногда называют затратами готовности предприятия к производству.

Затраты на использование переменного фактора производства зависят от объема продаж. Это переменные затраты.

Пример 4. Затраты на тару для готовой продукции – это переменные затраты.

Задача 4. Привести примеры переменных затрат.

Понятие постоянности затрат довольно условно. Чем более длительные периоды времени рассматриваются, тем большее количество затрат относят к разряду переменных. Практически любое решение руководства предприятия ведет к увеличению или снижению затрат. Поэтому любые затраты в принципе можно назвать переменными. Следовательно, при разделении затрат на постоянные и переменные нужно проявлять некоторую гибкость.

Существуют затраты, которым присущи черты и постоянных и переменных затрат. Это полупеременные затраты.

Пример 5. Стоимость использования телефона относится к категории переменных затрат, но фиксированная плата попадает под определение постоянных затрат.

Задача 5. Привести примеры полупеременных затрат.

Совокупные затраты – это сумма всех постоянных и переменных затрат для данного достигнутого объема продаж. Предприятие стремится минимизировать свои совокупные затраты. Использование переменных факторов производства придает любому бизнесу гибкость и способность оперативно реагировать на изменение экономических условий и рыночной конъюнктуры.

В краткосрочном периоде количество имеющихся в распоряжении предприятия постоянных факторов производства огра-

ничено. Предприятие может производить продукцию только в пределах этих ограничений. Дальнейший рост предприятия может быть достигнут только за счет дополнительных инвестиций капитала в постоянные факторы производства.

Средние затраты на единицу проданной продукции вычисляются по следующей формуле:

$$\boxed{\text{средние затраты на единицу проданной продукции}} = \boxed{\text{совокупные затраты}} : \boxed{\text{число проданных единиц продукции}}$$

Пример 6. Совокупные затраты равны 100000 руб., число проданных единиц продукции – 5000. Определим средние затраты на единицу проданной продукции.

Средние затраты на единицу проданной продукции (совокупные затраты) / (число проданных единиц продукции) = 100000 / 5000 = 20 руб./единицу.

Задача 6. Совокупные затраты равны 150000руб., число проданных единиц продукции – 6000. Определить средние затраты на единицу проданной продукции.

При открытии нового предприятия объем продаж сначала низок, а средние затраты на единицу проданной продукции относительно высоки. По мере развития и становления предприятия объем продаж увеличивается. Совокупные затраты также увеличиваются. Но изначально постоянные затраты имеют большее значение, так как требуются здания, оборудование и т. д.

Постоянные затраты с течением времени не меняются. Поэтому средние затраты на единицу проданной продукции сокращаются. Это эффект масштаба. Еще одно преимущество эффекта масштаба – это специализация. На крупном предприятии существует разграничение функциональных обязанностей, что приводит к значительной экономии.

Но эффект масштаба имеет и недостатки. Чем крупнее предприятие, тем сложнее им управлять. Рост бюрократического аппарата ведет к росту средних затрат на единицу проданной продукции. Это отрицательный эффект масштаба. В этом случае нужно пересмотреть набор используемых ресурсов.

### **3. ПРОБЛЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА**

Размещение связано с нахождением наилучших географических точек для разных элементов цепи поставок. Решения о размещении очень важны, так как они влияют на показатели деятельности предприятия в течение многих лет. Конечно, удачное место расположения еще не гарантирует успеха в бизнесе, но неудачное практически гарантирует в будущем неудачу. Многие предприятия забывают, что решения по месту расположения носят долгосрочный характер и выбирают места, ориентируясь на краткосрочные выгоды.

При принятии решения о размещении предприятие должно учесть множество факторов. Некоторые из этих факторов (операционные издержки, ставки заработной платы, конкуренты, налоги курсы валют, расстояния до других предприятий, поставщики, численность населения и т. д.) можно оценить. Другие факторы (инфраструктура, политическая ситуация, правовая система, отношение общественности и т. д.) невозможно представить в числовом виде.

В задачах, связанных с размещением производства, требуется из нескольких возможных вариантов размещения производства выбрать наилучшее. Существует ряд очень простых методов решения этих задач. На них мы и остановимся.

#### ***3.1. МЕТОД***

Метод взвешивания в первую очередь учитывает факторы, важные для размещения, но которые не всегда возможно представить в числовом виде. Различие между факторами отражается в начислении баллов. Именно так обстоит дело с отелями: невозможно измерить качество услуг отеля.

Составляется список факторов, влияющих на размещение производства. Для определения относительной значимости этих факторов в деятельности компании каждому фактору приписывается вес  $M$  – число из отрезка  $[0, 1]$ . Сумма всех весов должна равняться единице;

Выбирается шкала для измерения каждого фактора (например, от 1 до 10 или от 1 до 100 очков). Для каждого возможного варианта размещения производства нужно оценить все факторы по принятой шкале измерения, умножим оценки факторов на соответствующие веса и суммируем полученные числа для каждого возможного варианта размещения производства. Вариант с наибольшей суммой является наилучшим. Изменяя оценки, или веса факторов, можно исследовать устойчивость полученного решения, а также степень влияния факторов на конечный результат. Те факторы, которые практически не влияют на решение, можно исключить из рассмотрения и использовать в процессе качественного анализа при принятии решений.

Пример 7. Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Существуют три возможных района строительства А, В, С. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	А	В	С
Доступность для пациентов	0.5	10	8	7
Арендная плата	0.3	5	4	6
Удобство для персонала	0.2	3	6	5

Дадим рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания.

Заполним таблицу.

Фактор	Вес	А	В	С	Вес А	Вес В	Вес С
Доступность для пациентов	0.5	10	8	7	5	4	3.5
Арендная плата	0.3	5	4	6	1.5	1.2	1.8
Удобство для персонала	0.2	3	6	5	0.6	1.2	1
	1				7.1	6.4	6.3

Поясним, как заполняется таблица. Числа 2-го столбца умножаем на числа 3-го (4-го) столбца соответственно и результат пишем в 6-м (7-м) столбце. 8-й столбец равен произведению 2-го и 5-го столбцов.

В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца. Вариант с наибольшей суммой (7,1) – это строительство поликлиники в районе А.

Задача 7. Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Существуют три возможных района строительства: А, В, С. Все данные отражены в таблице.

Фактор	Вес	А	В	С
Доступность для пациентов	0.45	5	7	9
Арендная плата	0.35	5	3	4
Удобство для персонала	0.2	4	8	6

Дать рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания.

### ***3.2. МЕТОД РАЗМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ***

Этот метод основан на анализе затрат и объемов выпуска. Для каждого варианта определяются постоянные и переменные затраты. Выбирается вариант размещения с наименьшими совокупными затратами для определенного объема производства.

Пример 8. Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: А, В, С. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны 20000, 5000 и 80000 руб. соответственно, а переменные затраты – 65, 45 и 30 руб. за единицу продукции соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска – 5000 единиц. Определим место строительства с учетом полных затрат.

Найдем совокупные затраты для каждого города:

$$20000 + 65 \cdot 5000 = 345\ 000 \text{ руб/год (А)}$$

$$50000 + 45 \cdot 5000 = 275\ 000 \text{ руб/год (В)}$$

$$80000 + 30 \cdot 5000 = 230\ 000 \text{ руб/год (С)}$$

Наилучший вариант – это город С, так как там минимальные совокупные затраты при ожидаемом годовом объеме выпуска 5000 единиц.

Разумеется, при принятии решений эти данные следует рассматривать только в качестве стартовых. Предприятие должно провести более подробный анализ затрат, долгосрочных планов, своих целей и рассмотреть другие значимые факторы.

Задача 8. Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: А, В, С. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны 25000, 45000 и 70000 руб. соответственно, а переменные затраты 55, 40 и 35 руб. за единицу продукции соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска – 8000 единиц. Определить место строительства с учетом полных затрат.

### 3.3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ МЕТОД

Этот метод может служить, например, для определения расположения единственного торгового дома, обслуживающего несколько магазинов. Изобразим эти магазины на координатной плоскости Оху. Пусть  $(x_i, y_i)$  координаты  $i$ -го магазина,  $w_i$  – объем поставляемой в  $i$ -й магазин продукции ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда торговый дом нужно разместить в центре гравитации – точке с координатами  $(C_x, C_y)$ ,

$$\text{где } C_x = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad C_y = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Пример 9. Предполагается создать центральный узел связи для обслуживания почтовых отделений А, В, С, D

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
А	(9, 6)	3
В	(7, 8)	4
С	(1, 5)	5
Д	(2, 10)	2

Задача 9. Предполагается создать центральный узел связи для обслуживания почтовых отделений А, В, С, D.

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
А	(7, 9)	3
В	(10, 4)	1
С	(2, 5)	2
Д	(8, 6)	4

Определить координаты центра гравитации для размещения центрального узла связи.

Замечание. Проблема заключается в том, что место размещения, выбранное с помощью гравитационного метода, может оказаться непрактичным (например, выбранное место может оказаться на вершине горы или в море). Это один из недостатков гравитационного метода. Поэтому сначала нужно определить доступные места размещения, а затем с помощью методов взвешивания, размещения с учетом полных затрат или калькуляции затрат выбрать наилучший вариант.

### **3.4. МЕТОД КАЛЬКУЛЯЦИИ ЗАТРАТ**

В этой главе уже был рассмотрен метод размещения с учетом полных затрат. На практике многие расходы предприятия фиксированы и не зависят от его расположения. В связи с этим при выборе места размещения можно ограничиться рассмотрением лишь общих переменных издержек.

В методе калькуляции затрат принимаются во внимание только затраты на перевозку. Этот метод может служить, например, для выбора расположения единственного торгового дома, обслуживающего несколько магазинов.

Изобразим эти магазины на координатной плоскости Оху. Пусть  $(x_i, y_i)$  – координаты  $i$ -го магазина,  $w_i$  – число ежедневных поставок в  $i$ -й магазин продукции ( $i=1, \dots, n$ ),  $(x_j^0, y_j^0)$  – координаты  $j$ -го возможного расположения торгового дома ( $j=1, \dots, m$ ).

Предпочтение отдается тому  $j$ -му возможному варианту, для которого сумма  $\sum w_i(|x_i - x_j^0| + |y_i - y_j^0|)$  будет минимальной.

Пример 10. В примере 9 выберем расположение центрального узла связи из двух возможных вариантов: (6, 8) и (4, 7). Заполним таблицу для варианта (6, 8).

Почтовое отделение	$x_i$	$y_i$	$w_i$	$ x_i-6 $	$ y_i-8 $	$ x_i-6  +  y_i-8 $	$( x_i-6  +  y_i-8 )w_i$
А	9	6	3	3	2	5	15
В	7	8	4	1	0	1	4
С	1	5	5	5	3	8	40
Д	2	10	2	4	2	6	12
Сумма							71

Поясним, как заполняется таблица. Значения первых четырех столбцов взяты из условия. Из каждого числа 2-го (3-го) столбца вычитаем  $x_1^0 = 6$  ( $y_1^0 = 8$ ) и модуль полученного числа пишем в 5-м (6-м) столбце. 7-й столбец равен сумме 5-го и 6-го столбцов. 8-й столбец – это произведение 4-го и 7-го столбцов. В последней строке указана сумма чисел последнего столбца.

Аналогично заполняем таблицу для возможного варианта (4, 7).

Почтовое отделение	$x_i$	$y_i$	$w_i$	$ x_i-4 $	$ y_i-7 $	$ x_i-4  +  y_i-7 $	$( x_i-4  +  y_i-7 )w_i$
А	9	6	3	5	1	6	18
В	7	8	4	3	1	4	16
С	1	5	5	3	2	5	25
Д	2	10	2	2	3	5	10
Сумма							69

Так как  $69 < 71$ , то наилучший вариант – это (4, 7).

На практике, конечно, прежде чем принять подобное решение, приходится учитывать и множество других факторов.

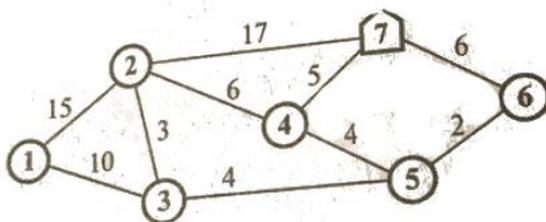
Задача 10. В задаче 9 выбрать расположение центрального узла связи из двух возможных вариантов: (5,7) и (6,4).

## 4. НАХОЖДЕНИЕ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ

### МЕТОД ПРИСВОЕНИЯ МЕТОК

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой-то выделенной вершины до любой другой вершины.

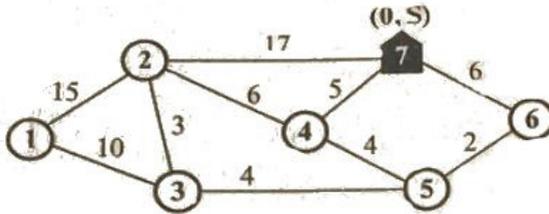
Пример 11. Узел 7 – склад, остальные узлы – строительные площадки компании. Показатели на дугах – расстояния в километрах.



Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки. Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 1? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 1 через строительную площадку 2? Какова длина кратчайшего пути от склада до строительной площадки 2? Проходит ли кратчайший путь от склада к строительной площадке 2 через строительную площадку 4?

Решим эту задачу методом присвоения меток. Каждому узлу присваиваем метку из двух чисел. Первое число – это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе – номер предыдущего узла на пути от узла 7 к данному узлу. Узел, для которого определили путь от узла 7, назовем помеченным. Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем непомеченным. Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем постоянной и будем обозначать в круглых скобках. Все остальные метки назовем временными и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрасивать.

Итак, 7 узлу присваиваем метку  $(0, S)$ , где 0 – это расстояние от узла 7, S – обозначение стартового узла.



Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер – 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки –  $[17, 7]$ ,  $[5, 7]$ ,  $[6, 7]$  соответственно (первое число – длина пути от узла 7 до заданного узла, а второе – это предшествующий узел). После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

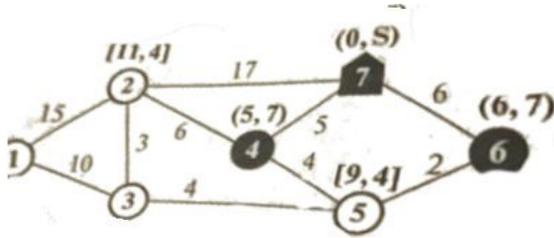
- 1) найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку (метки) сделать постоянной;
- 2) узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка  $(5, 7)$  узла 4. Поэтому следующий шаг мы начнем с узла 4.

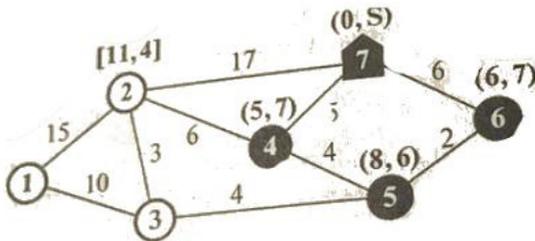
Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4–5 равна 4, метка узла 4 –  $(5, 7) \Rightarrow$  временная метка узла 5 равна  $[5+4, 4]$

$[9, 4]$ . Длина ребра 4–2 равна 6, метка узла 4 –  $(5, 7) \Rightarrow$  временная метка узла 2 равна  $[5+6, 4] = [11, 4]$ . Таким образом, мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11. Узел 2 пока помечен меткой  $[17, 7]$  (путь длины 17), но  $11 < 17 \Rightarrow$ . Старую метку  $[17, 7]$  узла 2 мы меняем на новую временную метку

$[11, 4]$ , где 11 – это длина пути от узла 7 до узла 2, а 4 – номер предшествующего узла. После этого из всех временных меток  $[11, 4]$ ,  $[9, 4]$ ,  $[6, 7]$  выбираем метку с наименьшим первым числом. Это  $[6, 7]$ . Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла, соответствующего этой метке, – узла 6.

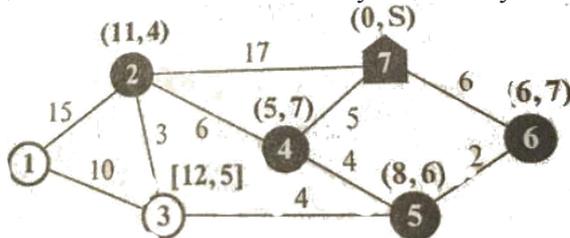


Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6–5 равна 2, метка –5 равна  $[6+2, 6]$   $[8, 6]$ . Но узел 5 уже помечен меткой  $[9, 4]$ . Так как  $8 < 9$ , то узлу 5 припишем новую метку  $[8, 6]$ . После этого из всех временных меток  $[11, 4]$  и  $[8, 6]$  метку с наименьшим первым числом  $(8, 6)$  объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла.



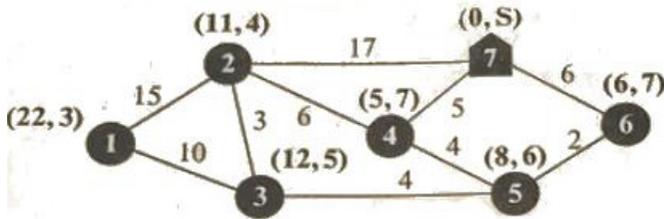
Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки – узлом 3. Длина ребра 5–3 равна 4, метка узла 5 –  $(8, 6) \Rightarrow$  временная метка узла 3 равна  $[8+4, 5]$

$[12, 5]$ . Теперь из всех временных меток  $[11, 4]$  и  $[12, 5]$  метку с наименьшим первым числом  $[11, 4]$  объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла. 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2–1 равна 15, метка узла 2 –  $(11, 4) \Rightarrow$  узлу 1 припишем

временную метку  $[11 + 15, 2] = [26, 2]$ . Длина ребра 2–3 равна 3, метка узла 2 –  $(11, 4) \Rightarrow$  мы могли бы пометить узел 3 меткой  $[11 + 3, 2] = [14, 2]$ , но узел 3 уже помечен меткой  $[12, 5]$  с меньшим первым числом, так что метку узла 3 не меняем. Теперь из временных меток  $[26, 2]$  и  $[12, 5]$  метка с наименьшим первым числом становится постоянной  $(12, 5)$ , а с соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла 1 меняем на  $(12 + 10, 3) = (22, 3)$ . Всем узлам приписаны постоянные метки. Действие алгоритма прекращается.



Первое число метки у каждой вершины – это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер – это второе число метки). И т. д. до вершины 7.

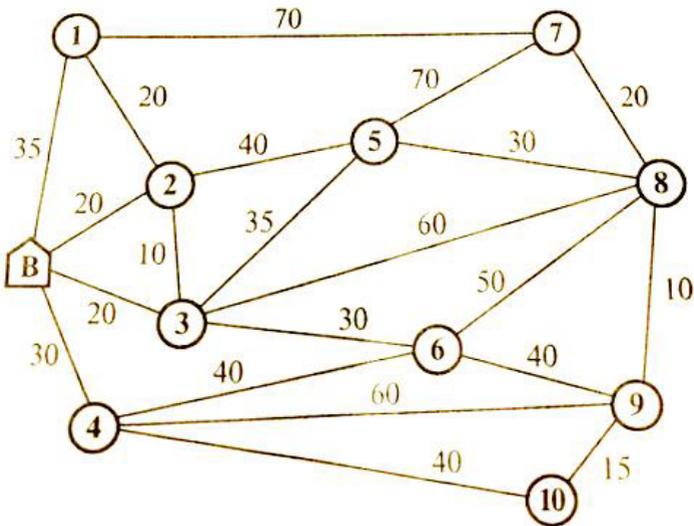
Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 –  $(22, 3) \Rightarrow$  длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел

Метка узла 3 –  $(12, 5) \Rightarrow$  идем в узел 5. Метка узла 5 –  $(8, 6) \Rightarrow$  идем в узел

Метка узла 6 –  $(6, 7) \Rightarrow$  идем в узел 7, то есть кратчайший путь 1–3–5–6–7. Он не проходит через узел 2. Ответы на два других вопроса оставляем читателю в качестве упражнения.

Задача 11. Компания грузовых перевозок осуществляет услуги по перевозке грузов между Воронежем (В) и райцентрами. Если компания получает заказ на обслуживание, она как можно быстрее посылает грузовик в райцентр, из которого поступил заказ. Так как существенны быстрое обслуживание и минимальные транспортные затраты, большое значение приобретает то, что грузовик проследует из Воронежа в соответствующий райцентр

по наиболее короткому маршруту. Сеть, представленная на рисунке, отображает сеть дорог. Расстояния указаны в километрах.



Найти кратчайшие маршруты от Воронежа до всех 10 райцентров. Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 10? Какова длина кратчайшего пути от Воронежа до райцентра 8? Проходит ли кратчайший путь от Воронежа до райцентра 9 через райцентр 6?

Задача 12. Предложите алгоритм действий при наличии в сети нескольких равных постоянных меток.

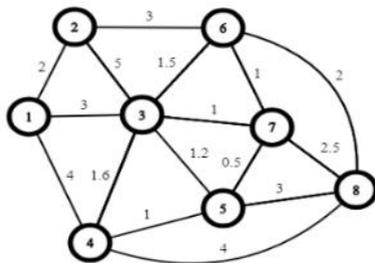
## 5. ПОСТРОЕНИЕ КОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Коммуникационная сеть минимальной длины (или дерево кратчайших расстояний) — это совокупность дуг сети, имеющая минимальную суммарную длину и обеспечивающая достижение всех узлов сети, то есть возможность попасть из любого узла в любой другой узел. Алгоритм построения:

1. Начать с любого узла и соединить его с ближайшим узлом. Считаем, что это связанные узлы, а все другие узлы — несвязанные;

2. Определить несвязанный узел, ближайший к одному из связанных узлов. Если таких «ближайших» узлов несколько, то выбрать любой. Добавить этот узел к связанным. И т. д. до тех пор, пока есть несвязанные узлы.

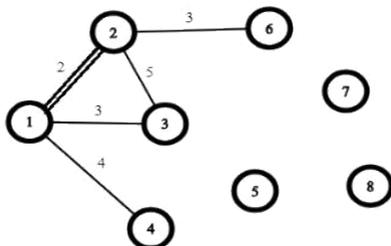
Пример 12. Университет устанавливает компьютерную систему электронной почты, которая позволит передавать сообщение между деканами восьми факультетов. Сеть возможных электронных связей между деканатами показана ниже.



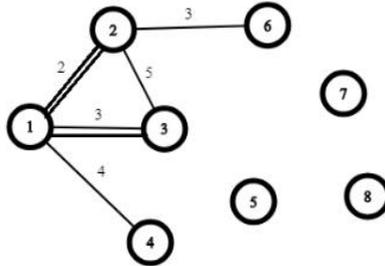
Протяженность коммуникаций в километрах отмечена на дугах. Предложим проект системы связи, которая позволит всем восьми деканам обеспечить доступ к системе электронной почты. Решение должно обеспечить минимальную возможную общую длину коммуникаций.

Начнем с узла 1. Ближайший к нему узел – это узел 2 на расстоянии 2.

Считаем, что узлы 1, 2 – связанные, и отметим это двойной чертой.

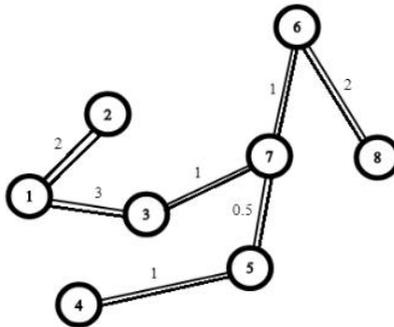


Ближайшие несвязанные узлы к одному из связанных узлов 1 и 2 – это узлы 3 и 6. Выбираем любой из них, например узел 3. Ребро 1–3 отметим двойной чертой и считаем узлы 1, 2, 3 связанными.



Далее ищем ближайший несвязанный узел к узлам 1, 2, 3. И т. д. В результате получим минимальное дерево.

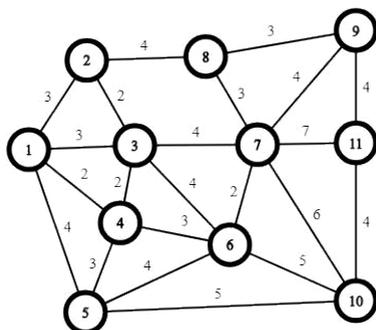
Его длина равна сумме расстояний на дугах:  $2 + 3 + 1 + 1 + 0,5 + 1 + 2 = 10,5$  (км).



Задача 13. Фирма получила заказ на прокладку кабеля для кабельного телевидения. Узлы сети, приводимой ниже, отражают точки, к которым должна быть проложена кабельная сеть.

Дуги сети показывают количество километров между точками подвода кабеля. Предложить решение, которое позволит обеспечить доступ кабельной сети ко всем точкам, но при этом общая протяженность кабельных линий будет минимально возможной.

## 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА



Рассматривается сеть с одним узлом входа (источник) и одним узлом выхода (сток). Какова максимальная величина потока (количество машин, сообщений, жидкости и т. д.), который может войти в сетевую систему и выйти из нее в заданный период времени? Мы предполагаем, что поток, вытекающий из узла, равен потоку, втекающему в узел.

Под пропускной способностью (или мощностью) дуги будем понимать верхнее ограничение на поток в этой дуге. Понятно, что автомобильные трассы ограничивают число автомобилей в транспортной системе, величина трубопроводов ограничивает количество нефти в системе ее распределения. Мощность потока может зависеть от его направления. Условное изображение в сети



означает, что мощность потока от узла 1 к узлу 2 равна 6, а мощность потока от узла 2 к узлу 1 равна 0, то есть это – «улица с односторонним движением». Условное же изображение



означает, что мощность потока в каждом направлении равна 2.

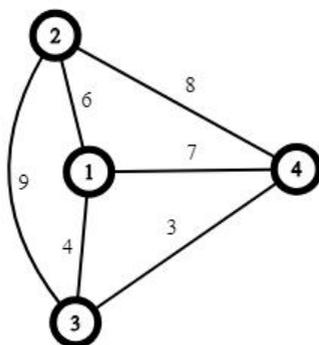
Алгоритм определения максимального потока.

## 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕДИНОГО СРЕДНЕГО В СЕТИ

Сеть городов связана друг с другом дорогами. В каждом городе существует спрос на какие-то виды продукции. Требуется определить место расположения склада в одном из этих городов. В качестве показателя оптимизации выбирается среднее расстояние или время поездки. Это задача единого среднего.

Рассмотрим решение задачи единого среднего на следующем примере.

Пример 13. Для схемы городов решим задачу единого среднего.



Масса грузов, которые необходимо перевезти, указана в таблице.

Пункт	1	2	3	4
Груз (т)	5	6	9	7

Сначала расположим склад в вершине 1 и с помощью метода присвоения меток (см. 4) определим длины кратчайших путей до остальных вершин (см. 3-й столбец следующей таблицы). Затем расположим склад в вершине 2 и с помощью метода присвоения меток определим длины кратчайших путей до остальных вершин (см. 4-й столбец следующей таблицы). И т. д. Заполним таблицу.

Пункт	Груз	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Склад 4	Груз* (Склад 1)	Груз* (Склад 2)	Груз* (Склад 3)	Груз* (Склад 4)
1	5	0	6	4	7	0	30	20	35
2	6	6	0	9	8	36	0	54	48
3	9	4	9	0	3	36	81	0	27
4	7	7	8	3	0	49	56	21	0
		Сумма				121	167	95	110

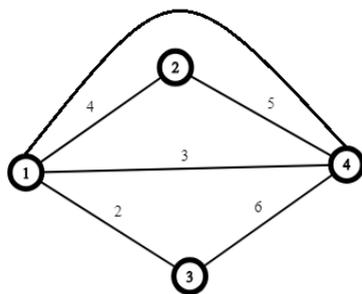
Поясним, как заполняется таблица.

Числа второго столбца взяты из условия. Числа третьего–шестого столбцов получены с помощью метода присвоения меток. Каждое число третьего–шестого столбцов умножаем на соответствующее число второго столбца и результат пишем в седьмом–десятом столбцах соответственно. В последней строке указана сумма чисел соответствующего столбца.

Определим минимум в последней строке. Это 95. Поэтому склад нужно разместить в пункте 3.

Задача 14. Для схемы городов решить задачу единого среднего.

7



Масса грузов, которые необходимо перевезти, указана в таблице.

Пункт	1	2	3	4
Груз, т	8	9	7	6

## 8. ПРОБЛЕМА ОХВАТА

Иногда среднее расстояние или время поездки до предприятия менее важны, чем максимальное время обслуживания. Например, пожарные службы стараются отреагировать на чрезвычайную ситуацию за максимально короткое время. Это пример задачи охвата.

Мы рассмотрим вариант задачи охвата, в котором нужно определить единственное размещение, имеющее самое низкое значение максимального времени, необходимого для поездки в другой город.

Пример 14. Решим задачу охвата для схемы из примера 23. Заполним таблицу.

Пункт	Склад	Склад	Склад	Склад
	1	2	3	4
1	0	6	4	7
2	6	0	9	8
3	4	9	0	3
4	7	8	3	0
Максимум	7	9	9	8

Поясним, как заполняется таблица. Все числа (кроме последней строки) взяты из решения примера 14. В последней строке указаны максимумы соответствующих столбцов.

Определим минимум в последней строке – это 7. Поэтому склад нужно разместить в пункте 1.

### Задачи для контрольных работ по курсу «Математические методы в логистике»

1–10.

На изготовление первой единицы продукции  $Y_1$  ч. Уровень обучения –  $L$  %. Определить, сколько времени требуется на изготовление  $k$ -й единицы продукции.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y_i$	11	19	12	17	9	10	15	8	13	14
$L$	75	90	95	72	88	92	82	94	71	73
$k$	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6

11–20.

На изготовление  $m$ -й единицы продукции –  $Y_m$  ч. Уровень обучения –  $L$  %. Определить, сколько времени требуется на изготовление  $n$ -й единицы продукции.

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$m$	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6
$L$	75	90	95	72	88	92	82	94	71	7
$n$	7	12	8	11	10	9	13	10	14	13
$Y_m$	11	19	12	17	9	10	15	8	13	14

21–30.

На изготовление  $m$ -й и  $n$ -й единицы продукции –  $Y_m$  мин и  $Y_n$  мин соответственно. Определить уровень обучения.

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$m$	3	9	4	8	6	3	9	4	8	6
$Y_m$	75	90	95	72	88	92	82	94	71	73
$n$	7	12	8	11	10	9	13	10	14	13
$Y_n$	61	79	72	57	69	70	65	78	53	54

31–40.

Рассматривается вопрос о строительстве поликлиники. Три возможных района строительства: А; В; С.

Все данные отображены в таблице.

Фактор	Вес	А	В	С
Доступность для пациентов	d	g	h	k
Арендная плата	e	m	n	p
Удобство персонала	f	q	r	s

Дать рекомендации о месте строительства, используя метод взвешивания.

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
d	0,3	0,25	0,15	0,2	0,25	0,3	0,15	0,5	0,45	0,4
e	0,3	0,35	0,5	0,4	0,45	0,35	0,4	0,25	0,3	0,4
f	0,4	0,4	0,35	0,4	0,3	0,35	0,45	0,25	0,25	0,2
g	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
h	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
k	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
m	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
n	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
p	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
q	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
r	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
s	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8

41–50.

Рассматривается вопрос о строительстве завода в одном из трех городов: А; В; С. Исследование показало, что постоянные затраты (за год) в этих городах равны  $d$ ;  $e$  и  $f$  рублей соответственно, а переменные затраты –  $g$ ;  $h$  и  $k$  рублей/единицу соответственно. Ожидаемый годовой объем выпуска –  $m$  единиц. Определить место строительства с учетом полных затрат.

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
d	30000	55000	75000	70000	60000	90000	80000	90000	85000	72000
e	50000	35000	25000	50000	80000	70000	60000	60000	65000	62000
f	60000	45000	55000	30000	40000	50000	45000	70000	55000	42000
g	70	60	45	40	65	35	40	20	15	20
h	40	80	80	55	45	55	50	65	35	35
k	20	75	55	70	80	70	75	40	50	50
m	5000	5500	7500	7000	8000	9000	8000	9000	8500	7200

51–60.

а) Предполагается создать новое отделение для обслуживания почтовых отделений А; В; С; D.

Почтовое отделение	Координаты	Число поездок почтового фургона в день
A	(d; e)	f
B	(g; h)	k
C	(m; n)	p
D	(q; r)	s

б) Выбрать расположение нового почтового отделения из двух возможных вариантов: (a; b) и (c; t).

в) Определить с помощью эвристического метода Ардолана место расположения двух поликлиник для обслуживания жителей пунктов В; С; D; Е с наименьшими затратами на преодоление расстояний. В таблице указаны расстояния между пунктами, население пунктов (тыс. чел.) и относительная важность обслуживания.

Пункт	Расстояние до поликлиники в пункте				Население пункта (тыс. чел.)	Относительная важность обслуживания
	В	С	D	Е		
В	0	d	e	f	m	0,8
С	d	0	g	h	n	0,9
D	e	g	0	k	p	1,2
Е	f	h	k	0	q	1,1

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
d	1	9	7	3	2	5	3	3	7	6
e	5	2	1	3	5	8	6	3	4	6
f	7	3	5	4	8	7	6	8	9	5
g	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
h	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
k	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
m	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
n	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
p	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
q	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
r	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
s	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8
a	5	4	8	7	6	1	9	7	3	2
b	9	2	3	4	6	5	4	8	7	6
c	4	1	4	3	1	7	7	7	8	6
t	8	7	6	8	9	5	3	7	9	4

61–70.

а). Годовой спрос – D единицы, стоимость подачи заказа –  $C_0$  рублей/заказ, закупочная цена – С рублей/единицу, годовая стоимость хранения одной единицы составляет а % ее цены. Вре-

мя доставки 6 дней, рабочих дней – 1 год. Найти оптимальный размер заказа, издержки, уровень повторного заказа, число циклов за год, расстояние между циклами. Можно получить скидку  $b\%$  у поставщиков, если размер заказа будет не меньше  $d$  единиц. Стоит ли пользоваться скидкой? Годовая стоимость отсутствия запасов –  $C_b$  рублей/единицу. Сравнить 2 модели: основную и с дефицитом (заявки выполняются).

б). Годовой спрос –  $D$  единицы, стоимость организации производственного цикла –  $C_s$  рублей, издержки хранения одной единицы –  $C_h$  рублей/год. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

в) Темп производства –  $P$  единицы/день, темп использования –  $D$  единиц/день. Годовые издержки хранения –  $C_h$  рублей/единицу. Стоимость организации производственного цикла –  $C_s$  рублей. Найти экономичный размер партии, издержки, число циклов за год, расстояние между циклами.

г) Годовой спрос –  $D$  единиц за 300 рабочих дней, стоимость подачи заказов –  $C_0$  рублей/заказ, издержки хранения одной единицы –  $C_h$  рублей/год. Годовая стоимость отсутствия запасов  $C_b$  рублей/единицу. Время поставки 4 дня.

Спрос на товар в течение поставки, шт.	0	1	2	3	4	5	6
Частота	f	g	h	k	m	n	q

Сколько единиц нужно заказывать и когда, если цель – минимизировать общую стоимость запасов?

	D	$c_0$	C	a	b	d	$c_b$	$c_s$	$c_k$
61	400	50	50	20	3	80	10	350	18
62	500	50	40	25	5	70	15	360	19
63	600	70	60	20	6	80	15	370	16
64	700	80	70	25	7	80	10	380	17
65	450	90	80	30	8	60	20	362	15
66	550	45	85	20	9	70	10	375	18
67	650	55	75	25	2	70	20	365	19
68	750	65	55	30	4	90	15	356	16
69	800	75	65	25	2	100	20	385	17
70	900	95	45	30	7	125	20	390	15

	P	f	g	h	k	m	n	q
61	1180	3	5	4	6	4	7	8
62	1230	4	2	6	8	7	8	9
63	1370	6	3	5	7	6	9	6
64	1440	5	4	7	5	5	4	7
65	1090	7	5	5	6	4	3	5
66	1970	5	4	6	8	6	7	8
67	1870	6	3	8	7	8	4	8
68	1770	4	5	7	7	5	9	6
69	1620	3	6	5	9	7	4	7
70	1580	2	2	6	8	5	3	5

71–80.

Известно количество машин, приезжающих на мойку автомашин в течение последних 100 часов.

Число машин в час	Частота
4	10
5	12
6	15
7	23
8	40

Используя случайные числа, смоделировать прибытие автомашин в течение 10 часов.

	Случайные числа									
71	67	60	77	49	76	95	51	16	14	85
72	57	17	36	72	85	31	44	30	26	09
73	84	55	25	71	34	57	50	44	95	64
74	00	59	09	97	69	98	93	49	51	92
75	32	73	41	38	73	01	09	64	34	55
76	35	90	92	94	25	57	34	30	90	01
77	91	85	87	90	21	90	89	29	40	85
78	76	74	90	95	29	72	17	55	15	36
79	37	60	79	21	85	71	48	39	31	35
80	99	29	27	75	89	78	68	64	62	30

81–90. Дать прогноз объема продаж на следующие три дня.

	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс			пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
81	1	3	2	9	2	8	5		86	8	3	5	4	3	9	2
	3	3	1	6	4	10	3			9	7	8	8	5	4	6
82	3	4	2	6	7	12	5		87	2	6	4	6	7	9	10
	1	3	2	7	3	6	9			2	5	1	7	5	11	15
83	9	4	7	5	4	2	3		88	15	5	8	6	3	8	4
	13	6	8	6	7	5	2			10	6	9	6	5	6	6
84	1	5	3	5	4	10	5		89	1	3	4	7	3	6	9
	2	3	2	7	5	9	4			2	3	1	7	2	9	10
85	1	5	2	6	2	9	8		90	1	4	2	5	5	11	17
	1	4	3	7	7	11	6			2	7	9	6	4	9	7

91–100. В таблице указан объем продаж (тыс. руб) за последние 10 недель.

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Объем продаж	4	5	5	6	9	9	8	10	11	13

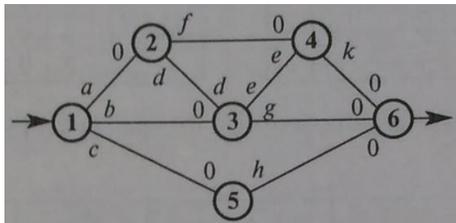
Дать прогноз объема продаж на 11-ю неделю методами простого экспоненциального сглаживания и экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Прогноз объема продаж на 1-ю неделю равен  $F_1; T_1 = 0$ . Определить трекинг-сигналы по результатам первых шести кварталов. Границы контроля равны 4. Нужно ли менять константу сглаживания?

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
	0,7	0,8	0,9	0,75	0,85	0,4	0,6	0,3	0,2	0,65
b	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3
$F_1$	3	2	2	3	2	3	4	2	2	3

101–110.

a). Для матрицы

$\infty$  a b c d  
 $\infty$  e f g h  
k m  $\infty$  n p  
q r s  $\infty$  t  
x y z w  $\infty$



Методом ветвей и границ решить задачу коммивояжера;

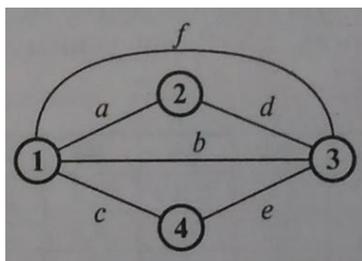
б). Найти кратчайший путь от вершины 1 до любой другой вершины;

в). Построить коммуникационную сеть минимальной длины в пункте б);

г). Чему равен поток между пунктами 1 и 6?

д). В таблице указана масса грузов, которые необходимо перевезти. Решить задачу единого среднего.

Пункт	1	2	3	4
Груз	a	b	c	d



е). Для схемы пункта д) решить задачу охвата;

ж). Работы, обозначенные буквами в порядке их поступления, ожидают своего выполнения. Время выполнения работ и дата их завершения относительно момента расчета указаны в таблице.

Определить порядок выполнения

Работа	Время выполнения, дни	Срок завершения, дни
A	e	k
B	f	m
C	g	n
D	h	p

работ и показатели эффективности полученного расписания с помощью правил:

- 1) «первым пришел, первым обслужен»;
- 2) кратчайшего времени выполнения;
- 3) ранних по дате исполнения;
- 4) наиболее продолжительного времени выполнения.

	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
a	9	8	5	2	1	7	7	6	7	1
b	4	9	5	6	8	7	1	6	7	2
c	2	1	4	9	5	5	8	6	9	7
d	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
e	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
f	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
g	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
h	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1
m	3	7	4	6	7	7	8	1	8	4
n	7	4	6	1	8	8	6	8	5	4
p	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
q	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
r	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
s	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
t	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
x	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
y	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5
z	7	5	3	7	9	4	4	1	9	2
w	6	5	4	1	4	3	1	7	5	8

111–120. Случайная величина  $X$  распределена по показательному закону, ее плотность распределения вероятностей имеет вид  $f(x) = a e^{-ax}$ , если  $x > 0$  или  $x = 0$ , и  $f(x) = 0$ , если  $x < 0$ .

Найти математическое ожидание, стандартное отклонение, дисперсию.

	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
a	9	8	6	3	4	7	10	13	14	11

121–130. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 минуту, равно  $a$ . Найти вероятность того, что за  $t = b$  минут придут:

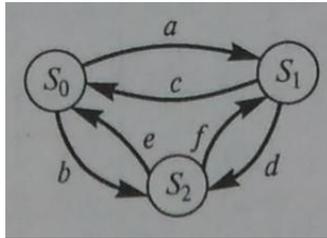
- с самолетов;
- не менее трех самолетов.

Поток предполагается простейшим.

	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
a	9	8	5	4	6	7	8	6	4	5
b	4	9	5	6	8	7	5	6	7	2
c	2	7	4	9	5	5	8	6	9	7

131–140.

Найти предельные вероятности для следующей системы:

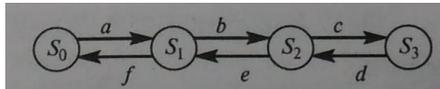


Оценить среднюю эффективность системы, если в состояниях  $S_0$ ;  $S_1$  и  $S_2$  система приносит  $g$ ;  $h$  и  $k$  денежных средств соответственно.

	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
a	9	8	5	2	1	7	7	6	7	1
b	4	9	5	6	8	7	1	6	7	2
c	2	1	4	9	5	5	8	6	9	7
d	9	3	4	3	3	1	1	8	3	4
e	5	5	4	3	1	8	9	8	8	2
f	7	7	3	2	5	7	2	5	6	8
g	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
h	3	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	5

141–150.

Найти предельные вероятности для процесса гибели размножения, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид:



	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
a	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
b	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
c	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
d	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2
e	4	1	5	9	5	6	6	1	8	7
f	4	3	9	2	4	2	3	1	9	5

151–160.

а) Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью  $\lambda$  звонков/ч. Время обслуживания заявки есть величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора –  $t_{\text{обсл}}$  мин. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить абсолютную и относительную пропускные способности, вероятность отказа.

б) Трехканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда все  $n = 3$  линии заняты, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью  $\lambda$  звонков/ч. Время обслуживания заявки есть величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора –  $t_{\text{обсл}}$  мин. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить абсолютную и относительную пропускные способности; вероятность отказа; вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; среднее число свободных от обслуживания каналов; коэффициент простоя каналов; среднее число занятых обслуживанием каналов; коэффициент загрузки каналов.

	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
$\lambda$	10	40	20	30	70	75	20	90	70	30
$t_{\text{обсл}}$	6	7	7	7	8	6	5	4	3	2

161–170.

а) Маленький магазин с одним продавцом. Предполагается, что простейший поток покупателей поступает с интенсивностью  $\lambda$  человек/ч. Время обслуживания заявки есть величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  человек/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить среднее время пребывания покупателя в очереди; среднюю длину очереди; среднее время пребывания покупателя в магазине; вероятность того, что в магазине не окажется покупателей; вероятность того, что в магазине ровно 4 покупателя.

б) Ответить на вопросы пункта а) при условии, что в магазине теперь  $n = 2$  продавца.

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
$\lambda$	11	14	9	12	7	5	8	7	10	13
$\mu$	16	17	15	19	10	8	14	15	13	18

171–180.

На склад разгрузки поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью  $\lambda$  грузовиков/ч. Разгрузка одного грузовика занимает  $t_{\text{обсл}}$  мин. Найти показатели эффективности работы этой одноканальной СМО с фиксированным временем обслуживания: среднее число грузовиков в очереди, среднее время пребывания грузовика в очереди, среднее число грузовиков на складе, среднее время пребывания грузовика на складе.

	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
$\lambda$	10	9	7	5	12	15	11	8	4	14
$t_{\text{обсл}}$	5	6	9	10	8	2	5	4	13	3

181–190.

Автозаправочная станция имеет  $n = 1$  бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более  $m$  автомашин одновременно. Если в очереди находятся  $m$  автомашин, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает с интенсивностью  $\lambda$  автомашин/ч.

Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  автомашин/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что обслуживающий канал свободен; вероятность того, что в очереди  $k$  заявок; вероятность отказа; абсолютную и относительную пропускные способности; среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе.

	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
$k$	1	2	2	1	2	3	1	2	2	2
$m$	2	3	4	2	3	4	2	3	4	3
$\lambda$	11	14	9	12	7	5	8	7	10	13
$\mu$	16	17	15	19	10	8	14	15	13	1

191–200.

Автозаправочная станция имеет  $n$  бензоколонок с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более  $m$  автомашин одновременно. Если в очереди находятся  $m$  автомашин, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает с интенсивностью  $\lambda$  автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  автомашин/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны; вероятность того, что в очереди  $k$  заявок; вероятность отказа; абсолютную и относительную пропускные способности; среднее число свободных от обслуживания каналов; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок под обслуживанием; среднее число заявок в системе; среднее время пребывания заявки в системе.

	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
k	1	2	3	1	2	2	1	2	2	2
m	3	2	3	3	2	2	3	2	3	2
n	2	3	4	2	3	4	2	3	4	3
$\lambda$	31	24	19	22	17	15	18	17	20	23
$\mu$	16	17	15	19	10	8	14	15	13	18

201–210.

Бригада ремонтников из  $n$  человек обслуживает  $m$  станков. Предполагается, что поломки станков образуют простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$  раз/ч. Время ремонта каждого станка есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  раз/ч. Изобразить размеченный граф состояний, найти предельные вероятности состояний. Определить показатели эффективности работы этой СМО: вероятность того, что все ремонтники свободны; среднее число заявок в очереди; среднее число заявок в системе; среднее число свободных от обслуживания ремонтников.

	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
n	3	2	3	4	2	2	3	2	3	2
m	4	5	6	5	6	7	7	3	6	6
$\lambda$	0,3	0,4	0,4	0,15	0,25	0,6	0,7	0,35	0,45	0,8
$\mu$	0,5	0,6	0,7	0,2	0,3	0,7	0,8	0,5	0,6	0,9

211–220.

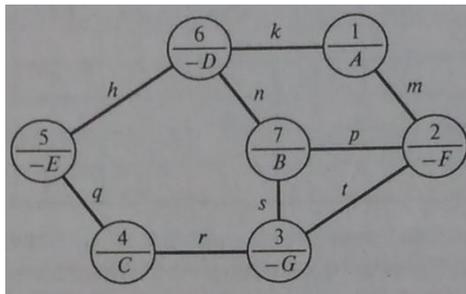
В пункте химчистки имеется  $n$  аппаратов для чистки. Поток посетителей предполагается простейшим с интенсивностью  $\lambda$  человек/ч. Время обслуживания каждого посетителя есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром  $\mu$  человек/ч. Среднее число посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, равно  $\nu$  человек/ч. Изобразить размеченный граф состояний этой СМО, определить предельные вероятности, среднее длину очереди, среднее число заявок в системе,

абсолютную и относительную пропускные способности, среднее число занятых аппаратов.

	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
n	3	2	3	4	2	2	3	2	3	2
$\lambda$	6	7	8	9	7	5	8	9	6	8
$\mu$	4	5	6	5	3	3	4	7	3	4
v	2	3	3	3	2	2	3	2	2	2

221–230.

Решить транспортную задачу в сетевой постановке.



	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
A	45	90	50	35	25	30	20	80	40	30
B	35	50	40	30	30	20	30	50	60	35
C	40	40	40	40	20	34	45	70	50	40
-D	-10	-30	-20	-25	-5	-15	-35	-60	-25	-20
-E	-30	-20	-60	-10	-15	-20	-5	-75	-60	-40
-F	-25	-60	-40	-20	-30	-25	-30	-35	-15	-25
-G	-55	-70	-10	-50	-25	-25	-25	-30	-50	-20
h	1	8	3	4	5	2	9	9	6	3
k	4	6	2	8	8	9	8	8	3	1
m	3	7	4	6	7	7	8	1	8	4
n	7	4	6	1	8	8	6	8	5	4
p	3	2	1	7	9	2	9	7	8	7
q	1	4	2	5	5	5	2	9	7	3
r	6	7	7	7	8	6	7	4	3	1
s	7	1	5	7	6	9	2	3	4	6
t	1	4	6	2	1	1	7	4	5	2

231–240.

Совокупные затраты равны  $a$  руб., а число проданных единиц продукции –  $b$ . Определить средние затраты на единицу данной продукции.

	a	b			a	b
231	220000	600		236	240000	300
232	270000	500		237	260000	450
233	280000	700		238	235000	250
234	290000	800		239	265000	850
235	225000	900		240	275000	750

241–250.

Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий:

а) Построить большой завод стоимостью  $M_1$  тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере  $R_1$  тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью  $p_1$  и низкий спрос (ежегодные убытки в размере  $R_2$  тысяч долларов) с вероятностью  $p_2$ ;

б) Построить маленький завод стоимостью  $M_2$  тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере  $T_1$  тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью  $p_1$  и низкий спрос (ежегодные убытки в размере  $T_2$  тысяч долларов) с вероятностью  $p_2$ ;

в) Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью  $p_3$  и  $p_4$  соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса –  $p_5$  и  $p_6$  соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовать дерево решений. Определить наиболее эффективную последовательность, основываясь

на ожидаемы доходах. Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения?

	$M_1$	$M_2$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$R_1$	$R_2$	$T_1$	$T_1$
241	600	350	0,7	0,3	0,8	0,2	0,9	0,1	250	50	150	25
242	605	345	0,65	0,35	0,75	0,25	0,91	0,09	245	45	145	20
243	610	340	0,75	0,25	0,85	0,15	0,92	0,08	240	40	140	15
244	615	335	0,7	0,3	0,85	0,15	0,93	0,07	235	35	135	10
245	620	330	0,65	0,35	0,8	0,2	0,94	0,06	230	30	130	5
246	625	325	0,75	0,25	0,75	0,25	0,95	0,05	250	55	155	30
247	630	320	0,7	0,3	0,75	0,25	0,94	0,04	260	60	160	35
248	635	315	0,65	0,35	0,85	0,15	0,93	0,03	265	65	165	40
249	640	310	0,75	0,25	0,8	0,2	0,92	0,02	270	70	170	45
250	645	305	0,7	0,3	0,75	0,25	0,91	0,01	275	75	175	50

251–260.

Владелец небольшого магазина в начале каждого рабочего дня закупает для реализации некий скоропортящийся продукт по цене  $a$  рублей за единицу. Цена реализации этого продукта –  $b$  рублей за единицу. Из наблюдений известно, что спрос на этот продукт за день может быть равен 1, 2, 3 или 4 единицам. Если продукт за день не продан, то в конце дня его всегда покупают по цене  $c$  рублей за единицу.

Возможные исходы	1	2	3	4
Частота	d	e	f	g

Пользуясь правилом максимакса, максимина, минимакса, максимальной вероятности, критерием Гурвица и максимизируя ожидаемый доход, определить, сколько единиц этого продукта должен закупать владелец каждый день. Чему равна ожидаемая стоимость полной информации?

	a	b	c	d	e	f	g
251	50	80	30	10	20	30	40
252	70	90	60	20	20	30	30
253	50	90	30	15	25	40	20
254	50	70	20	40	10	25	25
255	60	80	40	35	30	10	25
256	40	60	20	15	50	20	15
257	30	70	10	25	30	20	25
258	20	50	10	50	15	15	20
259	30	80	20	40	10	10	40
260	40	70	10	30	30	30	10

261–270.

Предприятие рассматривает вопрос о приобретении оборудования. Первый вариант – лизинг за  $a$  тыс. руб. с рассрочкой платежа в течение четырех лет. Второй вариант – покупка на заводе-изготовителе за  $m$  тыс. руб. Ставка налога на прибыль равна  $K_H$  %. Предоплата  $E_0$  и остаточная стоимость оборудования  $Q$  равны нулю. Можно получить кредит в банке под  $r$  % годовых. Используется равномерное начисление износа. Сравнить эти варианты.

	a	m	$K_H$	r		a	m	$K_H$	r
261	700	560	30	11	266	750	630	40	11
262	800	630	35	12	267	850	700	30	12
263	900	720	40	13	268	930	710	35	13
264	600	420	30	14	269	650	490	40	14
265	500	350	35	15	270	420	420	30	15

271–280.

Начальные запасы отсутствуют. В марте закуплены для реализации  $a$  единиц продукции по цене  $f$  руб. В апреле закуплены для реализации  $b$  единиц продукции по цене  $g$  руб. В мае проданы  $c$  единиц продукции по цене  $h$  руб. В июне

проданы  $d$  единиц продукции по цене  $k$  руб. В июле закуплены для реализации  $e$  единиц продукции по цене  $m$  руб. В августе проданы  $t$  единиц продукции по цене  $n$  руб.

а) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ФИФО;

б) Определить стоимость запасов на конец периода методом оценки запасов ЛИФО;

в) Определить стоимость запасов на конец периода методом средневзвешенной;

г) Определить валовую прибыль в пунктах а), б), в).

	f	g	h	m	k	n	a	b	c	d	e	t
271	25	26	36	27	37	38	220	115	210	120	60	30
272	26	28	38	29	39	40	270	215	220	170	50	20
273	27	28	39	30	40	41	280	135	230	180	70	40
274	29	31	41	32	42	43	290	145	250	190	80	40
275	28	29	39	30	41	42	225	105	265	125	90	30
276	22	24	34	26	35	36	240	195	270	140	30	20
277	21	23	33	24	34	35	260	185	210	160	45	30
278	23	25	35	26	36	37	235	175	255	135	25	20
279	24	26	36	27	38	39	265	165	235	165	85	40
280	20	21	31	23	32	33	275	155	285	175	75	30

281–290.

Предприятие решает вопрос о том, как часто проводить предупредительное обслуживание оборудования. Проведение такого обслуживания стоит  $a$  руб. Дополнительная информация приведена в таблице.

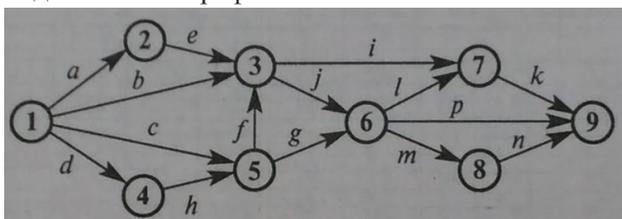
Число месяцев после проведения обслуживания	1	2	3	4	5	6
Затраты, связанные с поломками, за последний месяц	0	b	c	d	e	f
Амортизационные отчисления	0	b	c	d	e	f

Предупредительное обслуживание позволяет технически довести оборудование до состояния нового оборудования. Определить оптимальный промежуток времени для проведения такого обслуживания и среднемесячные минимальные затраты.

	a	b	c	d	e	f	g
281	60000	3000	6000	8000	50000	100000	7000
282	70000	5000	10000	12000	60000	120000	8000
283	80000	6000	12000	14000	70000	140000	8500
284	90000	7000	14000	16000	80000	160000	6500
285	65000	8000	16000	18000	90000	180000	5500
286	55000	8500	17000	19000	100000	200000	3500
287	45000	7500	15000	17000	90000	170000	7500
288	75000	6500	13000	15000	80000	150000	4500
289	85000	5500	11000	13000	70000	150000	7000
290	95000	3500	7000	10000	50000	120000	9000

291–300.

а). Задан сетевой график



Вычислить все основные характеристики работ и событий. Найти критический путь и его продолжительность. Построить график Ганта.

б) Заключительная сборка диктофона требует выполнения шести ручных операций. В течение 400 мин. ежедневной работы сборочной линии необходимо выпустить 40 диктофонов. Информация об операциях приведена в таблице.

Операция	Время выполнения, мин.	Предшествующие операции
1	a	-
2	b	1
3	c	1,2
4	d	2,3
5	e	4
6	f	5

Решить задачу балансировки линии сборки.

На станке В (во вторую очередь). Известны времена обработки каждой детали на каждом станке (в минутах) На каждом из станков можно обрабатывать только одну деталь. Процесс обработки деталей не может прерываться. Определить вариант плана запуска деталей, при котором общее время их обработки будет минимальным. Чему равно минимальное суммарное время обработки деталей на двух станках?

Деталь	1	2	3	4	5
Время обработки на станке А	a	b	c	d	e
Время обработки на станке В	f	g	h	i	j

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q
291	9	3	4	3	3	1	1	8	2	9	3	9	4	4	8	2
292	5	5	4	3	1	8	9	8	1	3	8	7	2	7	4	3
293	7	7	3	2	5	7	2	5	4	1	6	8	8	3	3	8
294	2	4	8	2	9	4	5	2	10	4	4	2	2	1	7	3
295	1	8	3	4	5	2	9	9	5	7	6	5	3	6	3	2
296	4	6	2	8	8	9	8	8	3	2	3	1	1	2	1	4
297	3	7	4	6	7	7	8	1	6	10	8	8	4	7	7	6
298	7	4	6	1	8	8	6	8	8	5	5	7	4	5	4	3
299	3	2	1	7	9	2	9	7	7	6	8	4	7	2	2	1
300	1	4	2	5	5	5	2	9	9	7	7	2	3	8	9	4

301–310.

а) Технологический процесс подчиняется нормальному распределению  $N(a, \sigma)$  с математическим ожиданием  $a$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Производится выборка объемом  $n$ . Найти центральную линию, предупреждающие границы и границы регулирования.

б) Из партии  $m$  единиц производится выборка  $n$  единиц. Если в выборке окажется более одной бракованной единицы, то вся партия продукции будет отвергнута. Построить кривую оперативной характеристики.

в) Выборка из  $m$  выявила  $b$  дефектов. Определить среднее число дефектов на единицу продукции и верхнюю границу регулирования.

	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
a	7	8	9	7	11	12	10	14	18	15
$\sigma$	0,2	0,3	0,4	0,3	0,2	0,3	0,4	0,2	0,4	0,2
n	5	6	7	5	6	7	5	6	7	8
m	200	300	400	500	250	350	450	550	150	275
b	3500	4500	5500	1500	2750	2000	3000	4000	5000	2500

311–320.

Доля бракованных изделий –  $p$ . Производились выборки объемом  $n$  единиц. Определить границы. Если нижняя граница регулирования при использовании нормального распределения получилась отрицательной, то произвести вычисления заново с использованием распределения Пуассона.

	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
p	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,2
n	100	800	600	500	400	300	700	200	900	150

321–330.

Производитель и потребитель договорились о следующих стандартах: AQL, LTPD,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Если в выборке  $n$  единиц будет

больше двух бракованных единиц, то вся партия бракуется. Выяснить, удовлетворяет ли эта схема заявленным условиям.

	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
AQL	0,04	0,06	0,07	0,03	0,02	0,08	0,09	0,04	0,16	0,07
LTPD	0,15	0,20	0,22	0,23	0,18	0,14	0,16	0,17	0,12	0,24
$\alpha$	0,10	0,09	0,08	0,10	0,09	0,08	0,09	0,08	0,10	0,08
$\beta$	0,12	0,14	0,16	0,16	0,14	0,12	0,12	0,14	0,16	0,12
n	35	45	55	18	27	20	30	40	50	25

331–340.

Предприятие получило заказ на поставку через 6 недель  $f$  изделий А. Для производства одного изделия А требуется  $i$  изделий В и  $x$  изделий С. Время выполнения заказов на изделия В и С равно  $p$  и  $s$  недель. Производство изделий А занимает одну неделю. В настоящее время у предприятия есть  $g$  изделий А,  $h$  изделий В и  $n$  изделий С. Изобразить структурное дерево и определить, когда предприятию следует отправить заказы на поставку изделий В и С.

	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
f	28	27	29	21	21	17	19	14	21	27
g	26	25	26	17	15	14	10	10	15	13
h	16	15	20	22	12	20	12	16	12	19
n	20	20	18	20	14	15	13	15	13	11
i	2	3	5	3	4	2	8	4	2	4
p	3	2	4	2	3	4	4	3	1	2
s	2	1	4	3	4	3	1	2	3	3
x	7	5	7	7	7	3	4	3	8	6

341–350.

Небольшой магазин имеет 8 видов продукции. Затраты и годовой спрос на них указаны в таблице.

Продукт	D	E	F	G	H	K	M	N
Цена, руб.	a	b	c	f	g	h	m	n
Годовой спрос	i	p	s	w	x	k	q	t

Провести ABC-анализ.

	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
a	4	4	5	3	3	5	2	2	2	2
b	3	9	4	3	2	2	5	5	3	3
c	4	5	4	7	2	3	2	7	5	3
f	2	2	4	1	2	7	9	4	1	7
g	6	5	6	7	5	3	1	10	15	13
h	16	5	2	12	12	10	10	16	12	19
m	18	10	12	15	13	19	11	10	14	15
n	20	20	28	20	14	15	13	15	13	11
i	200	300	500	300	400	200	800	400	200	400
p	3000	1000	5000	2000	8000	4000	7000	9000	1000	5000
s	6000	1000	4000	9000	3000	6000	1000	2000	3000	5000
w	8000	4000	9000	1000	2000	8000	2000	5000	3000	1000
x	7000	5000	7000	7000	7000	3000	4000	3000	8000	6000
k	50000	60000	40000	20000	90000	90000	10000	40000	70000	50000
q	900	300	400	300	300	100	100	800	200	900
t	5000	5000	4000	3000	1000	8000	9000	8000	1000	3000

351–360.

Есть три поставщика с мощностями  $a, b, c$  и пять потребителей (их спрос –  $f, g, h, m, n$  соответственно). Стоимость доставки единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю задается матрицей

i p s w x  
k q t e y  
r l v d z

<u>A</u>	k	q	t	e	y
	l	r	v	d	z

Найти оптимальный план поставок.

	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
a	40	40	50	35	30	35	20	23	20	20
b	35	90	40	33	25	20	25	25	30	35
c	45	50	40	27	20	30	20	17	25	30
f	20	20	24	21	21	17	19	14	21	27
g	26	25	26	17	15	14	10	10	15	13
h	16	65	20	22	12	20	12	16	12	19
m	38	50	32	15	13	19	11	10	14	15
n	20	20	28	20	14	15	13	15	13	11
i	2	3	5	3	4	2	8	4	2	4
p	3	1	5	2	8	4	7	9	1	5
s	6	1	4	9	3	6	1	2	3	5
w	8	4	9	1	2	8	2	5	3	1
x	7	5	7	7	7	3	4	3	8	6
k	5	6	4	2	9	9	1	4	7	5
q	9	3	4	3	3	1	1	8	2	9
t	5	5	4	3	1	8	9	8	1	3
e	7	7	3	2	5	7	2	5	4	1
y	2	4	8	2	9	4	5	2	4	2
l	1	8	3	4	5	2	9	9	5	7
r	4	6	2	8	8	9	8	8	3	2
v	3	7	4	6	7	7	8	1	6	10
d	7	4	6	1	8	8	6	8	8	5
z	3	2	1	7	9	2	9	7	7	6

361–370.

Для ремонта техники требуются соответствующие детали. При их изготовлении собственными силами постоянные затраты на содержание оборудования составят  $d$  руб./год, а переменные –  $e$  руб./ед. Готовые детали можно в неограниченном количестве приобрести по цене  $b$  руб./ед. Определить наименее затратный вариант.

	$d$	$e$	$b$			$d$	$e$	$b$
361	111000	116	144		366	113750	114	154
362	113700	117	143		367	113775	112	155
363	113800	118	141		368	113675	121	150
364	113900	119	134		369	113850	122	152
365	113650	113	139		370	113950	123	153

371–380.

Предприятие рассматривает вопрос о выборе поставщика А, В, С. Все данные отображены в таблице.

Фактор	Вес	А	В	С
Качество	$a$	$d$	$f$	$g$
Цена	$b$	$h$	$k$	$m$
Соблюдение условий поставки	$1-a-b$	$n$	$p$	$r$

Выбрать поставщика с помощью метода взвешивания

	$d$	$f$	$g$		$k$	$m$	$n$	$p$	$r$	$a$	
371	9	8	5	2	1	7	7	6	7	0,26	0,32
372	4	9	5	6	8	7	1	6	7	0,25	0,33
373	2	1	4	9	5	5	8	6	9	0,24	0,34
374	9	3	4	3	3	1	1	8	3	0,23	0,35
375	5	5	4	3	1	8	9	8	8	0,22	0,37

376	7	7	3	2	5	7	2	5	6	0,21	0,36
377	2	4	8	2	9	4	5	2	4	0,28	0,38
378	1	8	3	4	5	2	9	9	6	0,27	0,39
379	4	6	2	8	8	9	8	8	3	0,29	0,33
380	3	6	4	6	7	7	8	1	8	0,27	0,32

## Литература

Просветов, Г. И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2008. – 304 с.

Уотерс, Д. Логистика. Управление цепью поставок / Д. Уотерс. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 503 с.

Воронцовский, А. В. Управление рисками / А. В. Воронцовский. – СПб. : СПбГУ, 2000.

## Оглавление

1. Основные понятия логистики.....	3
2. Виды затрат и факторов производства.....	8
3. Проблемы размещения производства.....	11
4. Нахождение кратчайшего пути.....	17
5. Построение коммуникационной сети минимальной длины.....	21
6. Вычисление максимального потока.....	24
7. Определение единого среднего в сети.....	25
8. Проблемы охвата.....	27
Задачи для контрольных работ по курсу «Математические методы в логистике».....	27
Литература.....	54

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИСТИКА.  
АЛГОРИТМЫ, ПРИМЕРЫ  
И ЗАДАЧИ**

Практикум

Составитель  
**Балабаев Владимир Евгеньевич**

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерная верстка Е. Б. Половкова

Подписано в печать 15.10.19. Формат 60×84 1/16.  
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,0.  
Тираж 2 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета

Адрес типографии:  
Ярославский государственный университет.  
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.