Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

В.А. Краснов

Современная дифференциальная геометрия

Учебное пособие

Ярославль 2000

В 151.6я73
К78

Краснов В.А.
Современная дифференциальная геометрия: Учеб. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2000. 88 с.
ISBN 5-8397-0062-2

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов 3-го курса, обучающихся по направлению и по специальности "Математика". Оно может служить введением в современную геометрию и может быть использовано при чтении спецкурсов. В нем подробно обсуждаются такие важные геометрические объекты, как многообразия и расслоения, дифференциальные формы и связности. Центральной является глава, посвященная римановой геометрии. Предварительно излагаются элементы полилинейной алгебры.

Рецензенты: проф. А.С. Тихомиров, кафедра геометрии Ярославского государственного педагогического университета.

ISBN 5-8397-0062-2

© Ярославский государственный университет, 2000
© Краснов В.А., 2000

Краснов Вячеслав Алексеевич
Современная дифференциальная геометрия

Редактор, корректор А.А. Аладьева

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.
Подписано в печать 09.03.2000. Формат 60x84/16. Бумага тип.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,5.
Тираж 75 экз. Заказ № 95

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Отпечатано на ризографе.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Содержание

Введение	4
Глава I. Элементы полилинейной алгебры.	5
1. Полилинейные отображения.	5
2. Тензорное произведение.	8
3. Тензорная алгебра векторного пространства.	10
Глава II. Локальная риманова геометрия.	14
1. Векторные поля в области R^n.	14
2. Риманова метрика в области R^n.	19
3. Ковариантное дифференцирование.	22
4. Аффинная связность.	23
5. Риманова связность.	26
6. Изометрии римановой области.	29
7. Вариационное определение геодезических.	31
8. Плоскость Лобачевского.	34
9. Тензор кривизны римановой связности.	36
10. Внешние дифференциальные формы.	41
Глава III. Геометрия многообразий.	46
1. Криволинейные координаты в R^n	46
2. Группы преобразований как многообразия в N-мерном пространстве.	48
2.1. Задание многообразия системой уравнении.	48
2.2. Экспонента от матрицы.	49
2.3. Группы $GL(n,R)$, $SL(n,R)$, $O(n,R)$, $SO(n,R)$.	50
3. Топологические многообразия.	52
4. Карты и атласы.	55
5. Проективное пространство.	56
6. Абстрактные дифференцируемые многообразия.	58
7. Обобщенная формула Стокса.	60
7.1. Формула Стокса для n-мерного куба.	60
7.2. Дифференцируемые многообразия с краем.	63
7.3. Когомологии де Рама.	66
Глава IV. Комплексный язык в геометрии.	68
1. Комплексные векторы и ковекторы.	68
2. Многообразия, заданные комплексными уравнениями.	70
3. Плоские комплексные кривые.	72
4. Кватернионы.	74
5. Вещественные и комплексные коники.	77
6. Зачем нужен комплексный язык в геометрии?	79

Глава V. Векторные расслоения и связности. 80
1. Определение и примеры векторных расслоений. 80
2. Касательное расслоение. 82
3. Сечения векторного расслоения. 83
4. Ковариантная производная и связность. 84
Заключение. 87
Литература. 88

Введение

В современных рабочих учебных планах для специальности "Математика" на изучение дифференциальной геометрии отводится 36 часов. За это время можно только познакомиться с классической дифференциальной геометрией кривых и поверхностей в $\mathbf{R}^3$. Таким образом, возникает необходимость в дополнительном изучении дифференциальной геометрии. Данное пособие должно помочь в решении этой задачи. Например, оно будет полезным при изучении курса по выбору "Современная геометрия". Заметим, что в этом пособии мы излагаем в основном темы, связанные с римановой геометрией. Задачи, которые приводятся в тексте пособия, можно решать на практических занятиях, а также предлагать их для самостоятельного решения при прохождении соответствующей темы. Некоторые задачи можно предложить в качеcте тем курсовых работ.

Скажем несколько слов о содержании пособия и особенностях изложения рассматриваемых тем. Первая глава является вспомогательной, она посвящена полилинейной алгебре. Пря изложении этой темы была использована книга [3]. Центральной является вторая глава, посвященная римановой геометрии. Здесь мы излагаем только локальную риманову геометрию, но стиль изложения такой, что основные определения и теоремы без труда переносятся для геометрии многообразий. При написании этой главы использовались книги [1], [4]. Для дальнейшего изучения римановой геометрии очень полезна книга Э.Картана [2], впрочем, ее трудно достать. Третья глава посвящена многообразиям. Здесь отводится много материала для знакомства с этим понятием, в частности, рассмотрены классические группы как подмногообразия арифметического пространства. Наконец, даются указания, как переписать главу II для многообразий. Кроме этого, мы излагаем теорию интегрирования дифференциальных форм на многообразии, в частности,

доказывается обобщенная формула Стокса. Четвертая глава является специфической. Она посвящена комплексному языку в геометрии. При написании этой главы использовалась книга [1]. Эта глава, в частности, может служить введением в комплексную дифференциальную геометрию. Последняя глава знакомит с дифференциальной геометрией векторных расслоений. В ней обобщаются некоторые предыдущие понятия, и она подготавливает читателя к изучению более фундаментальных трудов по современной геометрии.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Полилинейные отображения.

Далее $V, W, V_1, V_2, \ldots, W_1, W_2, \ldots$ –векторные пространства над полем K, причем K равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Определение 1.1. *Отображение $f : V \to W$ линейное, если для всех $v, v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ выполняются равенства*

$$f(av) = af(v),\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + (v_2).$$

Задача 1.2. Показать, что для линейного отображения $f : V \to W$ выполняется равенство

$$f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i),$$

где $a_i \in K$, $v_i \in V$.

Задача 1.3. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис V, $w_1 \ldots, w_m$ – базис W. Показать, что существует и единственное линейное отображение $f_k^l : V \to W$, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$, такое, что

$$f_k^l(v_i) = \begin{cases} w_l, \text{ если} & i = k; \\ 0, \text{ если} & i \ne k. \end{cases}$$

Написать матрицу отображения f_k^l.

Задача 1.4. Обозначим через $L(V, W)$ множество линейных отображений из V в W. Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из K; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения f_k^l, $1 \le k \le n, 1 \le l \le m$, из задачи 1.3 образуют базис векторного пространства $L(V, W)$; доказать равенство

$$dim\, L(V, W) = dim\, V \cdot dim\, W$$

Векторное пространство $L(V,K)$ обозначается через V^* и называется двойственным к V пространством. Его элементы называются линейными функциями или линейными формами. Как правило, линейные формы будут обозначаться греческими буквами: $\alpha : V \to K$, $\alpha(v)$.

Задача 1.5. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – базис V. Показать, что существует и единственная линейная форма v_i^*, $1 \le i \le n$, такая, что

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Задача 1.6. Показать, что формы $v_1^*, \dots, v_n^*$ образуют базис пространства V^*.

Задача 1.7. Показать, что если вектор $v \in V$ имеет в базисе $v_1, \dots, v_n$ координаты $a_1, \dots, a_n$, то $v_i^*(v) = a_i$.

Заметим, что базис $v_1^*, \dots v_n^*$ пространства V^* называют двойственным базисом к базису $v_1, \dots, v_n$ пространства V. Линейная форма

$$\alpha = a_1 v_1^* + \dots + v_n^*$$

обычно записывается следующим образом (почему?)

$$\alpha = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где $x_1, \dots, x_n$ – переменные координаты вектора $v \in V$. В частности, $v_i^* = x_i$.

Задача 1.8. Рассмотрим "дважды двойственное к V пространство" $V^{**} = (V^*)^*$. Показать, что отображение $\varepsilon : V \to V^{**}$, определенное равенством $\varepsilon(v)(\alpha) = \alpha(v)$, является линейным отображением. Показать, что для конечномерного пространства V отображение $\varepsilon : V \to V^{**}$ является изоморфизмом.

Определение 1.9. *Отображение $f : V_1 \times V_2 \to W$ билинейное, если для всех $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $a \in K$, $v_1', v_1'' \in V_1$, $v_2', v_2'' \in V_2$ выполняются равенства*

$$f(av_1, v_2) = af(v_1, v_2),$$
$$f(v_1, av_2) = af(v_1, v_2),$$
$$f(v_1' + v_1'', v_2) = f(v_1', v_2) + f(v_1'', v_2),$$
$$f(v_1, v_2' + v_2'') = f(v_1, v_2') + f(v_1, v_2'').$$

Другими словами, функция $f(v_1, v_2)$ от двух векторных переменных v_1, v_2 линейна по v_1 и v_2.

Задача 1.10. Показать, что следующие отображения билинейны:

$$K \times V \to V,\ (a, v) \mapsto av,$$

$$V^* \times V \to K,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha(v).$$

Задача 1.11. Пусть $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис V_1, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис V_2, $w_1, \ldots, w_l$ – базис W. Показать, что существует и единственное билинейное отображение

$$f_{pq}^r : V_1 \times V_2 \to W, \quad 1 \le p \le n, \quad 1 \le q \le m, \quad 1 \le r \le l$$

такое, что

$$f_{pq}^r(v_i^1, v_j^2) = \begin{cases} w_r, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 1.12. Обозначим через $L(V_1, V_2; W)$ множество билинейных отображений $V_1 \times V_2$ в W. Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из K; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения f_{pq}^r, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le m, 1 \le r \le l$, из задачи 1.11 образуют базис пространства $L(V_1, V_2; W)$; доказать равенство

$$dim\, L(V_1, V_2; W) = dim\, V_1 \cdot dim\, V_2 \cdot dim\, W.$$

Элементы пространства $L(V, V; K)$ называются *билинейными формами* на V. Как правило, билинейные формы будут обозначаться греческими буквами:

$$\beta : V \times V \to K, \quad \beta(v, v').$$

Задача 1.13. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис V. Показать, что существует и единственная билинейная форма β_{pq} на V, $1 \le p \le n, 1 \le q \le n$, такая, что

$$\beta_{pq}(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Задача 1.14. Показать, что билинейные формы β_{pq}, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le n$, из задачи 1.13 образуют базис пространства билинейных форм на V.

Билинейная форма

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij}$$

обычно записывается следующим образом

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x'_j,$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – переменные координаты вектора $v \in V$, а $x'_1, \cdots, x'_n$ – координаты вектора $v' \in V$.

Задача 1.15. Доказать равенство

$$\beta_{ij}(v, v') = v_i^*(v) \cdot v_j^*(v'),$$

где $v_1^*, \ldots, v_n^*$, – двойственный базис.

Задача 1.16. Сформулировать определение полилинейного отображения

$$f : V_1 \times \ldots \times V_k \to W.$$

Найти базис пространства полилинейных отображений $L(V_1, \ldots, V_k; W)$.

Задача 1.17. Рассмотрим отображение

$$\det : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n \text{ раз}} \to K,$$

где $\det(v_1, \ldots, v_n)$ – определитель матрицы, которая получается из векторов $(v_1, \ldots, v_n)$, если их записать в столбец. Показать, что отображение det полилинейно.

2. Тензорное произведение.

Здесь мы будем рассматривать только конечномерные векторные пространства над K. Сначала определим тензорное произведение линейных форм.

Определение 2.1. *Пусть $\alpha_1 \in V_1^*$, $\alpha_2 \in V_2^*$, тогда тензорное произведение этих форм $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ принадлежит пространству $L(V_1, V_2; K)$ и по определению равно*

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2). \tag{2.1}$$

Задача 2.2. Показать, что $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ действительно принадлежит пространству $L(V_1, V_2; K)$.

Задача 2.3. Показать, что отображение

$$\otimes : V_1^* \times V_2^* \to L(V_1, V_2; K),$$

заданное равенством (2.1), билинейно.

Задача 2.4. Показать, что если $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1$ – базис V_1^*, $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_m^2$ – базис V_2^*, то $\alpha_i^1 \otimes \alpha_j^2$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, – базис пространства $L(V_1, V_2; K)$.

Определение 2.5. *Тензорное произведение векторов из V_1 на векторы из V_2 – это билинейное отображение*

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W,$$

где W – некоторое векторное пространство, причем это отображение должно удовлетворять требованию: если $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис пространства V_1, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис V_2, то произведения $v_i^1 \otimes v_j^2$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, образуют базис пространства W.

Теорема 2.6. *Тензорное произведение существует и оно единственное (с точностью до изоморфизма).*

Доказательство. Так как канонические отображения

$$\varepsilon : V_1 \to V_1^{**}, \quad \varepsilon : V_2 \to V_2^{**}$$

являются изоморфизмами, то достаточно построить тензорное произведение для пространств $V_1^{**} = (V_1^*)^*$, $V_2^{**} = (V_2^*)^*$. Но для них годится конструкция из определения 2.1, а задача 2.4 показывает, что это произведение удовлетворяет требованию в определении 2.5. Существование доказано, перейдем к доказательству единственности (с точностью до изоморфизма). Пусть имеется два таких произведения, то есть два билинейных отображения

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W, \otimes' : V_1 \times V_2 \to W'.$$

Если $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис V_1, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис V_2, то произведения $v_i^1 \otimes v_j^2$ образуют базис W, а произведения $v_i^1 \otimes' v_j^2$ – базис W'. Существует и единственный изоморфизм $f : W \to W'$ такой, что $f(v_i^1 \otimes v_j^2) = v_i^1 \otimes' v_j^2$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Осталось заметить, что $f \circ \otimes = \otimes'$, так как это равенство означает, что произведения $\otimes$, $\otimes'$ совпадают с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

Заметим, что векторное пространство W в определении 2.5 называется *тензорным произведением* пространств V_1, V_2 и обозначается через $V_1 \otimes V_2$. Итак, тензорное произведение векторов задает отображение

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2.$$

Задача 2.7. Определить тензорное произведение векторов $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ из пространств $V_1, \ldots, V_k$. Построить канонические изоморфизмы

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3.$$

Пример 2.8. Комплексификация вещественного векторного пространства.

Рассмотрим $\mathbf{C}$ как векторное пространство над $\mathbf{R}$. Пусть V – векторное пространство над $\mathbf{R}$, тогда тензорное произведение $\mathbf{C} \otimes V$ является векторным пространством над $\mathbf{R}$, но его можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbf{C}$, если положить $a \cdot (b \otimes v) = (ab) \otimes v$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $v \in V$. Тензорное произведение $\mathbf{C} \otimes V$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbf{C}$, называется *комплексификацией* V и обозначается через $V_{\mathbf{C}}$. Если элемент $1 \otimes v + i \otimes w$, $v, w \in V$, обозначить через $v + iw$, то получим, что комплексификация $V_{\mathbf{C}}$ состоит из выражений $v + iw$. Операции над этими выражениями производятся естественным образом, в частности,

$$(a + ib) \cdot (v + iw) = (av - bv) + i(bv + aw),$$

где $a + ib \in \mathbf{C}$.

Задача 2.9. Пусть $f : V_1 \times V_2 \to W$ – билинейное отображение. Показать, что существует и единственное линейное отображение $g : V_1 \otimes V_2 \to W$ такое, что выполняется равенство $g \circ \otimes = f$.

Задача 2.10. Показать, что существует канонический изоморфизм

$$(V_1 \otimes V_2)^* = V_1^* \otimes V_2^*.$$

3. Тензорная алгебра векторного пространства.

Далее V – конечномерное векторное пространство над полем K. Через $T^q(V)$ обозначим тензорное произведение

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ раз}},$$

а его элементы будем называть тензорами ранга q. Если $v_1, \ldots, v_n$ – базис V, то тензоры $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$, $1 \le i_1 \le n, \ldots, 1 \le i_q \le n$, образуют базис пространства $T^q(V)$. Таким образом, для $t \in T^q(V)$ имеем разложение

$$t = \sum t^{i_1 \ldots i_q} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}.$$

Тензор $t \in T^q(V)$ называется *разложимым*, если существуют векторы $v_1, \dots, v_q \in V$ такие, что $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_q$.

Задача 3.1. Пусть σ – перестановка чисел $\{1, \dots, q\}$. Показать, что существует и единственное линейное отображение

$$f_\sigma : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое действует на разложимых тензорах по правилу

$$f_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_q) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(q)}.$$

Определение 3.2. *Тензор $t \in T^q(V)$ называется симметрическим (кососимметрическим), если $f_\sigma(t) = t$ ($f_\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$) для каждой перестановки σ, где $\varepsilon(\sigma)$ – знак перестановки σ.*

Множество симметрических тензоров в $T^q(V)$ обозначается через $S^q(V)$, а множество кососимметрических — через $\Lambda^q(V)$.

Задача 3.3. Показать, что множества $S^q(V)$, $\Lambda^q(V)$ являются векторными подпространствами $T^q(V)$.

Далее предполагается, что поле K имеет нулевую характеристику. Рассмотрим линейное отображение

$$S : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$S(t) = \frac{1}{q!} \sum_\sigma f_\sigma(t).$$

Это отображение называется *симметризацией*.

Задача 3.4. Показать, что $S^2 = S$, $Im\, S = S^q(V)$.

Рассмотрим линейное отображение

$$A : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$A(t) = \frac{1}{q!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) f_\sigma(t).$$

Оно называется *антисимметризацией* или *альтернированием*.

Задача 3.5. Показать, что $A^2 = A$, $Im\, A = \Lambda^q(V)$.

Введем следующее обозначение: если $v_1, \dots, v_n$ – базис V, то $S(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q})$ обозначим через $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$. Формальное произведение $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$ не меняется при перестановке индексов, поэтому можно условиться выбирать в качестве канонической записи таких симметрических тензоров следующую запись:

$$v_1^{a_1} \cdots v_n^{a_n}, \quad \text{где } a_i \geq 0,\ a_1 + \dots + a_n = q,$$

где число a_i показывает, сколько раз вектор v_i фигурирует в $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$.

Задача 3.6. Доказать, что тензоры $v_1^{a_1} \cdots v_n^{a_n} \in S^q(V)$, $a_i \geq 0$, $a_1 + \dots + a_n = q$, образуют базис пространства $S^q(V)$. Показать, что

$$dim\ S^q(V) = \binom{n+q-1}{q}.$$

Введем обозначение

$$A(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}) = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$$

(значок $\wedge$ называется символом *внешнего умножения*). Заметим теперь, что перестановка любых двух векторов в $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$ меняет знак этого произведения.

Задача 3.7. Показать, что:

1) $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q} = 0$, если $i_a = i_b$ для некоторых a, b;

2) тензоры вида $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$, образуют базис пространства $\Lambda^q(V)$ при $1 \leq q \leq n$;

3) $\Lambda^q(V) = 0$ при $q > n$;

4) $dim\, \Lambda^q(V) = \binom{n}{q}$ при $1 \leq q \leq n$.

Положим

$$T^0(V) = K, \quad T(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q(V).$$

Бесконечномерное пространство $T(V)$ с операцией тензорного умножения называется *тензорной алгеброй* пространства V.

Положим

$$S^0(V) = K, \quad S(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^q(V).$$

Введем на пространстве $S(V)$ билинейное умножение по формуле

$$t_1 t_2 = S(t_1 \otimes t_2),\ t_1 \in S^p(V), t_2 \in S^q(V).$$

Задача 3.8. Показать, что $S(V)$ с введенным умножением является коммутативной ассоциативной алгеброй над полем K.

Положим

$$\Lambda^0(V) = K, \quad \Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V).$$

Введем на пространстве $\Lambda(V)$ билинейное умножение по формуле

$$t_1 \wedge t_2 = A(t_1 \otimes t_2), \quad t_1 \in \Lambda^p(V),\ t_2 \in \Lambda^q(V).$$

Задача 3.9. Показать, что $\Lambda(V)$ с введенным умножением является ассоциативной алгеброй над полем K, удовлетворяющей свойству

$$t_2 \wedge t_1 = (-1)^{pq} t_1 \wedge t_2, \quad t_1 \in \Lambda^p(V),\ t_2 \in \Lambda^q(V).$$

Алгебра $\Lambda(V)$ называется *внешней* алгеброй или *алгеброй Грассмана* пространства V.

Задача 3.10. Используя определение 2.1 показать, что:

1) $T^q(V^*)$ – пространство полилинейных функций

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ раз}} \to K;$$

2) $S^q(V^*)$ – пространство симметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = f(v_1, \ldots, v_q);$$

3) $\Lambda^q(V^*)$ – пространство кососимметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \ldots, v_q);$$

4) если $t_1 \in T^p(V^*)$, $t_2 \in T^q(V^*)$, то

$$(t_1 \otimes t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = t_1(v_1, \ldots, v_p) \cdot t_2(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q});$$

5) если $t_1 \in S^p(V^*)$, $t_2 \in S^q(V^*)$, то

$$(t_1 \cdot t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} t_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot t_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)});$$

6) если $t_1 \in \Lambda^p(V^*)$, $t_2 \in \Lambda^q(V^*)$, то

$$(t_1 \wedge t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)t_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\cdot t_2(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)}).$$

Глава II. ЛОКАЛЬНАЯ РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторные поля в области $\mathbf{R}^n$.

Далее U – область в $\mathbf{R}^n$. Пусть $x_0 \in U$ – фиксированная точка, тогда через $T_{x_0}U$ будем обозначать множество векторов в $\mathbf{R}^n$ с началом в точке x_0 (см. рис.1). Это множество является, на самом деле, векторным пространством. Оно называется *касательным* пространством к U в точке x_0.

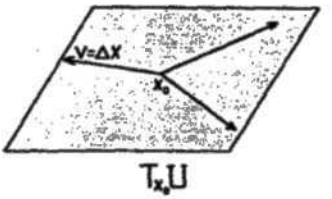

Рисунок 1.

Пусть далее $f(x)$ – функция, определенная в окрестности точки x_0. Будем предполагать, что она класса C^∞ в этой окрестности. Тогда определен дифференциал этой функции $df(x_0)$ и он является линейной формой на касательном пространстве $T_{x_0}U$. Действительно, дифференциал $df(x_0)$ является линейной функцией от приращения Δx, но Δx – это вектор с началом в точке x_0. Таким образом, дифференциал $df(x_0)$ является элементом двойственного пространства $(T_{x_0}U)^*$. Оно обозначается через $T^*_{x_0}U$ и называется *кокасательным* пространством к U в точке x_0. Элементы пространства $T^*_{x_0}U$ называются *касательными ковекторами*. Итак, дифференциал $df(x_0)$ является касательным ковектором. Рассмотрим дифференциалы координатных функций $dx_1,\dots,dx_n$. Равенство $dx_i = \Delta x_i$ означает, что значение дифференциала dx_i на векторе $v = \Delta x$ равно i-ой координате вектора v в стандартном базисе $e_1,\dots,e_n$. Таким образом, дифференциалы координатных функций $dx_1,\dots,dx_n$ в точке x_0 являются элементами двойственного базиса $e_1^*,\dots,e_n^*$, а разложение

дифференциала функции $f(x)$

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i$$

является разложением ковектора $df(x_0)$ по базису ковекторов $e_1^*, \ldots, e_n^*$.

Если функции f_1, f_2 совпадают при ограничении их на маленькую окрестность точки x_0, то дифференциалы $df_1(x_0), df_2(x_0)$ равны. Отсюда следует, что удобно рассматривать дифференциал от ростка функции. Будем говорить, что *функции f_1, f_2 имеют одинаковые ростки в точке x_0, если при ограничении их на достаточно маленькую окрестность точки x_0 получаем равные функции.* Заметим, что мы рассматриваем только функции класса C^∞. Можно дать определение ростка более формально следующим образом. Пусть функции f_1, f_2 определены в окрестностях U_1, U_2 точки x_0, соответственно. Будем считать функции f_1, f_2 *эквивалентными* ($f_1 \sim f_2$), если существует третья окрестность $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ точки x_0 такая, что $f_1 |_{U_3} = f_2 |_{U_3}$. Тогда *росток функции f* — это *класс эквивалентности* данной функции. Множество ростков функций в точке x_0 обозначим через $\mathcal{O}_{x_0}$. Росток функции f будем обозначать через $[f]$, а если не приводит к путанице, то просто через f. Формулы

$$c[f] = [cf], \quad [f] + [g] = [f + g], \quad [f] \cdot [g]$$

определяют операцию умножения ростка на число, операцию сложения ростков и операцию умножения ростков. Благодаря этим операциям множество $\mathcal{O}_{x_0}$ становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$. Дифференциал определяет отображение

$$d : \mathcal{O}_{x_0} \to T_{x_0}^* U,$$

которое линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяет правилу Лейбница

$$d([f] \cdot [g]) = g(x_0) \cdot d[f] + f(x_0) \cdot d[g].$$

Если $f \in \mathcal{O}_{x_0}$ и $v \in T_{x_0}$, то число $df(x_0)(v)$ будем обозначать через $\partial_v(f)$ и называть *производной f по направлению вектора v*. В результате получаем отображение

$$\partial_v : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathbf{R},$$

которое линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial_v(f) + f(x_0) \cdot \partial_v(g).$$

Определение 1.1. *Отображение $\partial : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathbf{R}$ называется дифф ренцированием алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$, если оно линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяе правилу Лейбница*

$$\partial(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial f + f(x_0) \cdot \partial g.$$

Задача 1.2. Показать, что $\partial(C) = 0$, где $C = const$.

Таким образом, каждый касательный вектор $v \in T_{x_0}U$ определяе дифференцирование алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$. В частности, базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$ определяют дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, то есть

$$\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначим через D_{x_0} множество дифференцирований алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$, то гда формулы

$$(c\partial)(f) = c\partial(f), \quad (\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1(f) + \partial_2(f)$$

определяют операцию умножения на число и операцию сложения во мно жестве D_{x_0}, благодаря которым D_{x_0} становится векторным простран ством.

Теорема 1.3. *Дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ образуют базис про странства дифференцирований D_{x_0}.*

Сначала будет доказана

Лемма 1.4. *Пусть $f(x)$ функция класса C^∞ в сферической окрест ности U точки $0 \in \mathbf{R}^n$, тогда существуют функции класса C^∞ $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ в области U такие, что*

$$f(x) = f(0) + g_1(x) \cdot x_1 + \cdots + g_n(x) \cdot x_n,$$

$$g_1(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}, \ldots, g_n(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенства

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt =$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_1^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i\Big)\, dt = \sum_1^n \Big(\int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt\Big) \cdot x_i.$$

Осталось положить

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Покажем сначала, что дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ линейно независимы. Если имеем соотношение

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} = 0,$$

то, применяя его к координатной функции x_i, получим равенство $a_i = 0$. Итак, линейная независимость дифференцирований $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ доказана. Пусть теперь ∂ – произвольное дифференцирование, покажем, что существуют такие числа $a_1, \dots, a_n$, что

$$\partial = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Для этого положим $a_i = \partial(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, (что необходимо) и проверим, что дифференцирование

$$\partial' = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

совпадает с дифференцированием ∂. Для сокращения записи мы можем рассматривать только случай $x_0 = 0$, в противном случае можно совершить замену координат $x \to x - x_0$. Пусть $f \in \mathcal{O}_0$, докажем равенство $\partial(f) = \partial'(f)$. По лемме 1.4 имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i g(x) \cdot x_i, \quad g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Применим лемму 1.4 к функциям $g_1(x), \dots, g_n(x)$, тогда получим, что существуют функции $h_{ij}(x)$; $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$g_i(x) = g_i(0) + \sum_j h_{ij}(x) \cdot x_j.$$

Следовательно, имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \cdot x_i + \sum_{i,j} h_{ij}(x) \cdot x_i x_j.$$

Применим теперь дифференцирования ∂, ∂' к этому разложению, тогда получим равенства

$$\partial(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}, \quad \partial'(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что отображение $T^*_{x_0} \to D_{x_0}$, заданное правилом $v \to \partial_v$, является изоморфизмом векторных пространств.

Пусть для каждой точки $x \in U$ задан вектор $v(x) \in T_xU$, тогда говорят, что задано *векторное поле* $v(x)$ на U. Векторное поле $v(x)$ можно разложить по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$v(x) = a_1(x)e_1 + \cdots + a_n(x)e_n,$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ функции на U. Если все эти функции принадлежат классу C^∞, то векторное поле $v(x)$ называется *дифференцируемым* (бесконечное число раз). Множество дифференцируемых векторных полей на U обозначим через $\mathcal{T}(U)$. На этом множестве определена операция умножения на число и операция сложения, они превращают его в векторное пространство.

Обозначим через $\mathcal{O}(U)$ множество функций класса C^∞ на U. На этом множестве определена операция сложения и операция умножения, которые превращают его в коммутативное кольцо. Если $v(x)$ – векторное поле, $a(x)$ – функция, то определено векторное поле $a(x)v(x)$. Благодаря этой операции умножения на функции множество $\mathcal{T}(U)$ становится модулем над кольцом $\mathcal{O}(U)$. Мы хотим определить еще одну операцию на множестве дифференцируемых векторных полей, она обозначается через $[v_1, v_2]$ и называется коммутатором векторных полей v_1, v_2.

Теорема 1.5. *Пусть v_1, v_2 – дифференцируемые векторные поля на U, тогда существует и единственное дифференцируемое векторное поле w на U такое, что для каждой функции $f \in \mathcal{O}(U)$ выполняется равенство*

$$\partial_w(f) = \partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)). \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть

$$v_1 = \sum_i a_1^i e_i, \quad v_2 = \sum_i a_2^i e_i.$$

Вычислим правую часть равенства (1.1)

$$\partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)) =$$

$$(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j})((\sum_i a_1^i \frac{\partial}{\partial x_i})(f)) - (\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j})((\sum_i a_2^i \frac{\partial}{\partial x_i})(f)) =$$

$$(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_i a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_i}) - (\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_i a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_i}) =$$

$$\sum_{i,j} a_2^j \cdot \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i,j} a_1^j \cdot \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$(\sum_i (\sum_j (a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j})) \frac{\partial}{\partial x_i})(f).$$

Из этих вычислений следует, что векторное поле

$$w = \sum_i \Big(\sum_j \Big(a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j} \Big) \Big) e_i$$

является искомым векторным полем, причем других векторных полей, удовлетворяющих равенству (1.1), нет. Теорема доказана.

Векторное поле w из теоремы 1.5 обозначается через $[v_1, v_2]$ и называется *коммутатором* векторных полей v_1, v_2.

Задача 1.6. Пусть v_1, v_2, v_3 дифференцируемые векторные поля на U. Показать, что выполняются следующие равенства:

1) $[v_2, v_1] = -[v_1, v_2]$,
2) $[a_1 v_1 + a_2 v_2, v_3] = a_1[v_1, v_3] + a_2[v_2, v_3], \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$,
3) $[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0$,
4) $[f v_1, v_2] = f[v_1, v_2] - (\partial_{v_2}) v_1, \quad f \in O(U)$.

2. Риманова метрика в области $\mathbf{R}^n$.

Пусть на каждом касательном векторном пространстве $T_x U$, $x \in U$, определено скалярное умножение $(v, w)_x$, $v, w \in T_x U$; тогда говорят, что на U задана *риманова метрика*. Таким образом, риманова метрика — это "поле" скалярных умножений. Опишем риманову метрику в координатах. Если $g_{ij}(x) = (e_i, e_j)_x$ и $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$, $w = w^1 e_1 + \dots + w^n e_n$, то

$$(v, w)_x = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i w^j. \tag{2.1}$$

Данная риманова метрика называется *дифференцируемой*, если все функции $g_{ij}(x)$, $1 \le i,j \le n$, являются функциями класса C^∞. Далее мы предполагаем, что риманова метрика дифференцируемая. Так как $v^i = dx_i(v)$, $w^j = dx_j(w)$, то равенство (2.1) можно записать следующим образом

$$(v,w)_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i(v) \cdot dx_j(w).$$

С помощью римановой метрики можно определить длину вектора $v \in T_xU$ по формуле

$$|v| = \sqrt{(v,v)_x} = (\sum_{i,j} g_{ij}(x)\, v^i v^j)^{1/2},$$

а также угол между векторами $v, w \in T_xU$ по формуле

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{(v,w)_x}{|v| \cdot |w|} =$$

$$\frac{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i w^j}{(\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j)^{1/2} \cdot (\sum_{i,j} g_{ij}(x) w^i w^j)^{1/2}}.$$

Кроме этого, определяется длина кривой $\Gamma \subset U$, заданной параметрически: $x = x(t)$, $a \le t \le b$, по формуле

$$s(\Gamma) = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt =$$

$$\int_a^b (\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\ \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t))^{1/2}\, dt. \tag{2.2}$$

Предполагается, что параметризация $x = x(t)$ класса C^1.

Вектор

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

называется *вектором скорости* (см. рис.2). Произведение $|\dot{x}(t)|\, dt$ можно рассматривать как "бесконечно малый" путь, пройденный за "бесконечно малое" время dt, поэтому интеграл в формуле (2.2) можно рассматривать как путь, пройденный от момента $t = a$ до момента $t = b$,

что оправдывает определение длины кривой по формуле (2.2). Благодаря формуле (2.2) риманову метрику обычно обозначают следующим образом

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j,$$

где ds – дифференциал длины параметрической кривой.

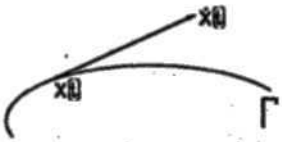

Рисунок 2.

В качестве примера рассмотрим метрику Лобачевского на круге $x^2 + y^2 < 1$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Далее мы найдем линии в этом круге, которые выполняют роль прямых в этой "плоскости Лобачевского", в частности, интервалы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ y = kx \end{cases}$$

являются "прямыми", проходящими через точку $O(0,0)$. Вычислим длину отрезка "прямой": $x \in [0; 1/2]$, $y = 0$. Имеем

$$s = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\, ln\, 3.$$

Задача 2.1. Показать, что каждый радиус окружности $x^2 + y^2 = 1/4$ имеет в метрике Лобачевского длину $\frac{1}{2}\, ln\, 3$. Найти длину окружности $x^2 + y^2 = 1/4$ в метрике Лобачевского.

3. Ковариантное дифференцирование.

Пусть $v \in T_{x_0}U$ – касательный вектор, $w(x)$ – дифференцируемое векторное поле, определенное в окрестности точки $x_0 \in U$. Тогда определена производная функции $w(x)$ в точке x_0 по направлению v, которая обозначается через $\partial_v w$. Эта производная определяется равенством

$$\partial_v w = \sum_i (\partial_v w^i) e_i,$$

где $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ – координаты $w(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Удобнее дифференцировать ростки векторных полей. Они определяются так же, как ростки функций. Множество ростков дифференцируемых векторных полей в точке x_0 будем обозначать через $\mathcal{T}_{x_0}$. Это множество является векторным пространством над $\mathbf{R}$, а также модулем над кольцом $\mathcal{O}_{x_0}$. Таким образом, дифференцирование векторного поля по направлению вектора задает отображение

$$\partial : T_{x_0} \times \mathcal{T}_{x_0} \to T_{x_0}, \quad (v, w) \to \partial_v w.$$

Предлагается проверить, что это отображение удовлетворяет свойствам:

1) ∂ – билинейное отображение;
2) ∂ удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \partial_v w,$$

где $f \in \mathcal{O}_{x_0}$.

Определение 3.1. *Ковариантное дифференцирование векторных полей в точке x_0 – это билинейное отображение*

$$\nabla : T_{x_0} \times \mathcal{T}_{x_0} \to T_{x_0}, \quad (v, w) \to \nabla_v w,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \nabla_v w,$$

где $f \in \mathcal{O}_{x_0}$.

Таким образом, обычное дифференцирование ∂ дает пример ковариантного дифференцирования. Сравним произвольное ковариантное дифференцирование с обычным дифференцированием. Для этого обозначим через Γ_{ij}^k k-ую координату вектора $\nabla_{e_i} e_j$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то есть

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Числа Γ_{ij}^k, $1 \le i,j,k \le n$, называются *символами Кристоффеля* для данного ковариантного дифференцирования.

Теорема 3.2. *Выполняется равенство*

$$\nabla_v w = \partial_v w + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j(x_0) e_k, \tag{3.1}$$

где $v^1, \dots, v^n$ *– координаты* v, $w^1, \dots, w^n$ *– координаты* w.

Доказательство.

$$\nabla_v w = \nabla_{\sum_i v^i e_i} \sum_j w^j e_j = \sum_i v^i \nabla_{e_i} \sum_j w^j e_j =$$

$$\sum_i v^i \sum_j (\partial_{e_i}) w^j e_j + \sum_i v^i \sum_j w^j \nabla_{e_i} e_j =$$

$$\sum_i v^i \partial_{e_i} w + \sum_i v^i \sum_{j,k} w^j \Gamma_{ij}^k e_k =$$

$$\partial_v w + \sum_{j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.3. Набор чисел Γ_{ij}^k определяет билинейное отображение $\Gamma : T_{x_0} \times T_{x_0} \to T_{x_0}$ по формуле

$$\Gamma(v, w) = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k. \tag{3.2}$$

Таким образом формулу (3.1) можно записать следующим образом

$$\nabla_v w = \partial_v w + \Gamma(v, w(x_0)), \tag{3.3}$$

где $\Gamma(v, w(x_0))$ – билинейное отображение, определенное формулой (3.2).

Замечание 3.4. Если $\Gamma : T_{x_0} \times T_{x_0} \to T_{x_0}$ – произвольное билинейное отображение, то формула (3.3) определяет ковариантное дифференцирование.

4. Аффинная связность.

Пусть в каждой точке $x \in U$ задано ковариантное дифференцирование, то есть билинейное отображение

$$\nabla : T_x \times T_x \to T_x,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница. Тогда говорят, что на U определена *аффинная связность*. Таким образом, аффинная связность является "полем" ковариантных дифференцирований. Если $v(x), w(x)$ дифференцируемые векторные поля, то ковариантная производная в переменной точке $\nabla_{v(x)}w(x)$ является векторным полем. Мы будем предполагать, что векторное поле $\nabla_{v(x)}w(x)$ является дифференцируемым для каждых дифференцируемых векторных полей $v(x), w(x)$. В этом случае связность называется *дифференцируемой*. Заметим, что для выполнения этого условия достаточно потребовать дифференцирусмости векторных полей $\nabla_{e_i}e_j$, $1 \leq i, j \leq n$, где $e_1, \ldots, e_n$ рассматриваются как векторные поля. Так как k-ая координата векторного поля $\nabla_{e_i}e_j$ является символом Кристоффеля $\Gamma^k_{ij}(x)$, то для дифференцируемости связности достаточно потребовать, чтобы символы Кристоффеля были функциями класса C^∞.

Главное значение аффинной связности состоит в том, что она дает возможность определить новый параллельный перенос вдоль параметрической кривой. Но сначала мы определим ковариантную производную вдоль кривой.

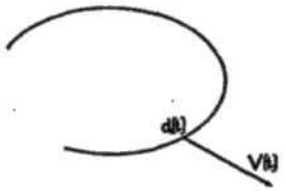

Рисунок 3.

Пусть дана параметрическая кривая класса C^∞ в области U, то есть отображение класса C^∞ $\alpha : I \to U$, где I – промежуток в $\mathbf{R}$. *Векторное поле вдоль кривой* α — это функция $v(t)$, $t \in I$, такая, что $v(t) \in T_{\alpha(t)}U$ (см. рис.3). Мы предполагаем, что функция $v(t)$ класса C^∞. Векторному полю $v(t)$ вдоль кривой α соответствует новое векторное поле $\frac{Dv(t)}{dt}$ вдоль кривой α, называемое *ковариантной производной поля* $v(t)$. Операция $v(t) \to \frac{Dv(t)}{dt}$ определяется следующими аксиомами:

1) если $v(t), w(t)$ – векторные поля вдоль кривой α, то

$$\frac{D(v(t)+w(t))}{dt} = \frac{Dv(t)}{dt} + \frac{Dw(t)}{dt};$$

2) если $f(t)$ функция класса C^∞ на I, то

$$\frac{D(f(t)v(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \cdot v(t) + f(t) \cdot \frac{Dv(t)}{dt};$$

3) если $v(t)$ индуцировано дифференцируемым векторным полем $w(x)$ на U, то есть $v(t) = w(\alpha(t))$ при каждом $t \in I$, то

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \nabla_{\dot\alpha(t)} w.$$

Теорема 4.1. *Существует одна и только одна операция $v(t) \to \frac{Dv(t)}{dt}$, удовлетворяющая трем перечисленным условиям.*

Доказательство. Если $v(t) = \sum_j v^j(t) e_j$, то из аксиом 1), 2), 3) вытекает, что

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \sum_j \Big(\frac{dv^j(t)}{dt} e_j + v^j(t) \nabla_{\dot\alpha(t)} e_j \Big) =$$

$$\sum_k \Big(\frac{dv^k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma^k_{ij}(\alpha(t)) v^j(t) \Big) e_k, \tag{4.1}$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – координаты $\alpha(t)$. Обратно, не трудно проверить, что определенная последним равенством операция $\frac{Dv(t)}{dt}$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Теорема доказана.

Определение 4.2. *Векторное поле $v(t)$ вдоль кривой $\alpha(t)$ называется параллельным, если его ковариантная производная $\frac{Dv(t)}{dt}$ тождественно равна нулю.*

Теорема 4.3. *Пусть дана кривая $\alpha(t)$ и вектор $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}U$. Тогда существует одно и только одно параллельное векторное поле $v(t)$ вдоль кривой $\alpha(t)$ такое, что $v(t_0) = v_0$.*

Доказательство. Дифференциальные уравнения

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma^k_{ij}(\alpha(t)) v^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

имеют решение $v^k(t)$ однозначно определенное начальными данными $v^k(t_0) = v^k_0$. Так как уравнения линейны, то решения можно определить для всех $t \in I$. Теорема доказана.

5. Риманова связность.

Пусть на U задана риманова метрика $(v,w)_x$ и связность ∇. Связность *совместима с римановой метрикой*, если параллельный перенос, заданный этой связностью, сохраняет скалярное произведение. То есть для любой параметрической кривой $\alpha(t)$ в U и для любой пары параллельных векторных полей $v(t), w(t)$ вдоль $\alpha(t)$ скалярное произведение $(v(t), w(t))_{\alpha(t)}$ не зависит от t.

Теорема 5.1. *Предположим, что связность совместима с римановой метрикой и $v(t), w(t)$ – два векторных поля вдоль кривой $\alpha(t)$. Тогда выполняется равенство*

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t))_{\alpha(t)} = \left(\frac{Dv(t)}{dt}, w(t)\right)_{\alpha(t)} + \left(v(t), \frac{Dw(t)}{dt}\right)_{\alpha(t)}. \qquad (5.1)$$

Доказательство. Выберем ортонормированный базис в $T_{\alpha(t_0)}U$ $e_1, \ldots, e_n$, и затем параллельно разнесем его вдоль кривой $\alpha(t)$. Тогда получим параллельные векторные поля $e_1(t), \ldots, e_n(t)$, образующие ортонормированный базис в каждой точке $\alpha(t)$. Векторные поля $v(t), w(t)$ можно разложить по базису $e_1(t), \ldots, e_n(t)$

$$v(t) = \sum_i v^i(t) e_i(t), \quad w(t) = \sum_i w^i(t) e_i(t)$$

Следовательно, $(v(t), w(t)) = \sum_i v^i(t) w^i(t)$ и

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dv(t)}{dt} e_i(t), \ \frac{Dw(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dw(t)}{dt} e_i(t).$$

Поэтому,

$$\left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + \left(v, \frac{Dw}{dt}\right) = \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v, w).$$

Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Для любых векторных полей v, w на U и вектора $u \in T_{x_0}U$ выполняется равенство*

$$\partial_u(v, w) = (\nabla_u v, w) + (v, \nabla_u w). \qquad (5.2)$$

Доказательство. Выберем параметрическую кривую $\alpha(t)$, имеющую при $t = 0$ вектор скорости u, а затем применим теорему 5.1, тогда

из равенства (5.1) получим при $t = 0$ равенство (5.2). Следствие доказано.

Связность ∇ *называется симметрической, если для любых* векторных полей v, w выполняется равенство

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w]. \tag{5.3}$$

Применим соотношение (5.3) к базисным векторным полям e_i, e_j. Так как $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, то $[e_i, e_j] = 0$; поэтому $\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = 0$. Из равенства

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$$

тогда получаем равенство

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{5.4}$$

Мы показали, что из равенства (5.3) следует равенство (5.4). Предлагается проверить, что верно обратное утверждение. Итак, симметричность связности означает симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов.

Теорема 5.3. *Существует и единственная симметрическая связность на U, совместимая с данной римановой метрикой.*

Доказательство. Сначала установим единственность связности. Применим равенство (5.2) к базисным векторным полям e_i, e_j, e_k. Так как $(e_i, e_j) = g_{ij}$, то получаем тождество

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = (\nabla_{e_i} e_j, e_k) + (e_j, \nabla_{e_i} e_k).$$

Переставляя индексы i, j, k получим еще следующие тождества

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = (\nabla_{e_k} e_i, e_j) + (e_i, \nabla_{e_k} e_j),$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = (\nabla_{e_j} e_i, e_k) + (e_i, \nabla_{e_j} e_k).$$

Из первого тождества вычтем второе, а затем прибавим третье, тогда получается *первое тождество Кристоффеля* (нужно использовать равенство $\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i$)

$$(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right).$$

Левая часть этого тождества равна $\sum_i \Gamma_{ij}^k g_{ik}$. Умножая его на обратную к (g_{ik}) матрицу (g^{ki}), получим *второе тождество Кристоффеля*

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right) g^{kl} \tag{5.5}$$

Следовательно, связность однозначно определяется метрикой. Обратно, определяя Γ_{ij}^k формулой (5.5), можно проверить, что полученная связность симметрическая и совместна с заданной метрикой.

Теорема доказана.

Связность из теоремы 5.3 называется *римановой связностью или связностью Леви-Чивита*, ее символы Кристоффеля вычисляются по формуле (5.5). Далее рассматривается только риманова связность.

Параметрическая кривая $\alpha : I \to U$ называтся *геодезической*, если векторное поле ускорения $\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$ тождественно равно нулю. Соответственно, поле скорости $\frac{d\alpha}{dt}$ должно быть параллельным вдоль $\alpha(t)$. Если α – геодезическая, то как показывает тождество

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 2\left(\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0,$$

длина $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right)^{1/2}$ вектора скорости постоянна вдоль α. Вводя длину дуги

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \cdot (t - t_0),$$

можно выразить это утверждение следующим образом: *параметр t вдоль геодезической линейно зависит от длины дуги*

$$t = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right|^{-1} \cdot s + t_0$$

В координатах $x_1, \ldots, x_n$ уравнение $\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x_1, \ldots, x_n)\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0. \tag{5.6}$$

6. Изометрии римановой области.

Пусть $F : U \to U$ – отображение класса C^∞, $x_0 \in U$, $y_0 = F(x_0)$, тогда дифференциал $dF(x_0)$ задает линейное отображение

$$dF(x_0) : T_{x_0}U \to T_{y_0}U. \tag{6.1}$$

А именно

$$dF(x_0)(v) = \sum_{k=1}^{n} dF_k(x_0)(v) \cdot e_k,$$

где $F_1(x), \dots, F_n(x)$ – координаты $F(x)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. В частности, имеем равенство

$$dF(x_0)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_i} e_k.$$

Таким образом, матрица линейного отображения (6.1) в базисе $e_1, \dots, e_n$ является матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Далее, для краткости, отображение (6.1) будем обозначать через

$$F_* : T_{x_0}U \to T_{y_0}U. \tag{6.3}$$

Пусть далее отображение $F : U \to U$ является *диффеоморфизмом* класса C^∞. Это означает, что отображение $F : U \to U$ является биекцией, и отображения F, F^{-1} принадлежат классу C^∞. Тогда матрица Якоби (6.2) имеет обратную матрицу, а именно матрицу Якоби отображения $F^{-1} : U \to U$ в точке y_0. Следовательно, отображение касательных пространств (6.3) является изоморфизмом. Пусть на U определена риманова метрика $(v, w)_x$, тогда диффеоморфизм $F : U \to U$ называется *изометрией*, если для каждой точки $x \in U$ отображение $F_* : T_xU \to T_yU$ сохраняет скалярное произведение, то есть

$$(v, w)_x = (F_*v, F_*w)_y, \quad y = F(x). \tag{6.4}$$

Так как

$$F_*e_i = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} \cdot e_k, \; F_*e_j = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} \cdot e_k,$$

то из (6.4) получаем набор равенств

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y)\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F_l(x)}{\partial x_j} = g_{ij}(x). \tag{6.5}$$

Нетрудно проверить, что если выполняются равенства (6.5) при $1 \leq i, j \leq n$, то выполняется равенство (6.4). Заметим также, что набор равенств (6.5) равносилен равенству

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y)\, dy_k\, dy_l = \sum_{i,j} g_{kl}(x)\, dx_i\, dx_j, \tag{6.6}$$

где y_k – k-ая координата функции $y = F(x)$.

В качестве примера рассмотрим евклидову метрику на $\mathbf{R}^n$

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2.$$

Это риманова метрика с $g_{ij} = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

– символ Кронекера. Рассмотрим аффинное преобразование $\mathbf{R}^n$ $y = Ax + b$, где $A = (a_{ij})$ – обратимая матрица, $b \in \mathbf{R}^n$ – вектор. Равенство (6.5) тогда приобретет вид

$$\sum_{k,l} \delta_{kl} a_{ki} a_{lj} = \delta_{ij},$$

то есть

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

что означает ортогональность матрицы A.

Пусть $\alpha(t)$ кривая в области U, тогда через $\tilde{\alpha}(t)$ обозначим кривую $F(\alpha(t))$. Покажем, что при изометрии $F : U \to U$ длины кривых $\alpha(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ совпадают. Действительно,

$$s(\tilde{\alpha}) = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\right| dt = \int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{d\alpha}{dt}\right| dt =$$

$$\int_a^b \left|F_*\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\right| dt = \int_a^b \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt = s(\alpha).$$

Далее мы покажем, что если $\alpha(t)$ – геодезическая, а $F : U \to U$ – изометрия, то кривая $\tilde{\alpha}(t)$ также будет геодезической.

7. Вариационное определение геодезических.

Пусть $L(x,v)$ – функция класса C^∞ точки $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$ и касательного вектора $v = (v^1,\dots,v^n) \in T_xU$ в этой точке. Рассмотрим фиксированную пару точек $x_0, x_1 \in U$ и всевозможные кривые класса C^∞ $\alpha(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ (с фиксированными t_0, t_1), соединяющие эти точки: $\alpha(t_0) = x_0$, $\alpha(t_1) = x_1$. Рассмотрим теперь величину

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt,$$

она называется *действием*. На какой кривой $\alpha(t)$ действие $S[\alpha]$ будет минимальным?

Лемма 7.1. *Если $S[\alpha]$ минимально, то для любой вектор-функции $\beta(t)$ класса C^∞, обращающейся в нуль на концах t_0, t_1, выполняется тождество*

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]\big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Доказательство получается из того, что функция $S[\alpha + \varepsilon\beta]$ в точке $\varepsilon = 0$ принимает минимальное значение.

Теорема 7.2. *Если величина*

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt$$

достигает минимума на некоторой кривой $\alpha(t) = x(t)$, то вдоль кривой $x(t)$ выполнены уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n, \tag{7.1}$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}\Big|_{v=\dot{x}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial x^j}\dot{x}_j\Big)\Big|_{v=\dot{x}}.$$

Доказательство. Развернем выражение

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]\big|_{\varepsilon=0},$$

тогда имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha+\varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\beta_i+\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot{\beta}_i\right)\right)dt=0, \qquad (7.2)$$

где интеграл вычислен вдоль кривой $\alpha(t)=x(t)$. Это равенство верно для любой вектор-функции $\beta(t)$ класса C^∞ такой, что $\beta(t_0)=\beta(t_1)=0$. С помощью интегрирования по частям получаем равенства

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot{\beta}_i\,dt=\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\beta_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\beta_i\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\beta_i\,dt.$$

Тогда равенство (7.2) можно записать следующим образом

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha+\varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]\beta_i\right)dt=0. \qquad (7,3)$$

Так как функции $\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t)$ могут быть любыми функциями C^∞, обращающимися в нуль в точках t_0,t_1, то равенство (7.3) равносильно системе равенств (7.1). Теорема доказана.

Заметим, что решения системы уравнений (7.1) называются *экстремалями* функционала действия $S[\alpha]$. Они дают необходимые условия для того, чтобы значение $S[\alpha]$ на заданной кривой $\alpha(t)=x(t)$ было экстремальным. Имеются достаточные условия для этого, но про них речь пойдет в курсе "Методы оптимизации".

Пусть теперь на U задана риманова метрика

$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}(x)dx_idx_j,$$

тогда рассмотрим функционал

$$S[\alpha]=\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\alpha}(t)|^2\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i,j}g_{ij}(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t)\dot{\alpha}_j(t)\right)dt. \qquad (7.4)$$

Теорема 7.3. *Экстремали функционала (7.4) — это в точности геодезические.*

Доказательство. Так как

$$L(x,v)=\sum_{k,l}g_{kl}(x)v^kv^l,$$

то

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = 2\sum_l g_{il}v^l, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} v^j v^l.$$

Поэтому уравнение (7.1) имеет вид

$$2\sum_l g_{il}\ddot{x}_l + 2\sum_{j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}\dot{x}_j\dot{x}_l - \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\dot{x}_j\dot{x}_l = 0.$$

Так как

$$\sum_i g_{il}g^{ik} = \delta_l^k,$$

то получаем

$$\ddot{x}_k + \sum_{jl}\Big(\sum_i \Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\Big)g^{ik}\Big)\dot{x}_j\dot{x}_l = 0.$$

Из тождества

$$\sum_{i,j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} g^{ik}\dot{x}_j\dot{x}_l = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_l}\Big)g^{ik}\dot{x}_j\dot{x}_l$$

получаем, что предыдущее уравнение имеет вид

$$\ddot{x}_k + \sum_{j,l}\Gamma_{jl}^k\dot{x}_j\dot{x}_l = 0,$$

где

$$\Gamma_{jl}^k = \sum_i \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\Big)g^{ik},$$

то есть получаем уравнение геодезических (5.6). Теорема доказана.

Следствие 7.4. *Если $F : U \to U$ – изометрия, $\alpha(t)$ – геодезическая, то $\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$ – также геодезическая.*

Доказательство. Так как $S[\tilde{\alpha}] = S[\alpha]$, то кривые $\alpha, \tilde{\alpha}$ становятся одновременно экстремалями функционала S. Это вытекает из определения экстремали

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0} \equiv 0.$$

Следствие доказано.

Задача 7.5. Показать, что экстремали функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t)\dot{\alpha}_j(t)\Big)^{1/2} dt$$

будут также совпадать с геодезическими, если рассматривать параметрические кривые с параметром пропорциональным натуральному параметру.

8. Плоскость Лобачевского.

Рассмотрим круг $U = \{x^2 + y^2 < 1\}$ с метрикой Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \; g_{12} = g_{21} = 0.$$

Формула (5.5) приводит к следующим равенствам для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Таким образом, уравнения геодезических имеют вид:

$$\ddot{x}_1 + \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + \frac{4x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) + \frac{4x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 = 0. \qquad (8.1)$$

Непосредственно проверяется, что параметрическая кривая $(x_1, x_2) = (th\ t, 0)$ удовлетворяет уравнениям (8.1), то есть является геодезической. Чтобы получить другие геодезические, мы рассмотрим всевозможные изометрии "плоскости Лобачевского". Эти изометрии хорошо записываются в комплексной форме. А именно, положим $x + iy = z$, тогда метрика Лобачевского приобретает вид

$$ds^2 = \frac{dz\, d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})}. \qquad (8.2)$$

Непосредственно проверяется, что дробно-линейное преобразование единичного круга

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \; |a| < 1 \qquad (8.3)$$

сохраняет метрику (8.2), то есть является изометрией.

В ТФКП доказывается, что интервал $(-1;1)$ на оси Ox при преобразовании (8.3) переходит в дугу окружности ортогональной стандартной окружности $x^2+y^2=1$ (см. рис.4). Так как через данную точку круга U в заданном направлении проходит одна такая окружность (см. рис.4), то получаем, что все геодезические исчерпываются такими дугами. Действительно, решения системы (8.1) определяются начальной точкой и вектором скорости в этой точке. В частности, все диаметры круга U являются геодезическими, что утверждалось раньше. Заметим, что геодезические играют роль прямых.

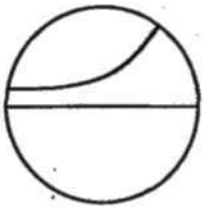

Рисунок 4.

Пусть A, B – две точки в круге U (см. рис.5), проведем через них единственную геодезическую; длину дуги $\overset{\frown}{AB}$ обозначим через $\rho(A,B)$ и назовем расстоянием от точки A до точки B. Это расстояние можно определить с помощью двойного отношения четырех точек. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 четыре точки на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, тогда через (z_1, z_2, z_3, z_4) обозначается отоношение

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2},$$

которое называется *двойным отношением.*

В ТФКП доказывается, что оно сохраняется при дробно-линейных отображениях, то есть если w_1, w_2, w_3, w_4 – образы точек z_1, z_2, z_3, z_4 при дробно-линейном отображении

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0,$$

то $(w_1, w_2, w_3, w_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B}$ точки "пересечения" геодезической AB с окружностью $|z|=1$(см. рис.5), тогда можно образовать двойное отношение $(\tilde{A}, \tilde{B}, A, B)$.

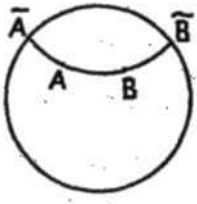

Рисунок 5.

Теорема 8.1. *Выполняется равенство*

$$\rho(A,B) = \frac{1}{2}\, ln\,(\tilde{A},\tilde{B},A,B). \tag{8.4}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (8.4) через $d(A,B)$. Проверяется, что $\rho(A,B)$ и $d(A,B)$ удовлетворяют всем аксиомам расстояния. С другой стороны, они не меняются при дробно-линейных преобразованиях (8.3). Отсюда вытекает, что они должны быть пропорциональны. Осталось убедиться что $\rho(0,1/2) = d(0,1/2) = \frac{1}{2} ln\, 3$. Теорема доказана.

9. Тензор кривизны римановой связности.

Рассмотрим вторые смешанные ковариантные производные векторного поля $v = v(x)$ на области $U \subset \mathbf{R}^n$

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} v), \quad \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} v).$$

Они не обязаны совпадать, в связи с этим l-ую координату векторного поля

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} e_k) - \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} e_k)$$

обозначим через R^l_{ijk}. Тогда получим набор из n^4 функций на U. Этот набор функций называется тензором кривизны исходной связности. Вычислим его через символы Кристоффеля.

Теорема 9.1. *Выполняются равенства*

$$R^l_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i}\right) + \sum_s \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}\right).$$

Доказательство. Для краткости обозначим ∇_{e_i} через ∇_i, тогда имеем равенства

$$\sum_l R^l_{ijk} e_l = \nabla_j(\nabla_i e_k) - \nabla_i(\nabla_j e_k) = \nabla_j(\sum_s \Gamma^s_{ik} e_s) - \nabla_i(\sum_s \Gamma^s_{jk} e_s) =$$

$$\sum_s \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x_j} e_s + \sum_s \Gamma^s_{ik} \sum_t \Gamma^t_{js} e_t - \sum_s \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} e_s - \sum_s \Gamma^s_{jk} \sum_t \Gamma^t_{is} e_t =$$

$$\sum_s \left(\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} \right) e_s + \sum_t \left(\sum_s \left(\Gamma^s_{ik} \Gamma^t_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^t_{is} \right) \right) e_t =$$

$$\sum_l \left[\left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} \right) + \sum_s \left(\Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} \right) \right] e_l.$$

Теорема доказана.

Можно дать более инвариантное определение тензора кривизны, то есть не зависящее от выбранного базиса $e_1, \ldots, e_n$. По трем векторным полям $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ определим новое векторное поле $R(u,v)w$ с помощью равенства

$$R(u,v)w = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]} w. \tag{9.1}$$

Теорема 9.2. *Значение $R(u,v)w$ в точке $x_0 \in U$ зависит только от значений векторных полей $u(x), v(x), w(x)$ в этой точке, а не зависит от их значений в близких точках. Далее, соответствие*

$$(u(x_0), v(x_0), w(x_0)) \to R(u(x_0), v(x_0))w(x_0)$$

является трилинейным отображением

$$T_{x_0}U \times T_{x_0}U \times T_{x_0}U \to T_{x_0}U.$$

Доказательство. Очевидно, $R(u,v)w$ есть трилинейная функция от u, v, w. Если заменить u на fu, где f – функция, то три члена в правой части равенства (9.1) заменятся, соответственно, членами

1) $\nabla_{fu}(\nabla_v w)$,
2) $(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_v(\nabla_u w)$,
3) $-(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_{[u,v]} w)$, поэтому получаем тождество

$$R(fu,v)w = fR(u,v)w.$$

Соответствующие тождества для v, w получаются при помощи аналогичных вычислений. Предположим теперь, что

$$u = \sum_i u^i e_i,\ v = \sum_j v^j e_j,\ w = \sum_k w^k e_k.$$

Тогда

$$R(u,v)w = \sum_{i,j,k} u^i v^j w^k R(e_i, e_j)e_k = \sum_{i,j,k,l} u^i v^j w^k R^l_{ijk} e_l.$$

Тем самым $R(u,v)w$ в точке x_0 зависит только от значений $u^i(x_0), v^j(x_0)$, $w^k(x_0)$, то есть от значений $u(x_0), v(x_0), w(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 9.3. Теорема 9.2 показывает, что $R(u,v)w$ является тензорным полем на U, а из доказательства видно, что R^l_{ijk} – координаты этого тензорного поля. Заметим, что значение $R(u,v)w$ в точке x_0 — это элемент тензорного произведения

$$T^*_{x_0}U \otimes T^*_{x_0}U \otimes T^*_{x_0}U \otimes T_{x_0}U.$$

Теорема 9.4. *Тензор кривизны римановой связности удовлетворяет следующим соотношениям:*

1) $R(u,v)w = -R(v,u)w$,
2) $R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0$,
3) $(R(u,v)w, z) = -(R(u,v)z, w)$,
4) $(R(u,v)w, z) = (R(w,z)u, v)$.

Доказательство. Соотношение кососимметричности 1) немедленно вытекает из определения тензора R. Так как все три слагаемых в формуле 2) тензоры, то достаточно доказать эту формулу в случае, когда векторные поля $[u,v], [v,w], [w,u]$ равны нулю, например, для базисных векторных полей e_i, e_j, e_k. При этом предположении нужно проверить тождество

$$\nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) + \nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) + \nabla_w(\nabla_u v) - \nabla_u(\nabla_w v) = 0. \tag{9.2}$$

Но из симметрии связности вытекает, что

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v,w] = 0.$$

Поэтому первый член в сумме (9.2) сокращается с последним, остальные члены также попарно сокращаются, что доказывает соотношение 2).

Тождество 3) означает, что выражение $(R(u,v)w,z)$ кососимметрично по w,z. Это эквивалентно утверждению, что $(R(u,v)w,w)=0$ при всех u,v,w. Снова можно предположить, что $[u,v]=0$, так что $(R(u,v)w,w)$ равно

$$(\nabla_u(\nabla_v w)-\nabla_v(\nabla_u w),w).$$

Иначе говоря, мы должны доказать симметричность выражения $(\nabla_v(\nabla_u w),w)$ относительно u,v. Так как $[u,v]=0$, то выражение $\partial_v(\partial_u(w,w))$ симметрично относительно u,v. Из совместимости связности с метрикой получаем

$$\partial_u(w,w)=2(\nabla_u w,w),$$

следовательно,

$$\partial_v(\partial_u(w,w))=2(\nabla_v(\nabla_u w),w)+2(\nabla_u w,\nabla_v w).$$

Но второе слагаемое в последнем выражении симметрично относительно u,v, поэтому выраженние $(\nabla_v(\nabla_u w),w)$ также симметрично относительно u,v, что и доказывает свойство 3).

Свойство 4) выводится из предыдущих свойств, предлагается проверить это самостоятельно. Теорема доказана.

Замечание 9.5. В координатах тождества 1), 2) теоремы 9.4 записываются следующим образом:

1) $R^l_{ijk}=-R^l_{jik}$,

2) $R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$.

Положим $R_{ijkl}=(R(e_i,e_j)e_k,e_l)$, то есть

$$R_{ijkl}=\sum_s R^s_{ijk}g_{sl},$$

тогда тождества 3), 4) записываются следующим образом:

3) $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$,

4) $R_{ijkl}=R_{klij}$.

Заметим также, что тензор $(R(u,v)w,z)$ называется *тензором Римана*, в каждой точке $x_0\in U$ он является элементом тензорного произведения

$$T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U.$$

Набор функций

$$R_{jk}=\sum_i R^i_{ijk}$$

называется тензором Риччи, а функция

$$R = \sum_{j,k} g^{jk} R_{jk}$$

называется *скалярной кривизной*, где (g^{jk}) – обратная матрица к (g_{jk}).

Задача 9.6. Дать инвариантное определение тензора Риччи и скалярной кривизны.

Пример 9.7. Рассмотрим поверхность в $\mathbf{R}^3$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

где u, v – параметры. Тогда первая квадратичная форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

определяет риманову метрику в области с координатами u, v. Пусть R – скалярная кривизна соответствующей римановой связности. Покажем, что $R = -2K$, где K – гауссова кривизна поверхности.

Положим $u = u_1, v = u_2, E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$, а Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля, то есть

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}\Big) g^{lk}.$$

Тогда в дифференциальной геометрии поверхностей доказывается равенство

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left[\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u_1}\right) + \sum_k (\Gamma^k_{11}\Gamma^2_{k2} - \Gamma^k_{12}\Gamma^2_{k1})\right],$$

то есть

$$K = \frac{1}{g_{11}} R^2_{121}.$$

Выразим K через тензор Римана

$$\frac{1}{g_{11}} R^2_{121} = \frac{1}{g_{11}} \sum_l g^{2l} R_{121l} = \frac{1}{g_{11}}(g^{21} R_{1211} + g^{22} R_{12112}) =$$

$$\frac{g^{22}}{g_{11}} R_{12112} = \Delta \cdot R_{1212},$$

где $\Delta = det(g^{jk})$. Таким образом,

$$K = \Delta \cdot R_{1212}.$$

С другой стороны,

$$R = \sum_{j,k=1}^{2} g^{jk} R_{jk} = \sum_{i,j,k=1}^{2} g^{jk} R^i_{ijk} =$$

$$g^{11} R^2_{211} + g^{12} R^2_{212} + g^{21} R^1_{121} + g^{22} R^1_{122} =$$
$$g^{11} g^{22} R_{2112} + g^{12} g^{21} R_{2121} + g^{21} g^{12} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{1221} =$$
$$-g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{12} g^{21} R_{1212} + g^{21} g^{12} R_{1212} - g^{22} g^{11} R_{1212} =$$
$$-2\Delta \cdot R_{1212},$$

то есть $R = -2K$.

Задача 9.8. Показать, что для метрики Лобачевского $R = 8$.

10. Внешние дифференциальные формы.

Сначала поговорим о внешних формах. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем K. *Внешняя q-форма* ω^q *на* V – это кососимметрическая полинейная функция

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ раз}} \to K$$

Согласно другому определению – это элемент пространства $\Lambda^q(V^*)$ (см. задачу 3.10 в гл. I). Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис V, а $e_1^*, \ldots, e_n^*$ – двойственный базис V^*, то внешние произведения $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n, \quad i_1 < \ldots < i_q$, образуют базис пространства внешних q-форм $\Lambda^q(V^*)$. Следовательно,

$$dim\, \Lambda^q(V^*) = \binom{n}{q}.$$

В частности, $dim\, \Lambda^n(V^*) = 1$.

Пусть далее V – вещественное векторное пространство. Тогда пространство $\Lambda^n(V^*)$ изоморфно $\mathbf{R}$, но на нем нет фиксированного направления. *Ориентация* V – это направление на $\Lambda^n(V^*)$ (см. рис.6). Так как возможны два направления, то на V возможны две ориентации.

Рисунок 6.

Если мы выберем ненулевую форму ω^n, то получим направление на $\Lambda^n(V^*)$ от 0 к ω^n. Таким образом, форма ω^n задает ориентацию на V. Заметим, что формы ω_1^n, ω_2^n определяют одинаковую ориентацию, если $\omega_2^n = a \cdot \omega_1^n$, где $a > 0$. Пусть ориентация задана формой ω^n, назовем базис $e_1, \ldots, e_n$ *положительным*, если $\omega^n(e_1, \ldots, e_n) > 0$, в противном случае базис называется *отрицательным*. Таким образом, ориентация разбивает множество базисов на два класса эквивалентности. Если базис $e'_1, \ldots, e'_n$ получается из базиса $e_1, \ldots, e_n$ с помощью матрицы перехода A, то

$$\omega^n(e'_1, \ldots, e'_n) = \det A \cdot \omega^n(e_1, \ldots, e_n).$$

Поэтому базисы $e_1, \ldots, e_n$, $e'_1, \ldots, e'_n$ эквивалентны, если определитель матрицы перехода положительный. Заметим, что выбрав один из классов эквивалентности базисов, мы определим ориентацию на V требованием, чтобы задающая ориентацию форма ω^n принимала на базисах выбранного класса положительные значения.

Пусть на V задано скалярное произведение, тогда оно определяет изоморфизм $V \to V^*$, заданый правилом: *вектору $v \in V$ сопоставляется линейная функция* $\tilde{v}(w) = (v, w)$. Заметим, что если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис V, то линейные функции $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ образуют двойственный базис, то есть для ортонормированного базиса выполняется равенство $\tilde{e}_i = e_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (v, w)$, тогда получим скалярное произведение на V^*, в частности, если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в V, то $e_1^*, \ldots, e_n^*$ – ортонормированый базис в V^*. Если положить

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, (\alpha_1, \beta_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (\alpha_q, \beta_{\sigma(q)}),$$

то это умножение продолжается до скалярного умножения в пространстве внешних q-форм $\Lambda^q(V^*)$. В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонорми-

рованный базис V, то q-формы $e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_q}$, $\quad i_1 < \ldots < i_q$, образуют ортонормированный базис $\Lambda^q(V^*)$.

Пусть на V задано скалярное произведение, тогда получим скалярное произведение на одномерном пространстве $\Lambda^n(V^*)$, благодаря этому определяются две n-формы единичной длины, которые определяют противоположные ориентации. Если на V фиксирована ориентация, то существует единственная n-форма единичной длины, определяющая данную ориентацию. Обозначим ее через Ω^n и назовем *формой объема*. Пусть $\beta^q \in \Lambda^q(V^*)$ и $*\beta^q$ – такая $(n-q)$-форма, что для любой формы $\alpha^q \in \Lambda^q(V^*)$ выполняется равенство

$$\alpha^q \wedge *\beta^q = (\alpha^q, \beta^q)\,\Omega^n.$$

Тогда проверяется, что форма $*\beta^q$ существует и она единственная, причем отображение

$$* : \Lambda^q(V^*) \to \Lambda^{n-q}(V^*)$$

является линейным изоморфизмом. Это отображение называется *оператором Ходжа*.

Задача 10.1. Доказать утверждения:

1) если $v_1, \ldots, v_n$ – произвольный базис V, $g_{ij} = (v_i, v_j)$, то $(v_i^*, v_j^*) = g^{ij}$, где (g^{ij}) – обратная матрица к (g_{ij});

2) если $\omega^q \in \Lambda^q(V^*)$, то $**\omega^q = (-1)^{q(n-q)}\omega^q$;

3) $|\omega^q| = |*\omega^q|$;

4) если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $*(e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_q}) = \pm e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-q}}$, где $\{j_1, \ldots, j_{n-q}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_q\}$.

Перейдем к определению внешних дифференциальных форм на области $U \subset \mathbf{R}^n$. Если для каждой точки $x \in U$ определена внешняя форма $\omega^q_x \in \Lambda^q(T^*_xU)$, то говорят, что определена *внешняя дифференциальная q-форма* ω^q_x на U. Таким образом, внешняя дифференциальная q-форма на U — это поле внешних q-форм. Например, дифференциал функции $df(x)$ является внешней дифференциальной 1-формой. А сама функция является внешней дифференциальной 0-формой. Пусть даны функции $f_1(x), \ldots, f_q(x), g(x)$, тогда из них получается внешняя дифференциальная q-форма

$$\omega^q_x = g(x)\, df_1(x) \wedge \ldots \wedge df_q(x).$$

Так как дифференциалы координатных функций $dx_1, \ldots, dx_n$ дают базис кокасательного пространства T^*_xU, то внешние произведения $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, $\quad i_1 < \ldots < i_q$, дают базис пространства внешних q-форм

$\Lambda^q(T_x^*U)$ при каждом $x \in U$. Отсюда следует, что каждая внешняя дифференциальная q-форма ω_x^q на U имеет единственное представление

$$\omega_x^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} a_{i_1\ldots i_q}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \tag{10.1}$$

где $a_{i_1\ldots i_q}(x)$ – функции на U. Эта форма принадлежит классу C^∞, если все коэффициенты $a_{i_1\ldots i_q}(x)$ – функции класса C^∞. Далее мы рассматриваем только формы класса C^∞. Множество таких q-форм обозначим через $\mathcal{A}^q(U)$. Относительно операций сложения и умножения на число $\mathcal{A}^q(U)$ – векторное пространство. Умножение q-форм на функции превращает $\mathcal{A}^q(U)$ в модуль над кольцом $\mathcal{O}(U)$. Заметим, что $\mathcal{A}^0(U) = \mathcal{O}(U)$. Положим

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{q=0}^{n} \mathcal{A}^q(U),$$

тогда на $\mathcal{A}^*(U)$ определена операция внешнего умножения:
если $\alpha^p \in \mathcal{A}^p(U)$, $\beta^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то $\alpha^p \wedge \beta^q \in \mathcal{A}^{p+q}(U)$. Благодаря этой операции умножения $\mathcal{O}(U)$–модуль $\mathcal{A}^*(U)$ становится $\mathcal{O}(U)$–алгеброй. Операция взятия дифференциала функции определяет отображение $d : \mathcal{A}^0(U) \to \mathcal{A}^1(U)$. Следующая теорема показывает, что это отображение однозначно продолжается до отображения $d : \mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(U)$, если потребовать от продолжения выполнения естественных условий.

Теорема 10.2. *Существует и единственное отображение $d : \mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(U)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *d является $\mathbf{R}$–линейным отображением;*
2) *если $\omega^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то $d\omega^q \in \mathcal{A}^{q+1}(U)$;*
3) *если $\alpha^p \in \mathcal{A}^p(U)$, $\beta^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то*

$$d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q;$$

4) *выполняется равенство $d \circ d = 0$;*
5) *если $\omega^0 \in \mathcal{A}^0(U)$, то $d\omega^0$ – дифференциал функции.*

Доказательство. Пусть $\omega^q \in \mathcal{A}^q(U)$ имеет разложение

$$\omega^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} a_{i_1\ldots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q},$$

тогда из условий 1)–5) вытекает равенство

$$d\omega^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} da_{i_1\ldots i_q}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$