**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ



Д.Ю. Чалый

«\_22\_» мая 2022 г.

### Рабочая программа дисциплины

«Дополнительные главы математической статистики»

### Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

### Направленность (профиль)

**«**Программирование и технологии искусственного интеллекта»

### Квалификация выпускника

Бакалавр

### Форма обучения

очная

Программа рассмотрена на заседании кафедры

от 09 апреля 2024 г.,

протокол № 4

Программа одобрена НМК

факультета ИВТ

протокол № 6 от 26 апреля 2024 г.

Ярославль

### Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» является углубление и развитие изучения методов математической статистики применительно к решению разнообразных практических задач.

### Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Дополнительные главы математической статистики» относится к ва- риативной части (дисциплина по выбору) ОП бакалавриата.

При изучении дисциплины «Дополнительные главы математической статистики» необходим продвинутый уровень освоения дисциплины «Теория вероятностей и матема- тическая статистика», а также дисциплин «Математический анализ», «Геометрия и алгеб- ра», «Дифференциальные уравнения» на уровне не ниже порогового.

Полученные в рамках дисциплины «Дополнительные главы математической стати- стики» знания необходимы для формирования общей математической культуры, а также развития умений и навыков применения математических методов в решении прикладных задач.

### Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планиру- емыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Формируемая компетенция (код и формулировка)** | **Индикатор достижения компетенции**  **(код и формулировка)** | **Перечень планируемых результатов**  **обучения** |
| **Профессиональные компетенции** | | |
| ПК-1Способен понимать и использовать знания естественнонаучных дисциплин, применять современный математический аппарат и информационные технологии для решения профессиональных задач, в том числе с использованием систем искусственного интеллекта; | ПК – 1.2 Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач | **Знать:**   * основные понятия, теоремы и критерии математической статистики; * особенности постановки за- дач математической стати- стики, * методы построения оценок и проверки гипотез в математи- ческой статистике, условия применимости статистических критериев. |
|  |  | **Уметь:**   * строить точечные и ин- тервальные оценки числовых показателей распределения случайных величин, * проверять статистические гипотезы согласия, однород- ности выборок, некоррелиру- емости. * строить регрессионные модели и проверять их зна- чимость, * интерпретировать результа- ты применения статистиче- |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ских критериев.  **Владеть навыками:**   * первичной обработки результатов наблюдений (экс- периментов), * построения оценок неиз- вестных параметров распреде- ления с использованием мето- да максимального прав- доподобия, метода наимень- ших квадратов, метода момен- тов, * применения статисти-   ческих критериев для провер- ки гипотез. |

испытания

работа

### Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зач. ед., 108 акад. час.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Темы (разделы) дисциплины, их содержание** | **Семестр** | **Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов,**  **и их трудоемкость**  **(в академических часах)** | | | | | | **Формы текущего контроля успеваемо- сти**  **Форма промежуточ- ной аттестации (по семестрам)** |
|  |  |  | **Контактная работа** | | | | |  |  |
|  |  |  | лекции | практические | лабораторные | консультации | аттестационные | самостоятельная |  |
| 1 | Сравнение оценок | 7 | 2 | 4 |  |  |  | 1 |  |
| 2 | Статистические гипоте- зы и их проверка | 7 | 8 | 16 |  |  |  | 6 |  |
| 3 | Корреляционный анализ | 7 | 4 | 8 |  | 2 |  | 3 |  |
| 4 | Регрессионный анализ | 7 | 2 | 4 |  |  |  | 2 |  |
| 5 | Основы дисперсионного анализа | 7 | 2 | 4 |  | 2 |  | 2 |  |
|  | **Всего за 7 семестр** |  | **18** | **36** |  | **4** |  | **14** | **Экзамен** |
|  | **Всего** |  | **18** | **36** |  | **4** |  | **14** |  |

### Содержание разделов дисциплины:

**Раздел 1. Сравнение оценок**

Сравнение оценок в смысле среднего квадратического. Эффективность оценок. Не- равенство Рао-Крамера. Энтропия случайной величины.

### Раздел 2. Статистические гипотезы и их проверка

Основные понятия, связанные с проверкой гипотез: статистическая гипотеза, про- стые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, ошибки пер- вого и второго рода, уровень значимости. Задача о выборочном контроле. Вероятностные распределения, связанные с нормальным: χ2 – распределение, распределение Стьюдента, распределение Фишера. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ2) для простых и сложных гипотез. Критерии согласия Колмогорова и Смирнова (основные идеи). Табли- цы сопряженности признаков, проверка гипотезы о независимости. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни.

### Раздел 3. Корреляционный анализ

Выборочный коэффициент корреляции. Ранговая корреляция. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Проверка гипотез о значимости коэффициен- та корреляции.

### Раздел 4. Регрессионный анализ

Линейная регрессия, нахождение и проверка значимости параметров линейной регрессии. Многомерные регрессионные модели. Сглаживание наблюдений, нахождение параметров аппроксимирующей функции (метод наименьших квадратов). Модели авто- регрессии, автокорреляционная функция, смешанные модели.

### Раздел 5. Основы дисперсионного анализа

Основные идеи дисперсионного анализа. Модели однофакторного и многофактор- ного дисперсионного анализа.

### Образовательные технологии, используемые при осуществлении образо- вательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориенти- рует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначе- нием и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, до- стижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особен- ности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно- методической литературы.

**Академическая лекция** (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требова- ния к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информатив- ность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

### Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимо- сти)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

* + для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации, для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами:

программы Microsoft Office (OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232), программы LibreOffice (свободно распространяемое ПО),

издательская система LaTeX;

* + для подготовки расчетных работ – среда R 3.3.3 (свободно распространяемая сре- да статистического анализа с открытым исходным кодом);
  + для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная биб- лиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

### Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освое- ния дисциплины

а) основная:

1. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Яро- славль, ЯрГУ, 2009, 110c
2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. по- собие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479c
3. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : сбор- ник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110c – <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/> 20090405.pdf
4. *Гмурман, В. Е.* Теория *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449646>

б) дополнительная:

1. Буре В.М., Методы прикладной статистики в R и Excel / Буре В.М., Парилина Е.М., Седаков А.А. – ЭБС «Лань» – <https://e.lanbook.com/reader/book/81558/>
2. Плотников А.Н., Элементарная теория анализа и статистическое моделирование временных рядов / Плотников А.Н. – ЭБС «Лань» – <https://e.lanbook.com/book/65051>

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http:// [www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\_cat\_find.php).](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php))
2. Конспекты лекций по теории вероятностей и математической статистике (Н.В.Чернова) (<http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/>).
3. Электронно-библиотечная система «Юрайт»( https://urait.ru/ ).
4. Электронно-библиотечная система «Лань»( https://e.lanbook.com/).

### Материально-техническая база, необходимая для осуществления образо- вательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

* учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
* учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
* учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
* учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
* помещения для самостоятельной работы;
* помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обуче- ния.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному соста- ву группы обучающихся.

### Автор(ы) :

Доцент кафедры дискретного анализа, к.ф.-м.н.

Ю.В.Богомолов

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины**

**«Дополнительные главы математической статистики»**

**Фонд оценочных средств**

**для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

1. **Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы**

**формирования компетенций**

* 1. **Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

**Контрольная работа №1 (Основы математической статистики)**

1. Случайная величина *ξ* равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Найти такую функцию *g*(*x*), чтобы величина *γ* = *g*(*x*) имела функцию распределения: а)

0 *, x* ∈0 *,*

{

arcsin √*x ,* 0≤*x* ≤4 *,*

2

{ 0 *, x*∈0 *,*

1 *, x* >4 . б)

1−*e*−2 *x*√ *x x*≥0 .

3 *x*2

−( *x*3−*a* )2/ 2

1. Случайная величина имеет плотность распределения *f* ( *x* )= √2 *π e*

. Методом

максимального правдоподобия найти оценку параметра *a* по результатам трех наблю- дений: 1, 2, 3.

1. Случайная величина имеет плотность распределения

*xe*−*x* / *b , b*2

0 *,*

{

*x*≥0

*иначе* .

. Методом мо-

ментов найти оценку параметра *b* по результатам четырех наблюдений: 1, 2, 3, 4.

1. В ходе эксперимента получены следующие данные (*x*,*y*) («вход-выход»): (0,1), (1,3), (2,2). Предполагая, что зависимость выходных значений от входных имеет вид

*ax* + *b*

а) *y = ax+b* б) *y = ax2+bx* в) *y* =

*x* +1

С помощью метода наименьших квадратов найти значения параметров *a* и *b*. Какую из предложенных зависимостей можно считать наиболее адекватной входным данным?

Ответы и указания к решению контрольной работы №1.

1) а) б) 2) 9 3) 1,25



4) а) y = 0,5 x + 1,5 б) y = -2 x2 + 5x в) y = 1,071 x + 1,4082/(x+1). Оценка адекватности зависимостей производится подстановкой найденных параметров в функцию ошибки.

Критерии оценивания контрольной работы №1.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены все 4 зада- ния (без ошибок и недочетов), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой пол- ностью выполнены 3 задания (без ошибок и недочетов) или выполнено 4 задания, но со- держится не более 3 недочетов, связанных с пояснением порядка применения свойст и критериев. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся пра- вильно выполнил 2 задания (без грубых ошибок) или 1 задание, но при этом есть верные продвижения в оставшихся задачах (например, в 1-2 заданиях правильно описан ход решения). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 1 задания и нет значимых продвижений в других.

Контрольная работа №1 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, тео- рем и критериев математической статистики, особенностей постановки задач математиче- ской статистики, методов построения оценок; умение строить точечные и интервальные оценки числовых показателей распределения случайных величин, строить регрессионные модели и проверять их значимость; владение навыками первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов), построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка

«удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответству- ющие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

### Контрольная работа №2 (Проверка статистических гипотез)

1. Имеются следующие данные по распределению заработной платы между работниками предприятия:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Зарплата (руб.) | 5000–10000 | 10000–15000 | 15000–25000 | 25000–50000 |
| Кол-во человек | 15 | 18 | 27 | 15 |

С помощью критерия Пирсона проверьте гипотезу о том, что зарплата распределена равно- мерно от 5000 до 50000 руб.

1. В ходе серии экспериментов неизвестная случайная величина принимала значения на отрезке [0; 16]:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Отрезок | 0–1 | 1–2 | 2–3 | 3–4 |
| Количество значений на отрезке | 7 | 10 | 10 | 13 |

ления:

С помощью критерия Пирсона проверьте гипотезу, что сл.в. имеет плотность распреде-

1

{ *x ,* 0≤*x*≤4 *,*

8

0 *, иначе* .

1. Для 8 клубов Континентальной хоккейной лиги имеются данные о размере официаль- ного бюджета клуба (в сезоне 2008-2009 гг.) и количестве набранных очков по ходу регулярного чемпионата.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Клуб | Бюджет (млн.$) | Количество очков |
| «Авангард» (Омская область) | 50 | 78 |
| «Ак Барс» (Казань) | 55 | 122 |
| «Атлант» (Московская область) | 35 | 122 |
| «Динамо» (Москва) | 25 | 100 |
| «Локомотив» (Ярославль) | 40 | 111 |
| «Металлург» (Магнитогорск) | 45 | 104 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| «Салават Юлаев» (Уфа) | 50 | 129 |
| ХК ЦСКА (Москва) | 22 | 106 |

По представленным данным найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена между бюджетом клуба и количеством набранных очков. Проверить гипотезу о некор- релируемости данных показателей для уровня значимости α = 0,05.

1. Имеется 10 земельных участков, находящихся на различном расстоянии от крупного города. Расстояния от города (в километрах) для этих участков составляют 5, 10, 7, 10, 8, 15, 20, 5, 5, 20. Урожайность картофеля на этих же участках соответственно равна

10, 25, 10, 15, 15, 10, 30, 25, 10, 10.

Можно ли говорить о наличии значимой связи между урожайностью картофеля на участке и удаленностью этого участка от города?

1. На двух пробных участках леса для каждого исследованного дерева найдены значения проективного покрытия лишайников. При этом на первом участке получены такие зна- чения: 67, 9, 65, 40, 44, 89, 17, 8, 26, 95, 46, 25 (данные по 12 деревьям). Соответ-

ственно, на втором участке получены такие значения: 26, 1, 87, 8, 6, 4, 65, 90, 76, 44,

36, 24, 23, 8, 56 (всего 15 деревьев). Выясните, есть ли существенные различия между этими двумя участками.

Ответы и указания к решению контрольной работы №2.

1) Гипотеза отвергается на уровне значимости 0,5 2) Гипотеза отвергается на уровне зна- чимости 0,5 3) r = 0,274 – незначим для уровня значимости 0,05 4) r = 0,208 – незначим для уровня значимости 0,05 – нет значимой связи 5) Различия уровня признака в срав- ниваемых группах статистически не значимы.

Критерии оценивания контрольной работы №2.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены все 5 зада- ния (без ошибок и недочетов), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на ис- пользуемые теоремы и статистические критерии, гипотезы сформулированы, выводы проинтерпретированы. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью вы- полнены 4 задания (без грубых недочетов) или выполнено 5 задания, но содержится не 3-5 недочетов, связанных с пояснением порядка применения свойств и критериев. «Удовле- творительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 за- дания (без грубых ошибок) или 2 задания, но при этом есть верные продвижения в оставшихся задачах (например, в 1-2 заданиях правильно описан ход решения или верно указан критерий проверки гипотезы). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за ра- боту, в которой правильно выполнено не более 2 заданий и нет значимых продвижений в других.

Контрольная работа №2 позволяет оценивать уровень сформированности профес- сиональной компетенции ПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, тео- рем и критериев математической статистики, особенностей постановки задач математиче- ской статистики, знание статистических методов и критериев проверки гипотез в матема- тической статистике, условий применимости статистических критериев; умение проверять статистические гипотезы согласия, однородности выборок, некоррелируемости, а также интерпретировать результаты применения статистических критериев; владение навыками первичной обработки результатов наблюдений (экспериментов), – применения статисти- ческих критериев для проверки гипотез. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности ука- занной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

### Тестовые вопросы

(для оценки сформированности компетенции на базовом уровне)

1. При построении линейной регрессионной модели (y = kx + b) между двумя показате- лями получилось, что ошибка аппроксимации равна 0. Какие выводы можно сделать?

(а) Коэффициенты k и b равны 0.

(б) Исходные точки (элементы исходной выборки) находятся на одной прямой.

(в) Если при этом ещё и параметр k ≠ 0, то выборочный коэффициент корреляции равен 1 или –1.

(г) Однозначно можно говорить, что произошла ошибка в вычислениях.

1. Может ли коэффициент ранговой корреляции Спирмена принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)

(а) 0 (б) 7 (в) –4 (г) ½ (д) –½

1. Для проверки гипотезы о некоррелируемости двух заданных признаков вычислено зна- чение выборочного коэффициента корреляции равное 0,72. Какие из утверждений являют- ся верными?

(а) Этого достаточно, чтобы отвергнуть гипотезу о некоррелируемости. Между призна- ками существует сильная положительная связь, так как коэффициент корреляции положи- телен и близок к 1.

(б) Между признаками заметна (но не проверена значимость) положительная связь – боль- шим значениям одного признака чаще соответствуют большие значения другого – так как коэффициент корреляции положителен и близок к 1.

(в) Этого достаточно, чтобы принять гипотезу о некоррелируемости. Между признаками отсутствует связь, так как коэффициент корреляции не равен 1.

(г) Вывод о значимости выборочного коэффициента корреляции можно сделать после того, как будет известен объем выборки и уровень значимости.

1. Методом максимального правдоподобия строится оценка неизвестной вероятности. Составлена функция правдоподобия, найдена точка x0, где её производная принимает зна- чение 0. Какие из этих утверждений верны?

(а) Этого мало. Нужно найти точку минимума функции правдоподобия на отрезке [0,1]. (б) Это неверно. Нужно найти точку, где функция правдоподобия обращается в 0.

(в) Если функция правдоподобия дифференцируема на отрезке [0,1], а единственный мак- симум достигается на интервале (0,1), то точка x0 – искомая.

(г) Нужно найти не точку максимума, а точку минимума функции правдоподобия.

1. Доверительный интервал (a, b) накрывает неизвестный параметр с вероятностью 0,8. Рассматривается интервал (c, d), лежащий строго внутри интервала (a, b). Интервал (c, d) накрывает неизвестный параметр с вероятностью

(а) не меньше 0,8 (б) не больше 0,8 (в) обязательно равной 0,8 (г) ни один из вариантов (а)-(в) неверен.

1. Проверяется гипотеза согласия H0 с помощью критерия χ2 Пирсона. Вычислена сумма Пирсона, она оказалась меньше критического значения (для заданного уровня значимости и используемого количества интервалов). Какой вывод можно сделать?

(а) Гипотеза H0 отвергается. Экспериментальные данные не согласуются с предполага- емым законом распределения.

(б) Нет оснований отвергнуть гипотезу H0. Если гипотезу нельзя отвергнуть по критерию χ2, то это не означает, что она принимается.

(в) Гипотеза H0 принимается. Экспериментальные данные согласуются с предполагаемым законом распределения.

1. На основании выборки объёма n построена точечная статистическая оценка cn неизвест- ного параметра c. Эта оценка является состоятельной. Что это означает?

(а) Оценка cn сходится по вероятности к истинному значению параметра c при объёме вы- борки стремящемся к бесконечности.

(б) Математическое ожидание cn равно с.

(в) Какую бы выборку ни взяли, cn будет принимать одно и то же значение.

Верные ответы на тестовое задание (ключ):

1бв 2агд 3бг 4ав 5б 6б 7а

Критерии оценивания заданий:

задания №1–4: 1 балл за каждый верный ответ, –1 балл за каждый неверно указанный от- вет, 0 баллов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в тестовом за- дании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это зада- ние выставляется 0 баллов;

задания №№5–7: 2 балла за верный ответ, 0 баллов за неверный; Итого максимальное суммарное количество баллов: 15.

Критерии оценивания тестовой работы.

Вариант №1 (зачтено/не зачтено): оценка «зачтено» выставляется, если тестируемый на- брал не менее 6 баллов, в противном случае оценка «не зачтено».

Вариант №2 (балльная оценка): оценка «отлично» (5 баллов) – тестируемый набрал 14–15 баллов, оценка «хорошо» (4 балла) – тестируемый набрал 10–13 баллов, оценка «удовле- творительно» (3 балла) – тестируемый набрал 6–9 баллов, оценка «неудовлетворительно» (2 балла) – тестируемый набрал 0–5 баллов.

### Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

**Список вопросов к экзамену**

1. Основные понятия математической статистики: генеральная совокупность, выборка, статистика, статистическая оценка, состоятельные и несмещённые оценки, точечные и интервальные оценки, точность оценки в смысле среднего квадратического, довери- тельный интервал, доверительная вероятность, статистическая гипотеза, простые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, ошибки первого и второго рода, уровень значимости.
2. Вероятностные распределения, связанные с нормальным: χ2 – распределение, распре- деление Стьюдента, распределение Фишера.
3. Методы построения точечных оценок: метод моментов, метод максимального прав- доподобия.
4. Эффективность оценок. Неравенство Рао-Крамера. Энтропия случайной величины.
5. Задача о выборочном контроле.
6. Интервальные оценки. Построение доверительных интервалов для математического ожидания нормального распределения. Сравнение двух средних генеральных со- вокупностей, сравнение выборочной средней с гипотетическим средним генеральной совокупности.
7. Корреляционный анализ. Выборочный коэффициент корреляции. Ранговая корре- ляция. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Проверка гипотез о значимости коэффициента корреляции.
8. Регрессионный анализ. Линейная регрессия, нахождение и проверка значимости па- раметров линейной регрессии. Сглаживание наблюдений, нахождение параметров аппроксимирующей функции (метод наименьших квадратов). Автокорреляционная функция, смешанные модели.
9. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ2) для простых и сложных гипотез. Критерии согласия Колмогорова и Смирнова (основные идеи). Таблицы сопряженно- сти признаков, проверка гипотезы о независимости.
10. Проверка гипотезы об однородности выборок. Критерии Вилкоксона и Манна-Уитни.

### Темы практических заданий к экзамену

1. Построение оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия и метода моментов.
2. Проверка гипотез с использованием критерия Пирсона. Проверка гипотезы о незави- симости признаков (анализ таблицы сопряженности признаков).
3. Вычисление выборочного коэффициента корреляции, коэффициента ранговой корре- ляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости.
4. Нахождение параметров уравнения линейной или нелинейной регрессии, автокорре- ляционной функции, смешанных функций методом наименьших квадратов.
5. Проверка гипотез об однородности выборок с помощью критериев Вилкоксона и Манна-Уитни.
6. Проверка гипотезы о равенстве средних методами дисперсионного анализа.

### Пример экзаменационного билета

(2 теоретических вопроса и 2 задачи)

* 1. Гипотезы согласия. Критерий согласия Пирсона (χ2) для простых и сложных гипотез.
  2. Ранговая корреляция. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Проверка гипотез о значимости коэффициента корреляции.
  3. Два класса (11A и 11Б) написали контрольную работу по химии. Среди результатов 24 учеников 11A поровну «двоек», «троек», «четвёрок» и

«пятёрок», а среди 16 учеников 11Б «троек» и «четвёрок» не получил никто, зато поровну «двоек» и «пятёрок». Выясните, есть ли существенные различия между этими двумя классами.

* 1. Найдите интервальную оценку математического ожидания нормального распре- деления с доверительной вероятностью 0,96, если получена оценка неизвестной дисперсии S = 16, а среднее арифметическое выборки равно 25. Объем выборки n = 100.

Критерии оценивания заданий экзаменационного билета

1. Сформулировать общий вид простой гипотезы согласия (0,1 балла), сформули- ровать общий вид и описать отличия сложной гипотезы согласия (0,1 балла), описать основную идею критерия согласия Пирсона для простой гипотезы (0,1 балла), сформулировать теорему Пирсона (0,1 балла), на её основе подробно описать критерий согласия Пирсона для простой гипотезы (0,1 балла), объяс- нить возможные варианты интерпретации результатов применения критерия (0,1 балла). Сформулировать теорему Пирсона для сложной гипотезы (0,1 бал- ла), описать критерий для сложной гипотезы (0,1 балла) и интерпретацию вы- водов (0,1 балла). Описать возможные ограничения при использовании крите- рия Пирсона (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 баллов.
2. Объяснить, в каких условиях возникает возможность использования коэффици- ентов ранговой корреляции, выдвинуть нулевую и альтернативную гипотезу (0,1 балла). Записать (0,1 балла) и обосновать (0,3 балла) формулу для расчета коэффициента ранговой корреляции Спирмена. Рассчитать значения коэффици- ента ранговой корреляции Спирмена для строго прямой (0,1 балла) и строго обратной (0,1 балла) зависимости. Сформулировать теорему Стьюдента (0,1 балла), на её основе сформулировать критерий проверки гипотезы (0,1 балла), описать порядок интерпретации результатов. Задание засчитывается полно- стью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если вы- полнено на 0,6–0,7 баллов.
3. Строго сформулировать нулевую и альтернативную гипотезу согласия (0,1 бал- ла), корректно выбрать статистический критерий для её проверки (0,1 балла), воспользоваться критерием согласия (0,4 балла), сделать выводы из критерия (0,1 балла) и проинтерпретировать полученные результаты в контексте постав- ленной исходной задачи (0,1 балла), обсудить возможные варианты выводов и интерпретаций при изменении параметров задачи (0,2 балла). Задание засчиты- вается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполови- ну, если выполнено на 0,6–0,7 баллов.
4. Сформулировать определение доверительного интервала и смежных понятий (0,2 балла), сформулировать необходимое следствие из теоремы Фишера (0,2 балла), воспользоваться следствием из теоремы Фишера для поставленной зада- чи (0,4 балла), обсудить возможные варианты выводов и интерпретаций при изменении параметров задачи (0,2 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,7 баллов.

Критерии оценивания экзамена, выставления оценки и выводов о сформированности компетенций приведены в параграфах 3.3-3.4 методических рекомендаций преподавателю (раздел 3 рабочей программы курса).

1. **Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и крите- риев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание**

**шкалы оценивания**

* 1. **Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дис- циплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

**Пороговый уровень -** предполагает отражение тех ожидаемых результатов, кото- рые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязатель- ным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

**Продвинутый уровень -** предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

**Высокий уровень -** предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятель- ного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования из- вестных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

* 1. **Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Код компе- тенции** | **Форма контроля** | **Этапы форми- рования**  **(№ темы (раздела)** | **Показатели оценива- ния** | **Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования** | | |
| **Пороговый уровень** | **Продвинутый уровень** | **Высокий уровень** |
| **Профессиональные компетенции** | | | | | | |
| ПК-2 | Контрольные ра- боты (1-2), Самостоятельная работа  Задания для до- машней работы по темам  № 1–9  Зачет Экзамен | 1 – 6 | **Знать:**   * основные понятия, теоремы и критерии математической стати- стики; * особенности по- становки задач математической стати- стики, * методы построения оценок и проверки гипотез в математиче- ской статистике, условия применимо- сти статистических критериев.   **Уметь:**   * строить точечные и интервальные оценки числовых показателей распределения случай- ных величин, * проверять статисти- ческие гипотезы | 1. Воспроизведение основных понятий,   теорем и соотношений математической стати- стики и их интерпре- тация.   1. Первичная обра- ботка результатов: по- строение вариацион- ного ряда, ранжирова-   ние. Вычисление описательных характе- ристик (медиана, мода, размах). По- становка задач точеч- ного оценивания па- раметров распределе-  ния, построение про- стых оценок парамет- | 1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математи-   ческой статистики и их интерпретация. Выполне- ние основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассужде- ний в процессе их вывода.   1. Первичная обработка результатов: построение вариационного ряда, ран- жирование. Вычисление описательных характери-   стик (медиана, мода, размах). Постановка задач точечного оценивания па- раметров распределения, построение оценок па- раметров распределений  на основе выборочных средних, а также с помо- | 1. Воспроизведение основных теорем и соотношений матема- тической статистики и их ин-   терпретация. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.   1. Первичная обработка результатов: построение вари- ационного ряда, ранжирование. Вычисление описательных ха-   рактеристик (медиана, мода, размах). Постановка задач то- чечного оценивания параметров распределения. Построение оце- нок параметров распределений на основе выборочных средних, а также с помощью метода мак-  симального правдоподобия, ме- тода моментов. Исследование |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | согласия, однородно- сти выборок, некорре- лируемости.   * строить регрессион- ные модели и прове- рять их значимость, * интерпретировать результаты примене- ния статистических критериев.   **Владеть навыками:**   * первичной обра- ботки результатов наблюдений (экс- периментов), * построения оценок неизвестных парамет- ров распределения с использованием мето- да максимального правдоподобия, мето- да наименьших квад- ратов, метода момен- тов, * применения стати- стических критериев для проверки гипотез. | ров распределений на основе выборочных средних.   1. Владение поняти- ями интервальной оценки, доверитель- ного интервала, дове- рительной вероятно- сти. Построение ин- тервальных оценок   для частот в схеме Бернулли.   1. Владение основ- ными понятиями, свя- занными с проверками   статистических гипотез. Постановка гипотез согласия, не- зависимости, однород- ности выборок. Владе- ние основными мето- дами проверки данных  гипотез в простом слу- чае. | щью метода максималь- ного правдоподобия, ме- тода моментов.   1. Владение понятиями интервальной оценки,   доверительного интерва- ла, доверительной вероят- ности. Построение ин- тервальных оценок па- раметров на основе нормального распределе- ния. Выполнение основ- ной части математиче- ских выкладок, воспроиз- ведение базовых матема- тических рассуждений в процессе их вывода.   1. Владение основными понятиями, связанными с проверками статистиче- ских гипотез. Постановка гипотез согласия, незави- симости, однородности выборок. Владение мето-   дами проверки данных гипотез в простом случае.  Умение давать со- держательную статистиче- | состоятельности и несмещённо- сти построенных оценок, сравнение различных оценок в смысле среднего квадратиче- ского. Владение понятием эффективности оценки, умение оценивать эффективность оце- нок в простых случаях.   1. Владение понятиями ин- тервальной оценки, доверитель- ного интервала, доверительной   вероятности. Построение ин- тервальных оценок параметров случайных величин с различ- ными законами распределения. Выполнение в полном объёме математических выкладок, вос- произведение математических рассуждений в процессе их вы- вода.   1. Владение основными поняти- ями, связанными с проверками   статистических гипотез. Понимание математических основ различных статистиче- ских критериев. Постановка гипотез согласия, независимо- сти, однородности выборок. Владение методами проверки данных гипотез. Умение давать  содержательную статистиче- скую интерпретацию результа- |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 1. Постановка основ- ных задач корреляци- онного анализа. Вы- числение выборочного коэффициента корре- ляции и коэффициента ранговой корреляции Спирмена, проверка их значимости, интер- претация результатов. 2. Постановка задачи одномерной линейной регрессии. Построение однофакторной линей-   ной регрессионной модели, первичный анализ качества ли- нейного приближения. | скую интерпретацию результатам применения статистических критериев.   1. Постановка основных задач корреляционного анализа. Вычисление вы- борочного коэффициента корреляции и коэффици-   ентов ранговой корре- ляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости. Умение да- вать статистическую ин- терпретацию результатов применения критериев.   1. Постановка задач одно- мерной и многомерной   линейной регрессии, авто- регрессии. Оценка коэффициентов линейных регрессионных моделей, моделей авторегрессии.  Анализ значимости коэффициентов регресси- онных моделей. Постанов- ка и решение задачи сглаживания наблюдений.  Выполнение основной  части математических выкладок, воспроизведе- | там применения критериев, пла- нировать дальнейшую обра- ботку и анализ данных в зави- симости от результатов работы критерия.   1. Постановка основных задач корреляционного анализа. Вла- дение математическими осно- вами критериев некоррелиро- ванности. Вычисление выбороч- ного коэффициента корреляции и коэффициентов ранговой кор- реляции Спирмена и Кендалла, проверка их значимости. Уме- ние давать статистическую ин- терпретацию результатов при- менения критериев в зависимо- сти от объема выборки, уровня   значимости.   1. Постановка различных задач регрессионного анализа. Оценка коэффициентов одномерных и многомерных линейных регрес-   сионных моделей, моделей авторегрессии, комбинирован- ных моделей. Анализ значимо- сти коэффициентов регрессион- ных моделей. Владение мето- дами анализа параметров регрессионных моделей (коли- чества факторов, порядка авто- регрессии). Постановка и реше-  ние задачи сглаживания наблю- дений. Выполнение в полном |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | 7. Постановка общей задачи дисперсион- ного анализа. Прове- дение однофакторного дисперсионного ана-  лиза по известному алгоритму. | ние базовых математиче- ских рассуждений в процессе их вывода.  7. Постановка общей зада- чи дисперсионного анали- за. Проведение однофак- торного дисперсионного анализа, интерпретация результатов. Выполнение основной части математи-  ческих выкладок, вос- произведение базовых математических рассужде- ний в процессе их вывода. | объёме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.  7. Постановка задач дисперсион- ного анализа. Владение матема- тическими основами методов дисперсионного анализа. Прове- дение однофакторного и двух-  факторного дисперсионного анализа, интерпретация результатов. Выполнение в пол- ном объёме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода. |

1. **Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирова-**

**ния компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом дея- тельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разде- ле «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

### Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компе-

**тенций**

**Пороговый уровень** (общие характеристики):

* владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
* знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
* владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
* способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дис- циплины;
* усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
* знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
* самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

**Продвинутый уровень** (общие характеристики):

* + достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
  + использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
  + владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и про - фессиональных задач;
  + способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
  + усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
  + умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
  + самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых об- суждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

**Высокий уровень** (общие характеристики):

* + систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
  + точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
  + безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в по - становке и решении научных и профессиональных задач;
  + способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабо- чей программы дисциплины;
  + полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
  + умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дис- циплине и давать им критическую оценку;
  + активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### Общие рекомендации по изучению материала курса и подбору заданий

Дисциплина «Дополнительные главы математической статистики» является важ- ным элементов формирования специалиста, способного применять современный матема- тический аппарат при решении прикладных задач, и относится к числу дисциплин по вы- бору и относится к вариативной части учебного плана в силу отбора изучаемого материа- ла и его важности для подготовки специалиста.

Ожидаемо, что изучение дисциплины будет эффективным только при наличии хорошей базы, основой которой является курс теории вероятностей и математической ста- тистики. Поэтому начальный этап освоения дисциплины «Дополнительные главы матема- тической статистики» требует актуализации знаний теории вероятностей и основ матема- тической статистики на первых лекционных занятиях. Не будет лишним продемонстриро- вать классические вероятностные опыты, проиллюстрировать основные понятия и решить несколько задач.

Целесообразно подготовить для каждого занятия билеты с задачами (достаточно иметь 2-3 разных варианта). Для первого занятия можно выбрать простые задачи на пер- вичную обработку экспериментальных данных, выдвижение «наивных» естественных гипотез. Начиная со второго занятия имеет смысл сдвигаться в сторону большей строго- сти, обоснованности выдвигаемых предположений. При изучении основ математической статистики следует уделить особое внимание проверке простых гипотез с использованием критерия Пирсона, а также методам построения оценок параметров распределения (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов), сопостав- ляя точность оценок, получаемых с помощью различных методов.

### Форма проведения экзамена по курсу

Студенты и преподаватели вполне отдают себе отчет в том, что еще живо пред- ставление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий, преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо уси- лий. При этом студенты порой пытаются подтвердить данное представление, а препода- ватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Очевидно, формат итоговой (или семестровой) аттестации накладывает опреде- ленный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной ат- тестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, то в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованностью студентов в работе в аудитории или дома. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении семестровой аттестации (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях,

результатов промежуточной аттестации, самостоятельной работы вне аудитории, активно- сти работы на лекциях) может поспособствовать увеличению интенсивности работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных за- нятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Данные соображения были учтены при разработке формы итоговой аттестации. На экзамене студент получает билет с четырьмя заданиями – два теоретического характе- ра и две задачи – «базовый комплект». Характер работы по ходу семестра «материали- зуется» в количестве дополнительных предложенных заданий: за активную работу на за- нятиях, высокие результаты прохождения промежуточных аттестаций (контрольных ра- бот) количество предлагаемых студенту заданий может быть уменьшено, а при слабой ра- боте (низкая посещаемость, слабые результаты или пропуски контрольных работ) – увели- чено (возможно, на 2-3). Однако критерии не зависят от количества предложенных зада- ний, оценка выставляется по следующей схеме: пять минус количество заданий, справить- ся с которыми не удалось. Таким образом, активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации, а те, кто своим жизнен- ным стилем избрали упомянутый в эпиграфе принцип, для успешного прохождения экза- менационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий.

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и про- зрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулиру- ет студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

### Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в тече- ние нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освое- ния, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетвори- тельно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полно- стью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне. Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полно-

стью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компе- тенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

В рамках экзамена выставление оценки и проверки уровня сформированности про- фессиональной компетенции ПК-2 производится в соответствии с описанными выше принципами и критериями из раздела 3.3. Оценка «отлично» (обучающийся справился со всеми предложенными экзаменационными заданиями) соответствует высокому уровню сформированности компетенции. Если обучающийся не справился лишь с одним из пред- ложенных заданий, то делается вывод о продвинутом уровне сформированности компе- тенции и выставляется оценка «хорошо». Оценка «удовлетворительно» и вывод о ба-

зовом уровне сформированности компетенции соответствуют ситуации, когда экзамену- емый не справился с двумя предложенными заданиями (и остальные задания выполнены на необходимом уровне). Если обучающийся не справился с тремя или большим количе- ством экзаменационных заданий, то можно сделать вывод, что компетенция сформиро- вана на уровне ниже порогового, а за экзамен выставляется оценка «неудовлетворитель- но».

**Приложение №2 к рабочей программе дисциплины**

**«Дополнительные главы математической статистики»**

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Курс дополнительных глав математической статистики является естественным прикладным дополнением дисциплины «Теория вероятностей и математическая статисти- ка», что позволяет рассматривать его как один важнейших математических курсов для специальности прикладная математика и информатика. Курс относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

В ходе изучения курса предполагается проведение пяти контрольных работ по следующим темам:

1. Основы математической статистики
2. Проверка статистических гипотез

В процессе решения контрольных работ студенты должны овладеть практически- ми навыками статистической обработки и анализа опытных данных, получаемых в ходе проведения экспериментальных исследований, оценки параметров распределений, по- становки статистических гипотез и их проверки, проведения корреляционного, регресси- онного и дисперсионного анализа.

Подробные сведения по данным темам Вы можете найти в книгах из приведен- ного ниже списка рекомендуемой литературы, где есть ссылки на соответствующие главы и параграфы.

### Рекомендуемая литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110c
2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479c

### Примеры выполнения заданий контрольных работ

**Пример 1.** Получена таблица частот оценок по контрольной работе у 40 учащихся класса:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Оценка | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Частота | 3  40 | 8  40 | 25  40 | 4  40 |

Найдите: а) выборочное среднее значение оценки; б) выборочную дисперсию; в) ис-

правленную выборочную дисперсию; г) выборочное среднее квадратичес~кое отклонение

~*σ* ; д) исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

~*σ* .

**Решение.** По вычислительным формулам для значений выборочного среднего, вы- борочной дисперсии, выборочного среднеквадратического отклонения и исправленной его

оценки получае2м:

*m*~ =

а)

# ⋅3+3⋅8+ 4⋅25+5⋅4 =3 *,*75

40 ;

# ~*D* = ( 2−3 *,* 75) ⋅3+( 3−3 *,* 75) ⋅8+( 4−3 *,* 75) ⋅25+( 5−3 *,*75 ) ⋅4 =0 *,*5375

б) 40 ;

в) ~*D* ≈ 0*,*55 ;

г) ~*σ* = √~*D* ≈ 0*,*73 ;

~*σ* = √~ ≈ 0*,*74

д)

*D*

.

**Пример 2.** Пусть дисперсия нормально распределенной случайной величины х рав-

на 0,25. По выборке объема n=25 найдено выборочное среднее *m*~ =52. Требуется найти

доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m, если довери- тельная вероятность должна быть равна 0,95.

**Решение.** Решаем уравнение 2Ф (t) = 0,95, используя таблицу значений функции Лапласа. Для t получим значение 1,96. Затем находим концы доверительного интервала:

*m*~ − *t*

*σ* = 52− 1 *,*96 √0*,* 25 = 52 − 0 *,*196 = 51 *,* 804 *;*

*γ* √*n*

√25

*m*~ + *t*

*σ* = 52+ 1 *,* 96 √0 *,*25 = 52 + 0*,* 196 = 52 *,*196 .

*γ* √*n*

√25

Таким образом, (51,804; 52,196) – искомый доверительный интервал с надежностью 0,95; т.е. P(51,804 < m < 52,196)  0,95.

**Пример 3.** Найдите доверительный интервал для математического ожидания m нормально распределенной случайной величины, для которой по выборке объема n = 25

найдены выборочное среднее

*m*~ = 2,4 и исправленная выборочная дисперсия

~*D* = 4,

если надежность должна равняться  = 0,95.

**Решение.** Пользуясь таблицей (см. приложение), решаем уравнение 2S(t) = 0,95 и находим t = 2,064. Тогда имеем:

~

*m*~ − *t*  *σ* = 2,4− 2 *,*064 √4 = 1*,* 5744 *;*

*γ* √*n*

~

√25

*m*~ + *t*

*σ* = 2,4 + 2 *,* 064 √4 = 3 *,* 2256.

*γ* √*n*

√25

Искомый доверительный интервал (1, 5744; 3,2256).

Замечание. При достаточно большом n (практически при n > 20) для нахождения доверительного интервала (2) число t можно найти из уравнения 2Ф(t ) =  по таблице для функции Лапласа. Это связано с тем, что при n   закон распределения Стьюдента стремится к нормальному.

В рассмотренном выше примере (n = 25) при использовании таблицы Ф(t) получим доверительный интервал (1,616; 3,184).

**Пример 4.** В результате 100 независимых опытов событие А произошло 36 раз. Требуется найти доверительный интервал для вероятности р = р(А) при заданной довери- тельной вероятности  = 0,8.

**Решение.** По условию n = 100 и k= 36, следовательно,  = 0,36. Далее по таблице для функции Лапласа находим t = 1,28. Подставляя полученные значения в формулу, имеем:

0 *,* 36+ 1 ⋅1 *,* 282 − 1 *,* 28 0 *,* 36⋅0 *,* 64

√

~*p* = 2⋅100 100 ≈ 0 *,* 3018

1

1+ 1 ⋅1*,* 282

100 ;

~*p* =

2

0 *,*36+ 2⋅100 ⋅1 *,* 28 + 1 *,*28 √100

1

≈ 0 *,* 4228

1+100

⋅1 *,* 282

.

Таким образом, с вероятностью  0,8 выполняется неравенство 0,3018 < p < 0,4228.

**Пример 5.** Система случайных величин (**х, у**) задана таблицей распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| у  х | -1 | 0 | 1 |
| 0 | 0,10 | 0,15 | 0,20 |
| 1 | 0,15 | 0,25 | 0,15 |

Найдите коэффициент корреляции между х и у.

**Решение.**  *M*Воспользуемся формулами для вычисления коэффициента корреляции:

[ *x y* ] − *M* [ *x* ] *M* [ *y* ]

*r* [ x, *y* ] = *σ* [ *x*] *σ* [ *y* ] .

В данном случае

M[xy] = 0  (-1)  0,10 + 0  0  0,15 + 0 1  0,20 + 1  (-1)  0,15 + 1  0  0,25 + 1  1  0,15 = 0.

Для нахождения M[x], M[y],  [x] и  [x] составим законы распределения величин х и у в отдельности:

- закон распределения х;

|  |  |
| --- | --- |
| 0 | 1 |
| 0,45 | 0,55 |

- закон распределения у;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| -1 | 0 | 1 |
| 0,25 | 0,40 | 0,35 |

Отсюда

M[x] = 0  0,45 + 1 0,55 = 0,55;

M[y] = (-1)  0,25 + 0  0,040 + 1  0,25 = 0,1; D[x] = M[x2] – M[x]2 = 0,55 – 0,552 = 0,2475;

 [x] = √0*,*2475  0,497;

D[y] = M[y2] – M[y]2 = 0,6 – 0,12 = 0,59;

 [y] = √0*,*59  0,768;

*r* [ x, *y* ] = 0 −0 *,* 55⋅0,1

0 *,* 497 ⋅0 *,* 768

≈ −0 *,* 144

.

**Пример 6.** В результате 10 независимых опытов над системой (х,у) получены точки: (2,1; 3,0), (2,1; 2,8), (2,0; 3,0), (2,5; 2,0), (2,8; 1,8), (2,2; 2,5), (3,2; 1,5), (3,2; 1,1), (3,2; 1,0),

(4,7; 1,3). Найдите выборочный коэффициент корреляции.

**Решение.** Для удобства вычислений составляем расчетную таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № опыта | xk\* | yk | xk yk | *xk* | *yk* |
| 1 | 2,1 | 3,0 | 6,30 | 4,41 | 9,00 |
| 2 | 2,1 | 2,8 | 5,88 | 4,41 | 7,84 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 3 | 2,0 | 3,0 | 6,0 | 4,00 | 9,00 |
| 4 | 2,5 | 2,0 | 5,0 | 6,25 | 4,00 |
| 5 | 2,8 | 1,8 | 5,04 | 7,84 | 3,24 |
| 6 | 2,2 | 2,5 | 5,50 | 4,84 | 6,25 |
| 7 | 3,2 | 1,5 | 4,80 | 10,24 | 2,25 |
| 8 | 3,2 | 1,1 | 3,52 | 10,24 | 1,21 |
| 9 | 3,2 | 1,0 | 3,20 | 10,24 | 1,00 |
| 10 | 4,7 | 1,3 | 6,11 | 22,09 | 1,69 |
| Сумма | 28 | 20 | 51б35 | 84,56 | 45,48 |

## Далее находим:

*m*~*x* = 2,8 ; *m*~*y* = 2,0 ; *m*~*xy* = 5 *,*135 ;

*Dx* =~*mx*2 − *m*~ = 8 *,* 456 − 2,8 = 0 *,*616 ;

*σ*

2 2

*x*

~*x* =

√0 *,* 616 ≈0 *,* 785 ;

*Dy* =*m*~*y*2 − ~*m* = 4 *,*548 − 2 = 0 *,* 548

;

2 2

*y*

~*y* =

√0 *,* 548 ≈0 *,*740 ;

## ~ = 5 *,* 135 − 2,8⋅2 ≈ −0,8

*σ*

*r*

*xy* 0 *,* 785⋅0 *,*740 .

Так как модуль коэффициента корреляции близок к 1, то зависимость между х и у можно считать близкой к линейной, причем корреляция отрицательная ( с возрастанием х величина у в среднем убывает).