Министерство образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**В.А. Краснов**

# Современная дифференциальная геометрия

*Учебное пособие*

Ярославль 2000

В 151.6я73
К78

**Краснов В.А.**
**Современная дифференциальная геометрия:** Учеб. пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2000. 88 с.
ISBN 5-8397-0062-2

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов 3-го курса, обучающихся по направлению и по специальности "Математика". Оно может служить введением в современную геометрию и может быть использовано при чтении спецкурсов. В нем подробно обсуждаются такие важные геометрические объекты, как многообразия и расслоения, дифференциальные формы и связности. Центральной является глава, посвященная римановой геометрии. Предварительно излагаются элементы полилинейной алгебры.

**Рецензенты:** проф. А.С. Тихомиров, кафедра геометрии Ярославского государственного педагогического университета.

ISBN 5-8397-0062-2

© Ярославский государственный университет, 2000
© Краснов В.А., 2000

---

**Краснов Вячеслав Алексеевич**
**Современная дифференциальная геометрия**

Редактор, корректор А.А. Аладьева

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.
Подписано в печать 09.03.2000. Формат 60x84/16. Бумага тип.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,5.
Тираж 75 экз. Заказ № 95

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Отпечатано на ризографе.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

**Содержание**


| | |
|---|---|
| Введение | 4 |
| Глава I. Элементы полилинейной алгебры. | 5 |
| 1. Полилинейные отображения. | 5 |
| 2. Тензорное произведение. | 8 |
| 3. Тензорная алгебра векторного пространства. | 10 |
| Глава II. Локальная риманова геометрия. | 14 |
| 1. Векторные поля в области $R^n$. | 14 |
| 2. Риманова метрика в области $R^n$. | 19 |
| 3. Ковариантное дифференцирование. | 22 |
| 4. Аффинная связность. | 23 |
| 5. Риманова связность. | 26 |
| 6. Изометрии римановой области. | 29 |
| 7. Вариационное определение геодезических. | 31 |
| 8. Плоскость Лобачевского. | 34 |
| 9. Тензор кривизны римановой связности. | 36 |
| 10. Внешние дифференциальные формы. | 41 |
| Глава III. Геометрия многообразий. | 46 |
| 1. Криволинейные координаты в $R^n$ | 46 |
| 2. Группы преобразований как многообразия в N-мерном пространстве. | 48 |
| 2.1. Задание многообразия системой уравнении. | 48 |
| 2.2. Экспонента от матрицы. | 49 |
| 2.3. Группы $GL(n,R)$, $SL(n,R)$, $O(n,R)$, $SO(n,R)$. | 50 |
| 3. Топологические многообразия. | 52 |
| 4. Карты и атласы. | 55 |
| 5. Проективное пространство. | 56 |
| 6. Абстрактные дифференцируемые многообразия. | 58 |
| 7. Обобщенная формула Стокса. | 60 |
| 7.1. Формула Стокса для $n$-мерного куба. | 60 |
| 7.2. Дифференцируемые многообразия с краем. | 63 |
| 7.3. Когомологии де Рама. | 66 |
| Глава IV. Комплексный язык в геометрии. | 68 |
| 1. Комплексные векторы и ковекторы. | 68 |
| 2. Многообразия, заданные комплексными уравнениями. | 70 |
| 3. Плоские комплексные кривые. | 72 |
| 4. Кватернионы. | 74 |
| 5. Вещественные и комплексные коники. | 77 |
| 6. Зачем нужен комплексный язык в геометрии? | 79 |

Глава V. Векторные расслоения и связности. 80
1. Определение и примеры векторных расслоений. 80
2. Касательное расслоение. 82
3. Сечения векторного расслоения. 83
4. Ковариантная производная и связность. 84
Заключение. 87
Литература. 88

## Введение

В современных рабочих учебных планах для специальности "Математика" на изучение дифференциальной геометрии отводится 36 часов. За это время можно только познакомиться с классической дифференциальной геометрией кривых и поверхностей в $\mathbf{R}^3$. Таким образом, возникает необходимость в дополнительном изучении дифференциальной геометрии. Данное пособие должно помочь в решении этой задачи. Например, оно будет полезным при изучении курса по выбору "Современная геометрия". Заметим, что в этом пособии мы излагаем в основном темы, связанные с римановой геометрией. Задачи, которые приводятся в тексте пособия, можно решать на практических занятиях, а также предлагать их для самостоятельного решения при прохождении соответствующей темы. Некоторые задачи можно предложить в качеcте тем курсовых работ.

Скажем несколько слов о содержании пособия и особенностях изложения рассматриваемых тем. Первая глава является вспомогательной, она посвящена полилинейной алгебре. Пря изложении этой темы была использована книга [3]. Центральной является вторая глава, посвященная римановой геометрии. Здесь мы излагаем только локальную риманову геометрию, но стиль изложения такой, что основные определения и теоремы без труда переносятся для геометрии многообразий. При написании этой главы использовались книги [1], [4]. Для дальнейшего изучения римановой геометрии очень полезна книга Э.Картана [2], впрочем, ее трудно достать. Третья глава посвящена многообразиям. Здесь отводится много материала для знакомства с этим понятием, в частности, рассмотрены классические группы как подмногообразия арифметического пространства. Наконец, даются указания, как переписать главу II для многообразий. Кроме этого, мы излагаем теорию интегрирования дифференциальных форм на многообразии, в частности,

доказывается обобщенная формула Стокса. Четвертая глава является специфической. Она посвящена комплексному языку в геометрии. При написании этой главы использовалась книга [1]. Эта глава, в частности, может служить введением в комплексную дифференциальную геометрию. Последняя глава знакомит с дифференциальной геометрией векторных расслоений. В ней обобщаются некоторые предыдущие понятия, и она подготавливает читателя к изучению более фундаментальных трудов по современной геометрии.

## Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### 1. Полилинейные отображения.

Далее $V, W, V_1, V_2, \ldots, W_1, W_2, \ldots$ –векторные пространства над полем $K$, причем $K$ равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

**Определение 1.1.** *Отображение $f : V \to W$ линейное, если для всех $v, v_1, v_2 \in V$, $a \in K$ выполняются равенства*

$$f(av) = af(v),\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + (v_2).$$

Задача 1.2. Показать, что для линейного отображения $f : V \to W$ выполняется равенство

$$f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i),$$

где $a_i \in K$, $v_i \in V$.

Задача 1.3. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис $V$, $w_1 \ldots, w_m$ – базис $W$. Показать, что существует и единственное линейное отображение $f_k^l : V \to W$, $1 \le k \le n$, $1 \le l \le m$, такое, что

$$f_k^l(v_i) = \begin{cases} w_l, \text{ если} & i = k; \\ 0, \text{ если} & i \ne k. \end{cases}$$

Написать матрицу отображения $f_k^l$.

Задача 1.4. Обозначим через $L(V, W)$ множество линейных отображений из $V$ в $W$. Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из $K$; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения $f_k^l$, $1 \le k \le n, 1 \le l \le m$, из задачи 1.3 образуют базис векторного пространства $L(V, W)$; доказать равенство

$$dim\, L(V, W) = dim\, V \cdot dim\, W$$

Векторное пространство $L(V,K)$ обозначается через $V^*$ и называется двойственным к $V$ пространством. Его элементы называются линейными функциями или линейными формами. Как правило, линейные формы будут обозначаться греческими буквами: $\alpha : V \to K$, $\alpha(v)$.

Задача 1.5. Пусть $v_1, \dots, v_n$ – базис $V$. Показать, что существует и единственная линейная форма $v_i^*$, $1 \le i \le n$, такая, что

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Задача 1.6. Показать, что формы $v_1^*, \dots, v_n^*$ образуют базис пространства $V^*$.

Задача 1.7. Показать, что если вектор $v \in V$ имеет в базисе $v_1, \dots, v_n$ координаты $a_1, \dots, a_n$, то $v_i^*(v) = a_i$.

Заметим, что базис $v_1^*, \dots v_n^*$ пространства $V^*$ называют двойственным базисом к базису $v_1, \dots, v_n$ пространства $V$. Линейная форма

$$\alpha = a_1 v_1^* + \dots + v_n^*$$

обычно записывается следующим образом (почему?)

$$\alpha = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,$$

где $x_1, \dots, x_n$ – переменные координаты вектора $v \in V$. В частности, $v_i^* = x_i$.

Задача 1.8. Рассмотрим "дважды двойственное к $V$ пространство" $V^{**} = (V^*)^*$. Показать, что отображение $\varepsilon : V \to V^{**}$, определенное равенством $\varepsilon(v)(\alpha) = \alpha(v)$, является линейным отображением. Показать, что для конечномерного пространства $V$ отображение $\varepsilon : V \to V^{**}$ является изоморфизмом.

**Определение 1.9.** *Отображение $f : V_1 \times V_2 \to W$ билинейное, если для всех $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $a \in K$, $v_1', v_1'' \in V_1$, $v_2', v_2'' \in V_2$ выполняются равенства*

$$f(av_1, v_2) = af(v_1, v_2),$$
$$f(v_1, av_2) = af(v_1, v_2),$$
$$f(v_1' + v_1'', v_2) = f(v_1', v_2) + f(v_1'', v_2),$$
$$f(v_1, v_2' + v_2'') = f(v_1, v_2') + f(v_1, v_2'').$$

Другими словами, функция $f(v_1, v_2)$ от двух векторных переменных $v_1$, $v_2$ линейна по $v_1$ и $v_2$.

**Задача 1.10.** Показать, что следующие отображения билинейны:

$$K \times V \to V,\ (a, v) \mapsto av,$$

$$V^* \times V \to K,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha(v).$$

**Задача 1.11.** Пусть $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис $V_1$, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис $V_2$, $w_1, \ldots, w_l$ – базис $W$. Показать, что существует и единственное билинейное отображение

$$f_{pq}^r : V_1 \times V_2 \to W, \quad 1 \le p \le n, \quad 1 \le q \le m, \quad 1 \le r \le l$$

такое, что

$$f_{pq}^r(v_i^1, v_j^2) = \begin{cases} w_r, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Задача 1.12.** Обозначим через $L(V_1, V_2; W)$ множество билинейных отображений $V_1 \times V_2$ в $W$. Ввести на этом множестве операцию сложения и операцию умножения на скаляры из $K$; показать, что получается векторное пространство; показать, что отображения $f_{pq}^r$, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le m, 1 \le r \le l$, из задачи 1.11 образуют базис пространства $L(V_1, V_2; W)$; доказать равенство

$$dim\, L(V_1, V_2; W) = dim\, V_1 \cdot dim\, V_2 \cdot dim\, W.$$

Элементы пространства $L(V, V; K)$ называются *билинейными формами* на $V$. Как правило, билинейные формы будут обозначаться греческими буквами:

$$\beta : V \times V \to K, \quad \beta(v, v').$$

**Задача 1.13.** Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – базис $V$. Показать, что существует и единственная билинейная форма $\beta_{pq}$ на $V$, $1 \le p \le n, 1 \le q \le n$, такая, что

$$\beta_{pq}(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = p, j = q; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Задача 1.14.** Показать, что билинейные формы $\beta_{pq}$, $1 \le p \le n$, $1 \le q \le n$, из задачи 1.13 образуют базис пространства билинейных форм на $V$.

Билинейная форма

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij}$$

обычно записывается следующим образом

$$\beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x'_j,$$

где $x_1, \cdots, x_n$ – переменные координаты вектора $v \in V$, а $x'_1, \cdots, x'_n$ – координаты вектора $v' \in V$.

Задача 1.15. Доказать равенство

$$\beta_{ij}(v, v') = v_i^*(v) \cdot v_j^*(v'),$$

где $v_1^*, \ldots, v_n^*$, – двойственный базис.

Задача 1.16. Сформулировать определение полилинейного отображения

$$f : V_1 \times \ldots \times V_k \to W.$$

Найти базис пространства полилинейных отображений $L(V_1, \ldots, V_k; W)$.

Задача 1.17. Рассмотрим отображение

$$\det : \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n \text{ раз}} \to K,$$

где $\det(v_1, \ldots, v_n)$ – определитель матрицы, которая получается из векторов $(v_1, \ldots, v_n)$, если их записать в столбец. Показать, что отображение det полилинейно.

## 2. Тензорное произведение.

Здесь мы будем рассматривать только конечномерные векторные пространства над $K$. Сначала определим тензорное произведение линейных форм.

**Определение 2.1.** *Пусть $\alpha_1 \in V_1^*$, $\alpha_2 \in V_2^*$, тогда тензорное произведение этих форм $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ принадлежит пространству $L(V_1, V_2; K)$ и по определению равно*

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1) \cdot \alpha_2(v_2). \tag{2.1}$$

Задача 2.2. Показать, что $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ действительно принадлежит пространству $L(V_1, V_2; K)$.

Задача 2.3. Показать, что отображение

$$\otimes : V_1^* \times V_2^* \to L(V_1, V_2; K),$$

заданное равенством (2.1), билинейно.

**Задача 2.4.** Показать, что если $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1$ – базис $V_1^*$, $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_m^2$ – базис $V_2^*$, то $\alpha_i^1 \otimes \alpha_j^2$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$, – базис пространства $L(V_1, V_2; K)$.

**Определение 2.5.** *Тензорное произведение векторов из $V_1$ на векторы из $V_2$ – это билинейное отображение*

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W,$$

*где $W$ – некоторое векторное пространство, причем это отображение должно удовлетворять требованию: если $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис пространства $V_1$, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис $V_2$, то произведения $v_i^1 \otimes v_j^2$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, образуют базис пространства $W$.*

**Теорема 2.6.** *Тензорное произведение существует и оно единственное (с точностью до изоморфизма).*

**Доказательство.** Так как канонические отображения

$$\varepsilon : V_1 \to V_1^{**}, \quad \varepsilon : V_2 \to V_2^{**}$$

являются изоморфизмами, то достаточно построить тензорное произведение для пространств $V_1^{**} = (V_1^*)^*$, $V_2^{**} = (V_2^*)^*$. Но для них годится конструкция из определения 2.1, а задача 2.4 показывает, что это произведение удовлетворяет требованию в определении 2.5. Существование доказано, перейдем к доказательству единственности (с точностью до изоморфизма). Пусть имеется два таких произведения, то есть два билинейных отображения

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to W, \otimes' : V_1 \times V_2 \to W'.$$

Если $v_1^1, \ldots, v_n^1$ – базис $V_1$, $v_1^2, \ldots, v_m^2$ – базис $V_2$, то произведения $v_i^1 \otimes v_j^2$ образуют базис $W$, а произведения $v_i^1 \otimes' v_j^2$ – базис $W'$. Существует и единственный изоморфизм $f : W \to W'$ такой, что $f(v_i^1 \otimes v_j^2) = v_i^1 \otimes' v_j^2$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Осталось заметить, что $f \circ \otimes = \otimes'$, так как это равенство означает, что произведения $\otimes$, $\otimes'$ совпадают с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

Заметим, что векторное пространство $W$ в определении 2.5 называется *тензорным произведением* пространств $V_1$, $V_2$ и обозначается через $V_1 \otimes V_2$. Итак, тензорное произведение векторов задает отображение

$$\otimes : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2.$$

Задача 2.7. Определить тензорное произведение векторов $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ из пространств $V_1, \ldots, V_k$. Построить канонические изоморфизмы

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3.$$

Пример 2.8. Комплексификация вещественного векторного пространства.

Рассмотрим $\mathbf{C}$ как векторное пространство над $\mathbf{R}$. Пусть $V$ – векторное пространство над $\mathbf{R}$, тогда тензорное произведение $\mathbf{C} \otimes V$ является векторным пространством над $\mathbf{R}$, но его можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbf{C}$, если положить $a \cdot (b \otimes v) = (ab) \otimes v$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $v \in V$. Тензорное произведение $\mathbf{C} \otimes V$, рассматриваемое как векторное пространство над $\mathbf{C}$, называется *комплексификацией* $V$ и обозначается через $V_{\mathbf{C}}$. Если элемент $1 \otimes v + i \otimes w$, $v, w \in V$, обозначить через $v + iw$, то получим, что комплексификация $V_{\mathbf{C}}$ состоит из выражений $v + iw$. Операции над этими выражениями производятся естественным образом, в частности,

$$(a + ib) \cdot (v + iw) = (av - bv) + i(bv + aw),$$

где $a + ib \in \mathbf{C}$.

Задача 2.9. Пусть $f : V_1 \times V_2 \to W$ – билинейное отображение. Показать, что существует и единственное линейное отображение $g : V_1 \otimes V_2 \to W$ такое, что выполняется равенство $g \circ \otimes = f$.

Задача 2.10. Показать, что существует канонический изоморфизм

$$(V_1 \otimes V_2)^* = V_1^* \otimes V_2^*.$$

### 3. Тензорная алгебра векторного пространства.

Далее $V$ – конечномерное векторное пространство над полем $K$. Через $T^q(V)$ обозначим тензорное произведение

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ раз}},$$

а его элементы будем называть тензорами ранга $q$. Если $v_1, \ldots, v_n$ – базис $V$, то тензоры $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$, $1 \le i_1 \le n, \ldots, 1 \le i_q \le n$, образуют базис пространства $T^q(V)$. Таким образом, для $t \in T^q(V)$ имеем разложение

$$t = \sum t^{i_1 \ldots i_q} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}.$$

Тензор $t \in T^q(V)$ называется *разложимым*, если существуют векторы $v_1, \dots, v_q \in V$ такие, что $t = v_1 \otimes \dots \otimes v_q$.

Задача 3.1. Пусть $\sigma$ – перестановка чисел $\{1, \dots, q\}$. Показать, что существует и единственное линейное отображение

$$f_\sigma : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое действует на разложимых тензорах по правилу

$$f_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_q) = v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(q)}.$$

**Определение 3.2.** *Тензор $t \in T^q(V)$ называется симметрическим (кососимметрическим), если $f_\sigma(t) = t$ ($f_\sigma(t) = \varepsilon(\sigma)t$) для каждой перестановки $\sigma$, где $\varepsilon(\sigma)$ – знак перестановки $\sigma$.*

Множество симметрических тензоров в $T^q(V)$ обозначается через $S^q(V)$, а множество кососимметрических — через $\Lambda^q(V)$.

Задача 3.3. Показать, что множества $S^q(V)$, $\Lambda^q(V)$ являются векторными подпространствами $T^q(V)$.

Далее предполагается, что поле $K$ имеет нулевую характеристику. Рассмотрим линейное отображение

$$S : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$S(t) = \frac{1}{q!} \sum_\sigma f_\sigma(t).$$

Это отображение называется *симметризацией*.

Задача 3.4. Показать, что $S^2 = S$, $Im\, S = S^q(V)$.

Рассмотрим линейное отображение

$$A : T^q(V) \to T^q(V),$$

которое определяется равенством

$$A(t) = \frac{1}{q!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) f_\sigma(t).$$

Оно называется *антисимметризацией* или *альтернированием*.

Задача 3.5. Показать, что $A^2 = A$, $Im\, A = \Lambda^q(V)$.

Введем следующее обозначение: если $v_1, \dots, v_n$ – базис $V$, то $S(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q})$ обозначим через $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$. Формальное произведение $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$ не меняется при перестановке индексов, поэтому можно условиться выбирать в качестве канонической записи таких симметрических тензоров следующую запись:

$$v_1^{a_1} \cdots v_n^{a_n}, \quad \text{где } a_i \geq 0,\ a_1 + \dots + a_n = q,$$

где число $a_i$ показывает, сколько раз вектор $v_i$ фигурирует в $v_{i_1} \cdots v_{i_q}$.

Задача 3.6. Доказать, что тензоры $v_1^{a_1} \cdots v_n^{a_n} \in S^q(V)$, $a_i \geq 0$, $a_1 + \dots + a_n = q$, образуют базис пространства $S^q(V)$. Показать, что

$$dim\ S^q(V) = \binom{n+q-1}{q}.$$

Введем обозначение

$$A(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_q}) = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$$

(значок $\wedge$ называется символом *внешнего умножения*). Заметим теперь, что перестановка любых двух векторов в $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$ меняет знак этого произведения.

Задача 3.7. Показать, что:

1) $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q} = 0$, если $i_a = i_b$ для некоторых $a, b$;

2) тензоры вида $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_q}$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq n$, образуют базис пространства $\Lambda^q(V)$ при $1 \leq q \leq n$;

3) $\Lambda^q(V) = 0$ при $q > n$;

4) $dim\, \Lambda^q(V) = \binom{n}{q}$ при $1 \leq q \leq n$.

Положим

$$T^0(V) = K, \quad T(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q(V).$$

Бесконечномерное пространство $T(V)$ с операцией тензорного умножения называется *тензорной алгеброй* пространства $V$.

Положим

$$S^0(V) = K, \quad S(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^q(V).$$

Введем на пространстве $S(V)$ билинейное умножение по формуле

$$t_1 t_2 = S(t_1 \otimes t_2),\ t_1 \in S^p(V), t_2 \in S^q(V).$$

**Задача 3.8.** Показать, что $S(V)$ с введенным умножением является коммутативной ассоциативной алгеброй над полем $K$.

Положим

$$\Lambda^0(V) = K, \quad \Lambda(V) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V).$$

Введем на пространстве $\Lambda(V)$ билинейное умножение по формуле

$$t_1 \wedge t_2 = A(t_1 \otimes t_2), \quad t_1 \in \Lambda^p(V),\ t_2 \in \Lambda^q(V).$$

**Задача 3.9.** Показать, что $\Lambda(V)$ с введенным умножением является ассоциативной алгеброй над полем $K$, удовлетворяющей свойству

$$t_2 \wedge t_1 = (-1)^{pq} t_1 \wedge t_2, \quad t_1 \in \Lambda^p(V),\ t_2 \in \Lambda^q(V).$$

Алгебра $\Lambda(V)$ называется *внешней* алгеброй или *алгеброй Грассмана* пространства $V$.

**Задача 3.10.** Используя определение 2.1 показать, что:

1) $T^q(V^*)$ – пространство полилинейных функций

$$f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q \text{ раз}} \to K;$$

2) $S^q(V^*)$ – пространство симметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = f(v_1, \ldots, v_q);$$

3) $\Lambda^q(V^*)$ – пространство кососимметрических полилинейных функций, т.е.

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, \ldots, v_q);$$

4) если $t_1 \in T^p(V^*)$, $t_2 \in T^q(V^*)$, то

$$(t_1 \otimes t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = t_1(v_1, \ldots, v_p) \cdot t_2(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q});$$

5) если $t_1 \in S^p(V^*)$, $t_2 \in S^q(V^*)$, то

$$(t_1 \cdot t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} t_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot t_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)});$$

6) если $t_1 \in \Lambda^p(V^*)$, $t_2 \in \Lambda^q(V^*)$, то

$$(t_1 \wedge t_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)t_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\cdot t_2(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)}).$$

# Глава II. ЛОКАЛЬНАЯ РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

## 1. Векторные поля в области $\mathbf{R}^n$.

Далее $U$ – область в $\mathbf{R}^n$. Пусть $x_0 \in U$ – фиксированная точка, тогда через $T_{x_0}U$ будем обозначать множество векторов в $\mathbf{R}^n$ с началом в точке $x_0$ (см. рис.1). Это множество является, на самом деле, векторным пространством. Оно называется *касательным* пространством к $U$ в точке $x_0$.

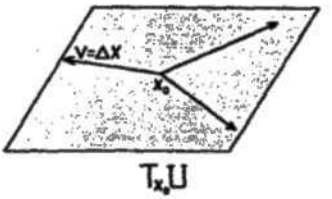


**Рисунок 1.**

Пусть далее $f(x)$ – функция, определенная в окрестности точки $x_0$. Будем предполагать, что она класса $C^\infty$ в этой окрестности. Тогда определен дифференциал этой функции $df(x_0)$ и он является линейной формой на касательном пространстве $T_{x_0}U$. Действительно, дифференциал $df(x_0)$ является линейной функцией от приращения $\Delta x$, но $\Delta x$ – это вектор с началом в точке $x_0$. Таким образом, дифференциал $df(x_0)$ является элементом двойственного пространства $(T_{x_0}U)^*$. Оно обозначается через $T^*_{x_0}U$ и называется *кокасательным* пространством к $U$ в точке $x_0$. Элементы пространства $T^*_{x_0}U$ называются *касательными ковекторами*. Итак, дифференциал $df(x_0)$ является касательным ковектором. Рассмотрим дифференциалы координатных функций $dx_1,\dots,dx_n$. Равенство $dx_i = \Delta x_i$ означает, что значение дифференциала $dx_i$ на векторе $v = \Delta x$ равно $i$-ой координате вектора $v$ в стандартном базисе $e_1,\dots,e_n$. Таким образом, дифференциалы координатных функций $dx_1,\dots,dx_n$ в точке $x_0$ являются элементами двойственного базиса $e_1^*,\dots,e_n^*$, а разложение

дифференциала функции $f(x)$

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i$$

является разложением ковектора $df(x_0)$ по базису ковекторов $e_1^*, \ldots, e_n^*$.

Если функции $f_1, f_2$ совпадают при ограничении их на маленькую окрестность точки $x_0$, то дифференциалы $df_1(x_0), df_2(x_0)$ равны. Отсюда следует, что удобно рассматривать дифференциал от ростка функции. Будем говорить, что *функции $f_1, f_2$ имеют одинаковые ростки в точке $x_0$, если при ограничении их на достаточно маленькую окрестность точки $x_0$ получаем равные функции.* Заметим, что мы рассматриваем только функции класса $C^\infty$. Можно дать определение ростка более формально следующим образом. Пусть функции $f_1, f_2$ определены в окрестностях $U_1, U_2$ точки $x_0$, соответственно. Будем считать функции $f_1, f_2$ *эквивалентными* ($f_1 \sim f_2$), если существует третья окрестность $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ точки $x_0$ такая, что $f_1 |_{U_3} = f_2 |_{U_3}$. Тогда *росток функции $f$* — это *класс эквивалентности* данной функции. Множество ростков функций в точке $x_0$ обозначим через $\mathcal{O}_{x_0}$. Росток функции $f$ будем обозначать через $[f]$, а если не приводит к путанице, то просто через $f$. Формулы

$$c[f] = [cf], \quad [f] + [g] = [f + g], \quad [f] \cdot [g]$$

определяют операцию умножения ростка на число, операцию сложения ростков и операцию умножения ростков. Благодаря этим операциям множество $\mathcal{O}_{x_0}$ становится алгеброй над полем $\mathbf{R}$. Дифференциал определяет отображение

$$d : \mathcal{O}_{x_0} \to T_{x_0}^* U,$$

которое линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяет правилу Лейбница

$$d([f] \cdot [g]) = g(x_0) \cdot d[f] + f(x_0) \cdot d[g].$$

Если $f \in \mathcal{O}_{x_0}$ и $v \in T_{x_0}$, то число $df(x_0)(v)$ будем обозначать через $\partial_v(f)$ и называть *производной $f$ по направлению вектора $v$*. В результате получаем отображение

$$\partial_v : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathbf{R},$$

которое линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial_v(f) + f(x_0) \cdot \partial_v(g).$$

**Определение 1.1.** *Отображение $\partial : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathbf{R}$ называется дифф ренцированием алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$, если оно линейно над $\mathbf{R}$ и удовлетворяе правилу Лейбница*

$$\partial(f \cdot g) = g(x_0) \cdot \partial f + f(x_0) \cdot \partial g.$$

**Задача 1.2.** Показать, что $\partial(C) = 0$, где $C = const$.

Таким образом, каждый касательный вектор $v \in T_{x_0}U$ определяе дифференцирование алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$. В частности, базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$ определяют дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, то есть

$$\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Обозначим через $D_{x_0}$ множество дифференцирований алгебры $\mathcal{O}_{x_0}$, то гда формулы

$$(c\partial)(f) = c\partial(f), \quad (\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1(f) + \partial_2(f)$$

определяют операцию умножения на число и операцию сложения во мно жестве $D_{x_0}$, благодаря которым $D_{x_0}$ становится векторным простран ством.

**Теорема 1.3.** *Дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ образуют базис про странства дифференцирований $D_{x_0}$.*

Сначала будет доказана

**Лемма 1.4.** *Пусть $f(x)$ функция класса $C^\infty$ в сферической окрест ности $U$ точки $0 \in \mathbf{R}^n$, тогда существуют функции класса $C^\infty$ $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ в области $U$ такие, что*

$$f(x) = f(0) + g_1(x) \cdot x_1 + \cdots + g_n(x) \cdot x_n,$$

$$g_1(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}, \ldots, g_n(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_n}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим равенства

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt =$$

$$\int_0^1 \Big(\sum_1^n \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i\Big)\, dt = \sum_1^n \Big(\int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt\Big) \cdot x_i.$$

Осталось положить

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Покажем сначала, что дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ линейно независимы. Если имеем соотношение

$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} = 0,$$

то, применяя его к координатной функции $x_i$, получим равенство $a_i = 0$. Итак, линейная независимость дифференцирований $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ доказана. Пусть теперь $\partial$ – произвольное дифференцирование, покажем, что существуют такие числа $a_1, \dots, a_n$, что

$$\partial = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Для этого положим $a_i = \partial(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, (что необходимо) и проверим, что дифференцирование

$$\partial' = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

совпадает с дифференцированием $\partial$. Для сокращения записи мы можем рассматривать только случай $x_0 = 0$, в противном случае можно совершить замену координат $x \to x - x_0$. Пусть $f \in \mathcal{O}_0$, докажем равенство $\partial(f) = \partial'(f)$. По лемме 1.4 имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i g(x) \cdot x_i, \quad g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Применим лемму 1.4 к функциям $g_1(x), \dots, g_n(x)$, тогда получим, что существуют функции $h_{ij}(x)$; $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$g_i(x) = g_i(0) + \sum_j h_{ij}(x) \cdot x_j.$$

Следовательно, имеем разложение

$$f(x) = f(0) + \sum_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} \cdot x_i + \sum_{i,j} h_{ij}(x) \cdot x_i x_j.$$

Применим теперь дифференцирования $\partial, \partial'$ к этому разложению, тогда получим равенства

$$\partial(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}, \quad \partial'(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что отображение $T^*_{x_0} \to D_{x_0}$, заданное правилом $v \to \partial_v$, является изоморфизмом векторных пространств.

Пусть для каждой точки $x \in U$ задан вектор $v(x) \in T_xU$, тогда говорят, что задано *векторное поле* $v(x)$ на $U$. Векторное поле $v(x)$ можно разложить по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$v(x) = a_1(x)e_1 + \cdots + a_n(x)e_n,$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ функции на $U$. Если все эти функции принадлежат классу $C^\infty$, то векторное поле $v(x)$ называется *дифференцируемым* (бесконечное число раз). Множество дифференцируемых векторных полей на $U$ обозначим через $\mathcal{T}(U)$. На этом множестве определена операция умножения на число и операция сложения, они превращают его в векторное пространство.

Обозначим через $\mathcal{O}(U)$ множество функций класса $C^\infty$ на $U$. На этом множестве определена операция сложения и операция умножения, которые превращают его в коммутативное кольцо. Если $v(x)$ – векторное поле, $a(x)$ – функция, то определено векторное поле $a(x)v(x)$. Благодаря этой операции умножения на функции множество $\mathcal{T}(U)$ становится модулем над кольцом $\mathcal{O}(U)$. Мы хотим определить еще одну операцию на множестве дифференцируемых векторных полей, она обозначается через $[v_1, v_2]$ и называется коммутатором векторных полей $v_1, v_2$.

**Теорема 1.5.** *Пусть $v_1, v_2$ – дифференцируемые векторные поля на $U$, тогда существует и единственное дифференцируемое векторное поле $w$ на $U$ такое, что для каждой функции $f \in \mathcal{O}(U)$ выполняется равенство*

$$\partial_w(f) = \partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)). \tag{1.1}$$

**Доказательство.** Пусть

$$v_1 = \sum_i a_1^i e_i, \quad v_2 = \sum_i a_2^i e_i.$$

Вычислим правую часть равенства (1.1)

$$\partial_{v_2}(\partial_{v_1}(f)) - \partial_{v_1}(\partial_{v_2}(f)) =$$

$$(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j})((\sum_i a_1^i \frac{\partial}{\partial x_i})(f)) - (\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j})((\sum_i a_2^i \frac{\partial}{\partial x_i})(f)) =$$

$$(\sum_j a_2^j \frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_i a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_i}) - (\sum_j a_1^j \frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_i a_1^i \frac{\partial f}{\partial x_i}) =$$

$$\sum_{i,j} a_2^j \cdot \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i,j} a_1^j \cdot \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$(\sum_i (\sum_j (a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j})) \frac{\partial}{\partial x_i})(f).$$

Из этих вычислений следует, что векторное поле

$$w = \sum_i \Big( \sum_j \Big( a_2^j \frac{\partial a_1^i}{\partial x_j} - a_1^j \frac{\partial a_2^i}{\partial x_j} \Big) \Big) e_i$$

является искомым векторным полем, причем других векторных полей, удовлетворяющих равенству (1.1), нет. Теорема доказана.

Векторное поле $w$ из теоремы 1.5 обозначается через $[v_1, v_2]$ и называется *коммутатором* векторных полей $v_1, v_2$.

Задача 1.6. Пусть $v_1, v_2, v_3$ дифференцируемые векторные поля на $U$. Показать, что выполняются следующие равенства:

1) $[v_2, v_1] = -[v_1, v_2]$,
2) $[a_1 v_1 + a_2 v_2, v_3] = a_1[v_1, v_3] + a_2[v_2, v_3], \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$,
3) $[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0$,
4) $[f v_1, v_2] = f[v_1, v_2] - (\partial_{v_2}) v_1, \quad f \in O(U)$.

## 2. Риманова метрика в области $\mathbf{R}^n$.

Пусть на каждом касательном векторном пространстве $T_x U$, $x \in U$, определено скалярное умножение $(v, w)_x$, $v, w \in T_x U$; тогда говорят, что на $U$ задана *риманова метрика*. Таким образом, риманова метрика — это "поле" скалярных умножений. Опишем риманову метрику в координатах. Если $g_{ij}(x) = (e_i, e_j)_x$ и $v = v^1 e_1 + \dots + v^n e_n$, $w = w^1 e_1 + \dots + w^n e_n$, то

$$(v, w)_x = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) v^i w^j. \tag{2.1}$$

Данная риманова метрика называется *дифференцируемой*, если все функции $g_{ij}(x)$, $1 \le i,j \le n$, являются функциями класса $C^\infty$. Далее мы предполагаем, что риманова метрика дифференцируемая. Так как $v^i = dx_i(v)$, $w^j = dx_j(w)$, то равенство (2.1) можно записать следующим образом

$$(v,w)_x = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i(v) \cdot dx_j(w).$$

С помощью римановой метрики можно определить длину вектора $v \in T_xU$ по формуле

$$|v| = \sqrt{(v,v)_x} = (\sum_{i,j} g_{ij}(x)\, v^i v^j)^{1/2},$$

а также угол между векторами $v, w \in T_xU$ по формуле

$$\cos(\widehat{v,w}) = \frac{(v,w)_x}{|v| \cdot |w|} =$$

$$\frac{\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i w^j}{(\sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j)^{1/2} \cdot (\sum_{i,j} g_{ij}(x) w^i w^j)^{1/2}}.$$

Кроме этого, определяется длина кривой $\Gamma \subset U$, заданной параметрически: $x = x(t)$, $a \le t \le b$, по формуле

$$s(\Gamma) = \int_a^b |\dot{x}(t)|\, dt =$$

$$\int_a^b (\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\ \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t))^{1/2}\, dt. \tag{2.2}$$

Предполагается, что параметризация $x = x(t)$ класса $C^1$.

Вектор

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

называется *вектором скорости* (см. рис.2). Произведение $|\dot{x}(t)|\, dt$ можно рассматривать как "бесконечно малый" путь, пройденный за "бесконечно малое" время $dt$, поэтому интеграл в формуле (2.2) можно рассматривать как путь, пройденный от момента $t = a$ до момента $t = b$,

что оправдывает определение длины кривой по формуле (2.2). Благодаря формуле (2.2) риманову метрику обычно обозначают следующим образом

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j,$$

где $ds$ – дифференциал длины параметрической кривой.

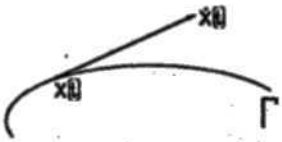


**Рисунок 2.**

В качестве примера рассмотрим метрику Лобачевского на круге $x^2 + y^2 < 1$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Далее мы найдем линии в этом круге, которые выполняют роль прямых в этой "плоскости Лобачевского", в частности, интервалы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ y = kx \end{cases}$$

являются "прямыми", проходящими через точку $O(0,0)$. Вычислим длину отрезка "прямой": $x \in [0; 1/2]$, $y = 0$. Имеем

$$s = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\, ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\, ln\, 3.$$

Задача 2.1. Показать, что каждый радиус окружности $x^2 + y^2 = 1/4$ имеет в метрике Лобачевского длину $\frac{1}{2}\, ln\, 3$. Найти длину окружности $x^2 + y^2 = 1/4$ в метрике Лобачевского.

### 3. Ковариантное дифференцирование.

Пусть $v \in T_{x_0}U$ – касательный вектор, $w(x)$ – дифференцируемое векторное поле, определенное в окрестности точки $x_0 \in U$. Тогда определена производная функции $w(x)$ в точке $x_0$ по направлению $v$, которая обозначается через $\partial_v w$. Эта производная определяется равенством

$$\partial_v w = \sum_i (\partial_v w^i) e_i,$$

где $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ – координаты $w(x)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Удобнее дифференцировать ростки векторных полей. Они определяются так же, как ростки функций. Множество ростков дифференцируемых векторных полей в точке $x_0$ будем обозначать через $\mathcal{T}_{x_0}$. Это множество является векторным пространством над $\mathbf{R}$, а также модулем над кольцом $\mathcal{O}_{x_0}$. Таким образом, дифференцирование векторного поля по направлению вектора задает отображение

$$\partial : T_{x_0} \times \mathcal{T}_{x_0} \to T_{x_0}, \quad (v, w) \to \partial_v w.$$

Предлагается проверить, что это отображение удовлетворяет свойствам:

1) $\partial$ – билинейное отображение;
2) $\partial$ удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \partial_v w,$$

где $f \in \mathcal{O}_{x_0}$.

**Определение 3.1.** *Ковариантное дифференцирование векторных полей в точке $x_0$ – это билинейное отображение*

$$\nabla : T_{x_0} \times \mathcal{T}_{x_0} \to T_{x_0}, \quad (v, w) \to \nabla_v w,$$

*удовлетворяющее правилу Лейбница*

$$\nabla_v(fw) = \partial_v f \cdot w(x_0) + f(x_0) \cdot \nabla_v w,$$

*где $f \in \mathcal{O}_{x_0}$.*

Таким образом, обычное дифференцирование $\partial$ дает пример ковариантного дифференцирования. Сравним произвольное ковариантное дифференцирование с обычным дифференцированием. Для этого обозначим через $\Gamma_{ij}^k$ $k$-ую координату вектора $\nabla_{e_i} e_j$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то есть

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Числа $\Gamma_{ij}^k$, $1 \le i,j,k \le n$, называются *символами Кристоффеля* для данного ковариантного дифференцирования.

**Теорема 3.2.** *Выполняется равенство*

$$\nabla_v w = \partial_v w + \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j(x_0) e_k, \tag{3.1}$$

*где* $v^1, \dots, v^n$ *– координаты* $v$, $w^1, \dots, w^n$ *– координаты* $w$.

**Доказательство.**

$$\nabla_v w = \nabla_{\sum_i v^i e_i} \sum_j w^j e_j = \sum_i v^i \nabla_{e_i} \sum_j w^j e_j =$$

$$\sum_i v^i \sum_j (\partial_{e_i}) w^j e_j + \sum_i v^i \sum_j w^j \nabla_{e_i} e_j =$$

$$\sum_i v^i \partial_{e_i} w + \sum_i v^i \sum_{j,k} w^j \Gamma_{ij}^k e_k =$$

$$\partial_v w + \sum_{j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.3. Набор чисел $\Gamma_{ij}^k$ определяет билинейное отображение $\Gamma : T_{x_0} \times T_{x_0} \to T_{x_0}$ по формуле

$$\Gamma(v, w) = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k v^i w^j e_k. \tag{3.2}$$

Таким образом формулу (3.1) можно записать следующим образом

$$\nabla_v w = \partial_v w + \Gamma(v, w(x_0)), \tag{3.3}$$

где $\Gamma(v, w(x_0))$ – билинейное отображение, определенное формулой (3.2).

Замечание 3.4. Если $\Gamma : T_{x_0} \times T_{x_0} \to T_{x_0}$ – произвольное билинейное отображение, то формула (3.3) определяет ковариантное дифференцирование.

### 4. Аффинная связность.

Пусть в каждой точке $x \in U$ задано ковариантное дифференцирование, то есть билинейное отображение

$$\nabla : T_x \times T_x \to T_x,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница. Тогда говорят, что на $U$ определена *аффинная связность*. Таким образом, аффинная связность является "полем" ковариантных дифференцирований. Если $v(x), w(x)$ дифференцируемые векторные поля, то ковариантная производная в переменной точке $\nabla_{v(x)}w(x)$ является векторным полем. Мы будем предполагать, что векторное поле $\nabla_{v(x)}w(x)$ является дифференцируемым для каждых дифференцируемых векторных полей $v(x), w(x)$. В этом случае связность называется *дифференцируемой*. Заметим, что для выполнения этого условия достаточно потребовать дифференцирусмости векторных полей $\nabla_{e_i}e_j$, $1 \leq i, j \leq n$, где $e_1, \ldots, e_n$ рассматриваются как векторные поля. Так как $k$-ая координата векторного поля $\nabla_{e_i}e_j$ является символом Кристоффеля $\Gamma^k_{ij}(x)$, то для дифференцируемости связности достаточно потребовать, чтобы символы Кристоффеля были функциями класса $C^\infty$.

Главное значение аффинной связности состоит в том, что она дает возможность определить новый параллельный перенос вдоль параметрической кривой. Но сначала мы определим ковариантную производную вдоль кривой.

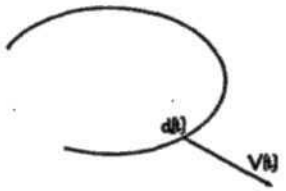


**Рисунок 3.**

Пусть дана параметрическая кривая класса $C^\infty$ в области $U$, то есть отображение класса $C^\infty$ $\alpha : I \to U$, где $I$ – промежуток в $\mathbf{R}$. *Векторное поле вдоль кривой* $\alpha$ — это функция $v(t)$, $t \in I$, такая, что $v(t) \in T_{\alpha(t)}U$ (см. рис.3). Мы предполагаем, что функция $v(t)$ класса $C^\infty$. Векторному полю $v(t)$ вдоль кривой $\alpha$ соответствует новое векторное поле $\frac{Dv(t)}{dt}$ вдоль кривой $\alpha$, называемое *ковариантной производной поля* $v(t)$. Операция $v(t) \to \frac{Dv(t)}{dt}$ определяется следующими аксиомами:

1) если $v(t), w(t)$ – векторные поля вдоль кривой $\alpha$, то

$$\frac{D(v(t)+w(t))}{dt} = \frac{Dv(t)}{dt} + \frac{Dw(t)}{dt};$$

2) если $f(t)$ функция класса $C^\infty$ на $I$, то

$$\frac{D(f(t)v(t))}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \cdot v(t) + f(t) \cdot \frac{Dv(t)}{dt};$$

3) если $v(t)$ индуцировано дифференцируемым векторным полем $w(x)$ на $U$, то есть $v(t) = w(\alpha(t))$ при каждом $t \in I$, то

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \nabla_{\dot\alpha(t)} w.$$

**Теорема 4.1.** *Существует одна и только одна операция $v(t) \to \frac{Dv(t)}{dt}$, удовлетворяющая трем перечисленным условиям.*

**Доказательство.** Если $v(t) = \sum_j v^j(t) e_j$, то из аксиом 1), 2), 3) вытекает, что

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \sum_j \Big( \frac{dv^j(t)}{dt} e_j + v^j(t) \nabla_{\dot\alpha(t)} e_j \Big) =$$

$$\sum_k \Big( \frac{dv^k(t)}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma^k_{ij}(\alpha(t)) v^j(t) \Big) e_k, \tag{4.1}$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – координаты $\alpha(t)$. Обратно, не трудно проверить, что определенная последним равенством операция $\frac{Dv(t)}{dt}$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Теорема доказана.

**Определение 4.2.** *Векторное поле $v(t)$ вдоль кривой $\alpha(t)$ называется параллельным, если его ковариантная производная $\frac{Dv(t)}{dt}$ тождественно равна нулю.*

**Теорема 4.3.** *Пусть дана кривая $\alpha(t)$ и вектор $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}U$. Тогда существует одно и только одно параллельное векторное поле $v(t)$ вдоль кривой $\alpha(t)$ такое, что $v(t_0) = v_0$.*

**Доказательство.** Дифференциальные уравнения

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i(t)}{dt} \Gamma^k_{ij}(\alpha(t)) v^j = 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

имеют решение $v^k(t)$ однозначно определенное начальными данными $v^k(t_0) = v^k_0$. Так как уравнения линейны, то решения можно определить для всех $t \in I$. Теорема доказана.

## 5. Риманова связность.

Пусть на $U$ задана риманова метрика $(v,w)_x$ и связность $\nabla$. Связность *совместима с римановой метрикой*, если параллельный перенос, заданный этой связностью, сохраняет скалярное произведение. То есть для любой параметрической кривой $\alpha(t)$ в $U$ и для любой пары параллельных векторных полей $v(t), w(t)$ вдоль $\alpha(t)$ скалярное произведение $(v(t), w(t))_{\alpha(t)}$ не зависит от $t$.

**Теорема 5.1.** *Предположим, что связность совместима с римановой метрикой и $v(t), w(t)$ – два векторных поля вдоль кривой $\alpha(t)$. Тогда выполняется равенство*

$$\frac{d}{dt}(v(t), w(t))_{\alpha(t)} = \left(\frac{Dv(t)}{dt}, w(t)\right)_{\alpha(t)} + \left(v(t), \frac{Dw(t)}{dt}\right)_{\alpha(t)}. \qquad (5.1)$$

**Доказательство.** Выберем ортонормированный базис в $T_{\alpha(t_0)}U$ $e_1, \ldots, e_n$, и затем параллельно разнесем его вдоль кривой $\alpha(t)$. Тогда получим параллельные векторные поля $e_1(t), \ldots, e_n(t)$, образующие ортонормированный базис в каждой точке $\alpha(t)$. Векторные поля $v(t), w(t)$ можно разложить по базису $e_1(t), \ldots, e_n(t)$

$$v(t) = \sum_i v^i(t) e_i(t), \quad w(t) = \sum_i w^i(t) e_i(t)$$

Следовательно, $(v(t), w(t)) = \sum_i v^i(t) w^i(t)$ и

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dv(t)}{dt} e_i(t), \ \frac{Dw(t)}{dt} = \sum_i \frac{Dw(t)}{dt} e_i(t).$$

Поэтому,

$$\left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + \left(v, \frac{Dw}{dt}\right) = \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v, w).$$

Теорема доказана.

**Следствие 5.2.** *Для любых векторных полей $v, w$ на $U$ и вектора $u \in T_{x_0}U$ выполняется равенство*

$$\partial_u(v, w) = (\nabla_u v, w) + (v, \nabla_u w). \qquad (5.2)$$

**Доказательство.** Выберем параметрическую кривую $\alpha(t)$, имеющую при $t = 0$ вектор скорости $u$, а затем применим теорему 5.1, тогда

из равенства (5.1) получим при $t = 0$ равенство (5.2). Следствие доказано.

Связность $\nabla$ *называется симметрической, если для любых* векторных полей $v, w$ выполняется равенство

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w]. \tag{5.3}$$

Применим соотношение (5.3) к базисным векторным полям $e_i, e_j$. Так как $\partial_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$, то $[e_i, e_j] = 0$; поэтому $\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = 0$. Из равенства

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k$$

тогда получаем равенство

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad 1 \le i, j \le n. \tag{5.4}$$

Мы показали, что из равенства (5.3) следует равенство (5.4). Предлагается проверить, что верно обратное утверждение. Итак, симметричность связности означает симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов.

**Теорема 5.3.** *Существует и единственная симметрическая связность на $U$, совместимая с данной римановой метрикой.*

**Доказательство.** Сначала установим единственность связности. Применим равенство (5.2) к базисным векторным полям $e_i$, $e_j$, $e_k$. Так как $(e_i, e_j) = g_{ij}$, то получаем тождество

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = (\nabla_{e_i} e_j, e_k) + (e_j, \nabla_{e_i} e_k).$$

Переставляя индексы $i, j, k$ получим еще следующие тождества

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = (\nabla_{e_k} e_i, e_j) + (e_i, \nabla_{e_k} e_j),$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = (\nabla_{e_j} e_i, e_k) + (e_i, \nabla_{e_j} e_k).$$

Из первого тождества вычтем второе, а затем прибавим третье, тогда получается *первое тождество Кристоффеля* (нужно использовать равенство $\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i$)

$$(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right).$$

Левая часть этого тождества равна $\sum_i \Gamma_{ij}^k g_{ik}$. Умножая его на обратную к $(g_{ik})$ матрицу $(g^{ki})$, получим *второе тождество Кристоффеля*

$$\Gamma_{ij}^l = \sum_k \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}\right) g^{kl} \tag{5.5}$$

Следовательно, связность однозначно определяется метрикой. Обратно, определяя $\Gamma_{ij}^k$ формулой (5.5), можно проверить, что полученная связность симметрическая и совместна с заданной метрикой.

Теорема доказана.

Связность из теоремы 5.3 называется *римановой связностью или связностью Леви-Чивита*, ее символы Кристоффеля вычисляются по формуле (5.5). Далее рассматривается только риманова связность.

Параметрическая кривая $\alpha : I \to U$ называтся *геодезической*, если векторное поле ускорения $\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}$ тождественно равно нулю. Соответственно, поле скорости $\frac{d\alpha}{dt}$ должно быть параллельным вдоль $\alpha(t)$. Если $\alpha$ – геодезическая, то как показывает тождество

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 2\left(\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right) = 0,$$

длина $\left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right)^{1/2}$ вектора скорости постоянна вдоль $\alpha$. Вводя длину дуги

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| \cdot (t - t_0),$$

можно выразить это утверждение следующим образом: *параметр $t$ вдоль геодезической линейно зависит от длины дуги*

$$t = \left|\frac{d\alpha}{dt}\right|^{-1} \cdot s + t_0$$

В координатах $x_1, \ldots, x_n$ уравнение $\frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt} = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x_1, \ldots, x_n)\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0. \tag{5.6}$$

## 6. Изометрии римановой области.

Пусть $F : U \to U$ – отображение класса $C^\infty$, $x_0 \in U$, $y_0 = F(x_0)$, тогда дифференциал $dF(x_0)$ задает линейное отображение

$$dF(x_0) : T_{x_0}U \to T_{y_0}U. \tag{6.1}$$

А именно

$$dF(x_0)(v) = \sum_{k=1}^{n} dF_k(x_0)(v) \cdot e_k,$$

где $F_1(x), \dots, F_n(x)$ – координаты $F(x)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. В частности, имеем равенство

$$dF(x_0)(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k(x_0)}{\partial x_i} e_k.$$

Таким образом, матрица линейного отображения (6.1) в базисе $e_1, \dots, e_n$ является матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Далее, для краткости, отображение (6.1) будем обозначать через

$$F_* : T_{x_0}U \to T_{y_0}U. \tag{6.3}$$

Пусть далее отображение $F : U \to U$ является *диффеоморфизмом* класса $C^\infty$. Это означает, что отображение $F : U \to U$ является биекцией, и отображения $F, F^{-1}$ принадлежат классу $C^\infty$. Тогда матрица Якоби (6.2) имеет обратную матрицу, а именно матрицу Якоби отображения $F^{-1} : U \to U$ в точке $y_0$. Следовательно, отображение касательных пространств (6.3) является изоморфизмом. Пусть на $U$ определена риманова метрика $(v, w)_x$, тогда диффеоморфизм $F : U \to U$ называется *изометрией*, если для каждой точки $x \in U$ отображение $F_* : T_xU \to T_yU$ сохраняет скалярное произведение, то есть

$$(v, w)_x = (F_*v, F_*w)_y, \quad y = F(x). \tag{6.4}$$

Так как

$$F_*e_i = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} \cdot e_k, \; F_*e_j = \sum_k \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_j} \cdot e_k,$$

то из (6.4) получаем набор равенств

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y)\frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F_l(x)}{\partial x_j} = g_{ij}(x). \tag{6.5}$$

Нетрудно проверить, что если выполняются равенства (6.5) при $1 \leq i, j \leq n$, то выполняется равенство (6.4). Заметим также, что набор равенств (6.5) равносилен равенству

$$\sum_{k,l} g_{kl}(y)\, dy_k\, dy_l = \sum_{i,j} g_{kl}(x)\, dx_i\, dx_j, \tag{6.6}$$

где $y_k$ – $k$-ая координата функции $y = F(x)$.

В качестве примера рассмотрим евклидову метрику на $\mathbf{R}^n$

$$ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2.$$

Это риманова метрика с $g_{ij} = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

– символ Кронекера. Рассмотрим аффинное преобразование $\mathbf{R}^n$ $y = Ax + b$, где $A = (a_{ij})$ – обратимая матрица, $b \in \mathbf{R}^n$ – вектор. Равенство (6.5) тогда приобретет вид

$$\sum_{k,l} \delta_{kl} a_{ki} a_{lj} = \delta_{ij},$$

то есть

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

что означает ортогональность матрицы $A$.

Пусть $\alpha(t)$ кривая в области $U$, тогда через $\tilde{\alpha}(t)$ обозначим кривую $F(\alpha(t))$. Покажем, что при изометрии $F : U \to U$ длины кривых $\alpha(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$ совпадают. Действительно,

$$s(\tilde{\alpha}) = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\right| dt = \int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{d\alpha}{dt}\right| dt =$$

$$\int_a^b \left|F_*\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\right| dt = \int_a^b \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| dt = s(\alpha).$$

Далее мы покажем, что если $\alpha(t)$ – геодезическая, а $F : U \to U$ – изометрия, то кривая $\tilde{\alpha}(t)$ также будет геодезической.

**7. Вариационное определение геодезических.**

Пусть $L(x,v)$ – функция класса $C^\infty$ точки $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$ и касательного вектора $v = (v^1,\dots,v^n) \in T_xU$ в этой точке. Рассмотрим фиксированную пару точек $x_0, x_1 \in U$ и всевозможные кривые класса $C^\infty$ $\alpha(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ (с фиксированными $t_0, t_1$), соединяющие эти точки: $\alpha(t_0) = x_0$, $\alpha(t_1) = x_1$. Рассмотрим теперь величину

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt,$$

она называется *действием*. На какой кривой $\alpha(t)$ действие $S[\alpha]$ будет минимальным?

**Лемма 7.1.** *Если $S[\alpha]$ минимально, то для любой вектор-функции $\beta(t)$ класса $C^\infty$, обращающейся в нуль на концах $t_0, t_1$, выполняется тождество*

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]\big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Доказательство получается из того, что функция $S[\alpha + \varepsilon\beta]$ в точке $\varepsilon = 0$ принимает минимальное значение.

**Теорема 7.2.** *Если величина*

$$S[\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))\, dt$$

*достигает минимума на некоторой кривой $\alpha(t) = x(t)$, то вдоль кривой $x(t)$ выполнены уравнения*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,\dots,n, \tag{7.1}$$

*где*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}\Big|_{v=\dot{x}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}\ddot{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial x^j}\dot{x}_j\Big)\Big|_{v=\dot{x}}.$$

**Доказательство.** Развернем выражение

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\alpha + \varepsilon\beta]\big|_{\varepsilon=0},$$

тогда имеем

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha+\varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\beta_i+\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot{\beta}_i\right)\right)dt=0, \qquad (7.2)$$

где интеграл вычислен вдоль кривой $\alpha(t)=x(t)$. Это равенство верно для любой вектор-функции $\beta(t)$ класса $C^\infty$ такой, что $\beta(t_0)=\beta(t_1)=0$. С помощью интегрирования по частям получаем равенства

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial v^i}\dot{\beta}_i\,dt=\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\beta_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\beta_i\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)\beta_i\,dt.$$

Тогда равенство (7.2) можно записать следующим образом

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha+\varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0}=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right]\beta_i\right)dt=0. \qquad (7,3)$$

Так как функции $\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t)$ могут быть любыми функциями $C^\infty$, обращающимися в нуль в точках $t_0,t_1$, то равенство (7.3) равносильно системе равенств (7.1). Теорема доказана.

Заметим, что решения системы уравнений (7.1) называются *экстремалями* функционала действия $S[\alpha]$. Они дают необходимые условия для того, чтобы значение $S[\alpha]$ на заданной кривой $\alpha(t)=x(t)$ было экстремальным. Имеются достаточные условия для этого, но про них речь пойдет в курсе "Методы оптимизации".

Пусть теперь на $U$ задана риманова метрика

$$ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}(x)dx_idx_j,$$

тогда рассмотрим функционал

$$S[\alpha]=\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\alpha}(t)|^2\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i,j}g_{ij}(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t)\dot{\alpha}_j(t)\right)dt. \qquad (7.4)$$

**Теорема 7.3.** *Экстремали функционала (7.4) — это в точности геодезические.*

**Доказательство.** Так как

$$L(x,v)=\sum_{k,l}g_{kl}(x)v^kv^l,$$

то

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = 2\sum_l g_{il}v^l, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} v^j v^l.$$

Поэтому уравнение (7.1) имеет вид

$$2\sum_l g_{il}\ddot{x}_l + 2\sum_{j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}\dot{x}_j\dot{x}_l - \sum_{j,l} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\dot{x}_j\dot{x}_l = 0.$$

Так как

$$\sum_i g_{il}g^{ik} = \delta_l^k,$$

то получаем

$$\ddot{x}_k + \sum_{jl}\Big(\sum_i \Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}\Big)g^{ik}\Big)\dot{x}_j\dot{x}_l = 0.$$

Из тождества

$$\sum_{i,j,l} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} g^{ik}\dot{x}_j\dot{x}_l = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_l}\Big)g^{ik}\dot{x}_j\dot{x}_l$$

получаем, что предыдущее уравнение имеет вид

$$\ddot{x}_k + \sum_{j,l}\Gamma_{jl}^k\dot{x}_j\dot{x}_l = 0,$$

где

$$\Gamma_{jl}^k = \sum_i \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\Big)g^{ik},$$

то есть получаем уравнение геодезических (5.6). Теорема доказана.

**Следствие 7.4.** *Если $F : U \to U$ – изометрия, $\alpha(t)$ – геодезическая, то $\tilde{\alpha}(t) = F(\alpha(t))$ – также геодезическая.*

**Доказательство.** Так как $S[\tilde{\alpha}] = S[\alpha]$, то кривые $\alpha, \tilde{\alpha}$ становятся одновременно экстремалями функционала $S$. Это вытекает из определения экстремали

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha + \varepsilon\beta]|_{\varepsilon=0} \equiv 0.$$

Следствие доказано.

Задача 7.5. Показать, что экстремали функционала

$$S = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\alpha}(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(\alpha(t))\dot{\alpha}_i(t)\dot{\alpha}_j(t)\Big)^{1/2} dt$$

будут также совпадать с геодезическими, если рассматривать параметрические кривые с параметром пропорциональным натуральному параметру.

**8. Плоскость Лобачевского.**

Рассмотрим круг $U = \{x^2 + y^2 < 1\}$ с метрикой Лобачевского

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Если положить $x_1 = x$, $x_2 = y$, то получим равенства

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}, \; g_{12} = g_{21} = 0.$$

Формула (5.5) приводит к следующим равенствам для символов Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Таким образом, уравнения геодезических имеют вид:

$$\ddot{x}_1 + \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) + \frac{4x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2) + \frac{4x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}\dot{x}_1\dot{x}_2 = 0. \qquad (8.1)$$

Непосредственно проверяется, что параметрическая кривая $(x_1, x_2) = (th\ t, 0)$ удовлетворяет уравнениям (8.1), то есть является геодезической. Чтобы получить другие геодезические, мы рассмотрим всевозможные изометрии "плоскости Лобачевского". Эти изометрии хорошо записываются в комплексной форме. А именно, положим $x + iy = z$, тогда метрика Лобачевского приобретает вид

$$ds^2 = \frac{dz\, d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})}. \qquad (8.2)$$

Непосредственно проверяется, что дробно-линейное преобразование единичного круга

$$w = e^{i\theta}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbf{R}, \; |a| < 1 \qquad (8.3)$$

сохраняет метрику (8.2), то есть является изометрией.

В ТФКП доказывается, что интервал $(-1;1)$ на оси $Ox$ при преобразовании (8.3) переходит в дугу окружности ортогональной стандартной окружности $x^2+y^2=1$ (см. рис.4). Так как через данную точку круга $U$ в заданном направлении проходит одна такая окружность (см. рис.4), то получаем, что все геодезические исчерпываются такими дугами. Действительно, решения системы (8.1) определяются начальной точкой и вектором скорости в этой точке. В частности, все диаметры круга $U$ являются геодезическими, что утверждалось раньше. Заметим, что геодезические играют роль прямых.

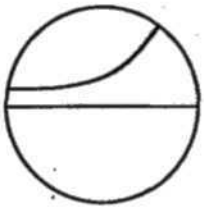

**Рисунок 4.**

Пусть $A, B$ – две точки в круге $U$ (см. рис.5), проведем через них единственную геодезическую; длину дуги $\overset{\frown}{AB}$ обозначим через $\rho(A,B)$ и назовем расстоянием от точки $A$ до точки $B$. Это расстояние можно определить с помощью двойного отношения четырех точек. Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4$ четыре точки на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, тогда через $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ обозначается отоношение

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2},$$

которое называется *двойным отношением.*

В ТФКП доказывается, что оно сохраняется при дробно-линейных отображениях, то есть если $w_1, w_2, w_3, w_4$ – образы точек $z_1, z_2, z_3, z_4$ при дробно-линейном отображении

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0,$$

то $(w_1, w_2, w_3, w_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Пусть $\tilde{A}, \tilde{B}$ точки "пересечения" геодезической $AB$ с окружностью $|z|=1$(см. рис.5), тогда можно образовать двойное отношение $(\tilde{A}, \tilde{B}, A, B)$.

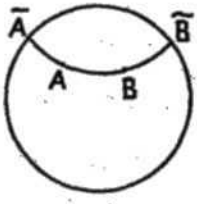


**Рисунок 5.**

**Теорема 8.1.** *Выполняется равенство*

$$\rho(A,B) = \frac{1}{2}\, ln\,(\tilde{A},\tilde{B},A,B). \tag{8.4}$$

**Доказательство.** Обозначим правую часть равенства (8.4) через $d(A,B)$. Проверяется, что $\rho(A,B)$ и $d(A,B)$ удовлетворяют всем аксиомам расстояния. С другой стороны, они не меняются при дробно-линейных преобразованиях (8.3). Отсюда вытекает, что они должны быть пропорциональны. Осталось убедиться что $\rho(0,1/2) = d(0,1/2) = \frac{1}{2} ln\, 3$. Теорема доказана.

## 9. Тензор кривизны римановой связности.

Рассмотрим вторые смешанные ковариантные производные векторного поля $v = v(x)$ на области $U \subset \mathbf{R}^n$

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} v), \quad \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} v).$$

Они не обязаны совпадать, в связи с этим $l$-ую координату векторного поля

$$\nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} e_k) - \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} e_k)$$

обозначим через $R^l_{ijk}$. Тогда получим набор из $n^4$ функций на $U$. Этот набор функций называется тензором кривизны исходной связности. Вычислим его через символы Кристоффеля.

**Теорема 9.1.** *Выполняются равенства*

$$R^l_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i}\right) + \sum_s \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}\right).$$

**Доказательство.** Для краткости обозначим $\nabla_{e_i}$ через $\nabla_i$, тогда имеем равенства

$$\sum_l R^l_{ijk} e_l = \nabla_j(\nabla_i e_k) - \nabla_i(\nabla_j e_k) = \nabla_j(\sum_s \Gamma^s_{ik} e_s) - \nabla_i(\sum_s \Gamma^s_{jk} e_s) =$$

$$\sum_s \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x_j} e_s + \sum_s \Gamma^s_{ik} \sum_t \Gamma^t_{js} e_t - \sum_s \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} e_s - \sum_s \Gamma^s_{jk} \sum_t \Gamma^t_{is} e_t =$$

$$\sum_s \left( \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x_i} \right) e_s + \sum_t \left( \sum_s \left( \Gamma^s_{ik} \Gamma^t_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^t_{is} \right) \right) e_t =$$

$$\sum_l \left[ \left( \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} \right) + \sum_s \left( \Gamma^s_{ik} \Gamma^l_{js} - \Gamma^s_{jk} \Gamma^l_{is} \right) \right] e_l.$$

Теорема доказана.

Можно дать более инвариантное определение тензора кривизны, то есть не зависящее от выбранного базиса $e_1, \ldots, e_n$. По трем векторным полям $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ определим новое векторное поле $R(u,v)w$ с помощью равенства

$$R(u,v)w = \nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) - \nabla_{[u,v]} w. \tag{9.1}$$

**Теорема 9.2.** *Значение $R(u,v)w$ в точке $x_0 \in U$ зависит только от значений векторных полей $u(x), v(x), w(x)$ в этой точке, а не зависит от их значений в близких точках. Далее, соответствие*

$$(u(x_0), v(x_0), w(x_0)) \to R(u(x_0), v(x_0))w(x_0)$$

*является трилинейным отображением*

$$T_{x_0}U \times T_{x_0}U \times T_{x_0}U \to T_{x_0}U.$$

**Доказательство.** Очевидно, $R(u,v)w$ есть трилинейная функция от $u, v, w$. Если заменить $u$ на $fu$, где $f$ – функция, то три члена в правой части равенства (9.1) заменятся, соответственно, членами

1) $\nabla_{fu}(\nabla_v w)$,
2) $(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_v(\nabla_u w)$,
3) $-(\partial_v f)\nabla_u w + f\nabla_{[u,v]} w)$, поэтому получаем тождество

$$R(fu,v)w = fR(u,v)w.$$

Соответствующие тождества для $v, w$ получаются при помощи аналогичных вычислений. Предположим теперь, что

$$u = \sum_i u^i e_i,\ v = \sum_j v^j e_j,\ w = \sum_k w^k e_k.$$

Тогда

$$R(u,v)w = \sum_{i,j,k} u^i v^j w^k R(e_i, e_j)e_k = \sum_{i,j,k,l} u^i v^j w^k R^l_{ijk} e_l.$$

Тем самым $R(u,v)w$ в точке $x_0$ зависит только от значений $u^i(x_0), v^j(x_0)$, $w^k(x_0)$, то есть от значений $u(x_0), v(x_0), w(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 9.3. Теорема 9.2 показывает, что $R(u,v)w$ является тензорным полем на $U$, а из доказательства видно, что $R^l_{ijk}$ – координаты этого тензорного поля. Заметим, что значение $R(u,v)w$ в точке $x_0$ — это элемент тензорного произведения

$$T^*_{x_0}U \otimes T^*_{x_0}U \otimes T^*_{x_0}U \otimes T_{x_0}U.$$

**Теорема 9.4.** *Тензор кривизны римановой связности удовлетворяет следующим соотношениям:*

1) $R(u,v)w = -R(v,u)w$,
2) $R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0$,
3) $(R(u,v)w, z) = -(R(u,v)z, w)$,
4) $(R(u,v)w, z) = (R(w,z)u, v)$.

**Доказательство.** Соотношение кососимметричности 1) немедленно вытекает из определения тензора $R$. Так как все три слагаемых в формуле 2) тензоры, то достаточно доказать эту формулу в случае, когда векторные поля $[u,v], [v,w], [w,u]$ равны нулю, например, для базисных векторных полей $e_i, e_j, e_k$. При этом предположении нужно проверить тождество

$$\nabla_u(\nabla_v w) - \nabla_v(\nabla_u w) + \nabla_v(\nabla_w u) - \nabla_w(\nabla_v u) + \nabla_w(\nabla_u v) - \nabla_u(\nabla_w v) = 0. \tag{9.2}$$

Но из симметрии связности вытекает, что

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v,w] = 0.$$

Поэтому первый член в сумме (9.2) сокращается с последним, остальные члены также попарно сокращаются, что доказывает соотношение 2).

Тождество 3) означает, что выражение $(R(u,v)w,z)$ кососимметрично по $w,z$. Это эквивалентно утверждению, что $(R(u,v)w,w)=0$ при всех $u,v,w$. Снова можно предположить, что $[u,v]=0$, так что $(R(u,v)w,w)$ равно

$$(\nabla_u(\nabla_v w)-\nabla_v(\nabla_u w),w).$$

Иначе говоря, мы должны доказать симметричность выражения $(\nabla_v(\nabla_u w),w)$ относительно $u,v$. Так как $[u,v]=0$, то выражение $\partial_v(\partial_u(w,w))$ симметрично относительно $u,v$. Из совместимости связности с метрикой получаем

$$\partial_u(w,w)=2(\nabla_u w,w),$$

следовательно,

$$\partial_v(\partial_u(w,w))=2(\nabla_v(\nabla_u w),w)+2(\nabla_u w,\nabla_v w).$$

Но второе слагаемое в последнем выражении симметрично относительно $u,v$, поэтому выраженние $(\nabla_v(\nabla_u w),w)$ также симметрично относительно $u,v$, что и доказывает свойство 3).

Свойство 4) выводится из предыдущих свойств, предлагается проверить это самостоятельно. Теорема доказана.

Замечание 9.5. В координатах тождества 1), 2) теоремы 9.4 записываются следующим образом:

1) $R^l_{ijk}=-R^l_{jik}$,

2) $R^l_{ijk}+R^l_{jki}+R^l_{kij}=0$.

Положим $R_{ijkl}=(R(e_i,e_j)e_k,e_l)$, то есть

$$R_{ijkl}=\sum_s R^s_{ijk}g_{sl},$$

тогда тождества 3), 4) записываются следующим образом:

3) $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$,

4) $R_{ijkl}=R_{klij}$.

Заметим также, что тензор $(R(u,v)w,z)$ называется *тензором Римана*, в каждой точке $x_0\in U$ он является элементом тензорного произведения

$$T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U\otimes T^*_{x_0}U.$$

Набор функций

$$R_{jk}=\sum_i R^i_{ijk}$$

называется тензором Риччи, а функция

$$R = \sum_{j,k} g^{jk} R_{jk}$$

называется *скалярной кривизной*, где $(g^{jk})$ – обратная матрица к $(g_{jk})$.

Задача 9.6. Дать инвариантное определение тензора Риччи и скалярной кривизны.

Пример 9.7. Рассмотрим поверхность в $\mathbf{R}^3$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

где $u, v$ – параметры. Тогда первая квадратичная форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

определяет риманову метрику в области с координатами $u, v$. Пусть $R$ – скалярная кривизна соответствующей римановой связности. Покажем, что $R = -2K$, где $K$ – гауссова кривизна поверхности.

Положим $u = u_1, v = u_2, E = g_{11}, F = g_{12} = g_{21}, G = g_{22}$, а $\Gamma^k_{ij}$ – символы Кристоффеля, то есть

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}\Big) g^{lk}.$$

Тогда в дифференциальной геометрии поверхностей доказывается равенство

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left[\left(\frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u_1}\right) + \sum_k (\Gamma^k_{11}\Gamma^2_{k2} - \Gamma^k_{12}\Gamma^2_{k1})\right],$$

то есть

$$K = \frac{1}{g_{11}} R^2_{121}.$$

Выразим $K$ через тензор Римана

$$\frac{1}{g_{11}} R^2_{121} = \frac{1}{g_{11}} \sum_l g^{2l} R_{121l} = \frac{1}{g_{11}}(g^{21} R_{1211} + g^{22} R_{12112}) =$$

$$\frac{g^{22}}{g_{11}} R_{12112} = \Delta \cdot R_{1212},$$

где $\Delta = det(g^{jk})$. Таким образом,

$$K = \Delta \cdot R_{1212}.$$

С другой стороны,

$$R = \sum_{j,k=1}^{2} g^{jk} R_{jk} = \sum_{i,j,k=1}^{2} g^{jk} R^i_{ijk} =$$

$$g^{11} R^2_{211} + g^{12} R^2_{212} + g^{21} R^1_{121} + g^{22} R^1_{122} =$$
$$g^{11} g^{22} R_{2112} + g^{12} g^{21} R_{2121} + g^{21} g^{12} R_{1212} + g^{22} g^{11} R_{1221} =$$
$$-g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{12} g^{21} R_{1212} + g^{21} g^{12} R_{1212} - g^{22} g^{11} R_{1212} =$$
$$-2\Delta \cdot R_{1212},$$

то есть $R = -2K$.

Задача 9.8. Показать, что для метрики Лобачевского $R = 8$.

## 10. Внешние дифференциальные формы.

Сначала поговорим о внешних формах. Пусть $V$ – $n$-мерное векторное пространство над полем $K$. *Внешняя $q$-форма* $\omega^q$ *на* $V$ – это кососимметрическая полинейная функция

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ раз}} \to K$$

Согласно другому определению – это элемент пространства $\Lambda^q(V^*)$ (см. задачу 3.10 в гл. I). Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис $V$, а $e_1^*, \ldots, e_n^*$ – двойственный базис $V^*$, то внешние произведения $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n, \quad i_1 < \ldots < i_q$, образуют базис пространства внешних $q$-форм $\Lambda^q(V^*)$. Следовательно,

$$dim\, \Lambda^q(V^*) = \binom{n}{q}.$$

В частности, $dim\, \Lambda^n(V^*) = 1$.

Пусть далее $V$ – вещественное векторное пространство. Тогда пространство $\Lambda^n(V^*)$ изоморфно $\mathbf{R}$, но на нем нет фиксированного направления. *Ориентация* $V$ – это направление на $\Lambda^n(V^*)$ (см. рис.6). Так как возможны два направления, то на $V$ возможны две ориентации.

**Рисунок 6.**

Если мы выберем ненулевую форму $\omega^n$, то получим направление на $\Lambda^n(V^*)$ от 0 к $\omega^n$. Таким образом, форма $\omega^n$ задает ориентацию на $V$. Заметим, что формы $\omega_1^n, \omega_2^n$ определяют одинаковую ориентацию, если $\omega_2^n = a \cdot \omega_1^n$, где $a > 0$. Пусть ориентация задана формой $\omega^n$, назовем базис $e_1, \ldots, e_n$ *положительным*, если $\omega^n(e_1, \ldots, e_n) > 0$, в противном случае базис называется *отрицательным*. Таким образом, ориентация разбивает множество базисов на два класса эквивалентности. Если базис $e'_1, \ldots, e'_n$ получается из базиса $e_1, \ldots, e_n$ с помощью матрицы перехода $A$, то

$$\omega^n(e'_1, \ldots, e'_n) = \det A \cdot \omega^n(e_1, \ldots, e_n).$$

Поэтому базисы $e_1, \ldots, e_n$, $e'_1, \ldots, e'_n$ эквивалентны, если определитель матрицы перехода положительный. Заметим, что выбрав один из классов эквивалентности базисов, мы определим ориентацию на $V$ требованием, чтобы задающая ориентацию форма $\omega^n$ принимала на базисах выбранного класса положительные значения.

Пусть на $V$ задано скалярное произведение, тогда оно определяет изоморфизм $V \to V^*$, заданый правилом: *вектору $v \in V$ сопоставляется линейная функция* $\tilde{v}(w) = (v, w)$. Заметим, что если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис $V$, то линейные функции $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ образуют двойственный базис, то есть для ортонормированного базиса выполняется равенство $\tilde{e}_i = e_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (v, w)$, тогда получим скалярное произведение на $V^*$, в частности, если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис в $V$, то $e_1^*, \ldots, e_n^*$ – ортонормированый базис в $V^*$. Если положить

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q, \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, (\alpha_1, \beta_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot (\alpha_q, \beta_{\sigma(q)}),$$

то это умножение продолжается до скалярного умножения в пространстве внешних $q$-форм $\Lambda^q(V^*)$. В частности, если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонорми-

рованный базис $V$, то $q$-формы $e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_q}$, $\quad i_1 < \ldots < i_q$, образуют ортонормированный базис $\Lambda^q(V^*)$.

Пусть на $V$ задано скалярное произведение, тогда получим скалярное произведение на одномерном пространстве $\Lambda^n(V^*)$, благодаря этому определяются две $n$-формы единичной длины, которые определяют противоположные ориентации. Если на $V$ фиксирована ориентация, то существует единственная $n$-форма единичной длины, определяющая данную ориентацию. Обозначим ее через $\Omega^n$ и назовем *формой объема*. Пусть $\beta^q \in \Lambda^q(V^*)$ и $*\beta^q$ – такая $(n-q)$-форма, что для любой формы $\alpha^q \in \Lambda^q(V^*)$ выполняется равенство

$$\alpha^q \wedge *\beta^q = (\alpha^q, \beta^q)\,\Omega^n.$$

Тогда проверяется, что форма $*\beta^q$ существует и она единственная, причем отображение

$$* : \Lambda^q(V^*) \to \Lambda^{n-q}(V^*)$$

является линейным изоморфизмом. Это отображение называется *оператором Ходжа*.

Задача 10.1. Доказать утверждения:

1) если $v_1, \ldots, v_n$ – произвольный базис $V$, $g_{ij} = (v_i, v_j)$, то $(v_i^*, v_j^*) = g^{ij}$, где $(g^{ij})$ – обратная матрица к $(g_{ij})$;

2) если $\omega^q \in \Lambda^q(V^*)$, то $**\omega^q = (-1)^{q(n-q)}\omega^q$;

3) $|\omega^q| = |*\omega^q|$;

4) если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то $*(e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_q}) = \pm e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-q}}$, где $\{j_1, \ldots, j_{n-q}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_q\}$.

Перейдем к определению внешних дифференциальных форм на области $U \subset \mathbf{R}^n$. Если для каждой точки $x \in U$ определена внешняя форма $\omega^q_x \in \Lambda^q(T^*_xU)$, то говорят, что определена *внешняя дифференциальная $q$-форма* $\omega^q_x$ на $U$. Таким образом, внешняя дифференциальная $q$-форма на $U$ — это поле внешних $q$-форм. Например, дифференциал функции $df(x)$ является внешней дифференциальной 1-формой. А сама функция является внешней дифференциальной 0-формой. Пусть даны функции $f_1(x), \ldots, f_q(x), g(x)$, тогда из них получается внешняя дифференциальная $q$-форма

$$\omega^q_x = g(x)\, df_1(x) \wedge \ldots \wedge df_q(x).$$

Так как дифференциалы координатных функций $dx_1, \ldots, dx_n$ дают базис кокасательного пространства $T^*_xU$, то внешние произведения $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, $\quad i_1 < \ldots < i_q$, дают базис пространства внешних $q$-форм

$\Lambda^q(T_x^*U)$ при каждом $x \in U$. Отсюда следует, что каждая внешняя дифференциальная $q$-форма $\omega_x^q$ на $U$ имеет единственное представление

$$\omega_x^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} a_{i_1\ldots i_q}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \tag{10.1}$$

где $a_{i_1\ldots i_q}(x)$ – функции на $U$. Эта форма принадлежит классу $C^\infty$, если все коэффициенты $a_{i_1\ldots i_q}(x)$ – функции класса $C^\infty$. Далее мы рассматриваем только формы класса $C^\infty$. Множество таких $q$-форм обозначим через $\mathcal{A}^q(U)$. Относительно операций сложения и умножения на число $\mathcal{A}^q(U)$ – векторное пространство. Умножение $q$-форм на функции превращает $\mathcal{A}^q(U)$ в модуль над кольцом $\mathcal{O}(U)$. Заметим, что $\mathcal{A}^0(U) = \mathcal{O}(U)$. Положим

$$\mathcal{A}^*(U) = \bigoplus_{q=0}^{n} \mathcal{A}^q(U),$$

тогда на $\mathcal{A}^*(U)$ определена операция внешнего умножения:
если $\alpha^p \in \mathcal{A}^p(U)$, $\beta^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то $\alpha^p \wedge \beta^q \in \mathcal{A}^{p+q}(U)$. Благодаря этой операции умножения $\mathcal{O}(U)$–модуль $\mathcal{A}^*(U)$ становится $\mathcal{O}(U)$–алгеброй. Операция взятия дифференциала функции определяет отображение $d : \mathcal{A}^0(U) \to \mathcal{A}^1(U)$. Следующая теорема показывает, что это отображение однозначно продолжается до отображения $d : \mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(U)$, если потребовать от продолжения выполнения естественных условий.

**Теорема 10.2.** *Существует и единственное отображение $d : \mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(U)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *$d$ является $\mathbf{R}$–линейным отображением;*
2) *если $\omega^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то $d\omega^q \in \mathcal{A}^{q+1}(U)$;*
3) *если $\alpha^p \in \mathcal{A}^p(U)$, $\beta^q \in \mathcal{A}^q(U)$, то*

$$d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q;$$

4) *выполняется равенство $d \circ d = 0$;*
5) *если $\omega^0 \in \mathcal{A}^0(U)$, то $d\omega^0$ – дифференциал функции.*

**Доказательство.** Пусть $\omega^q \in \mathcal{A}^q(U)$ имеет разложение

$$\omega^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} a_{i_1\ldots i_q}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q},$$

тогда из условий 1)–5) вытекает равенство

$$d\omega^q = \sum_{i_1<\ldots<i_q} da_{i_1\ldots i_q}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}.$$