

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дополнительные главы уравнений в частных производных**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 19 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.



## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Дополнительные главы уравнений в частных производных» является естественным продолжением курса, обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию научного мышления и способности к восприятию науки как единого целого, частью которого является математика. Целью курса является углубление знаний по предмету «Уравнения математической физики», ознакомление с современными разделами этой дисциплины, истории развития и с вкладом российских ученых в её развитие.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Дисциплина «Дополнительные главы уравнений в частных производных» входит в цели общепрофессиональных дисциплин. Она имеет разносторонние связи со многими другими математическими и специальными дисциплинами: «Математический и функциональный анализ», «Линейная алгебра», «Уравнения математической физики», «Физика», «Концепции современного естествознания», «Численные методы».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)  | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)  | Перечень планируемых результатов обучения  |
|--|---|--|
| <b>Профессиональные компетенции</b>  |   |  |
| <b>ПК-1</b><br>Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям | <b>И-ПК-1.1</b><br>Обладает способностью критического отбора данных, связанных с научными исследованиями<br><b>И-ПК-1.2</b><br>Имеет навыки обработки данных с применением современных информационных технологий и алгоритмов<br><b>И-ПК-1.3</b><br>Способен самостоятельно интерпретировать данные научных исследований и формулировать соответствующие выводы | <b>Знать:</b><br>- основные классы дифференциальных уравнений и постановку основных задач для них, наиболее известные способы их исследования.<br><b>Уметь:</b><br>- определять типы уравнений, различать подходы к построению решений (классические решения, обобщенные).<br><b>Владеть навыками:</b><br>- вывода некоторых уравнений и их связи с соответствующими разделами физики. |



#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание   | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |    | Формы текущего<br>контроля успеваемости<br><br>Форма промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|--|---------|---|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|----|--|
|          |  |         | Контактная работа   |              |              |              |                             |    |  |
|          |  |         | лекции  | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |    |  |
| 1.       | Вводная лекция   | 8       | 1   |              |              |              |                             | 3  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 2.       | Некоторые понятия<br>функционального анализа   | 8       | 2   | 2            |              |              |                             | 8  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 3.       | Классификация уравнений  | 8       | 1   | 6            |              | 1            |                             | 4  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 4.       | Уравнения эллиптического<br>типа. Задача Дирихле.<br>Вариационный подход.<br>Обобщенные решения. | 8       | 2   | 2            |              |              |                             | 8  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 5.       | Метод Ритца, Галеркина   | 8       | 1   | 4            |              |              |                             | 3  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 6.       | Системы гиперболических<br>уравнений   | 8       | 1   |              |              |              |                             | 4  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 7.       | Гиперболические<br>уравнения (случай 3<br>независимых переменных)                                | 8       | 2   | 8            |              | 2            |                             | 12 | Контрольная работа № 1   |
| 8.       | Волновые уравнения   | 8       | 1   |              |              |              |                             | 3  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |
| 9.       | Линейные и нелинейные<br>волны   | 8       | 2   | 6            |              | 2            |                             | 4  | Фронтальный опрос и<br>обсуждение пройденной<br>темы   |



|     |                                   |   |    |    |   |     |      |  |
|-----|-----------------------------------|---|----|----|---|-----|------|--|
| 10. | Параболические уравнения          | 8 | 1  |    |   |     | 3    | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы |
| 11. | Общие понятия теории устойчивости | 8 | 2  | 4  |   |     | 3    | Фронтальный опрос и обсуждение пройденной темы |
|     |                                   |   |    |    | 2 | 0,5 | 33,5 | экзамен  |
|     | <b>ИТОГО</b>                      |   | 16 | 32 |   | 7   | 0,5  | 88,5   |

### Содержание разделов дисциплины:

- 1. Вводная лекция.** Основные уравнения математической физики. Краткий обзор основного курса «Уравнения математической физики». Вывод некоторых уравнений на основе вариационных принципов (на примере уравнения колебаний струны).
- 2. Некоторые понятия функционального анализа.** Классификация уравнений. Гильбертово пространство. Линейные функционалы и операторы. Квадратичный функционал (функционал энергии). Симметричные, положительные, положительно определенные линейные операторы. Энергетическое пространство. Минимум квадратичного функционала. Понятие обобщенного решения. Спектр положительно определенных операторов.
- 3. Классификация уравнений с частными производными второго порядка.** Уравнения в дивергентной форме.
- 4. Эллиптические уравнения второго порядка.** Обобщенные решения для уравнений второго порядка в дивергентной форме для задачи Дирихле в ограниченной области.
- 5. Методы Рунге, Галеркина.**
- 6. Уравнения гиперболического типа.** Системы уравнений гиперболического типа (гиперболические по Фридрихсу системы). Задача Коши, инварианты Римана и характеристики. Простейшие краевые задачи.
- 7. Гиперболические уравнения (случай 2-х независимых переменных).**
- 8. Волновое уравнение в случае 2-х, 3-х, 4-х независимых переменных.** Основные различия (физические интерпретации).
- 9. Волны.** Линейные волны. Дисперсионные соотношения. Нелинейные волны (примеры). Солитоны.
- 10. Параболические уравнения.** Простейшие примеры. Подход с точки зрения функционального анализа к решению некоторых краевых задач. Абстрактные функции вещественной переменной. Обобщенное решение смешанной (краевой) задачи. Уравнение теплопроводности. Формула Пуассона. Бесконечная скорость теплопередачи.
- 11. Общие понятия теории устойчивости.**

### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На



этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** — последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** — занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** — вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. М. М. Карчевский, М. Ф. Павлова. Уравнения математической физики. Дополнительные главы: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/212288>
2. Карчевский М. М. Лекции по уравнениям математической физики: учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/195495>

### **б) дополнительная литература**

1. Кубышкин Е.П. Методы решения уравнений математической физики: учебное пособие для вузов. Ярославль: ЯрГУ, 2004.



2. Куликов А.Н. Вопросы и задачи по курсу «Уравнения математической физики»: метод. указания. Ярославль, 2002. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20020206.pdf>
3. Буда́к, Б. М. Сборник задач по математической физике / Буда́к Б. М. , Самарский А. А. , Тихо́нов А. Н. - 4-е изд. , испр. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 688 с. - ISBN 5-9221-0311-3. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103113.html>
4. Годунов С.К. Уравнения математической физики. Учебное пособие для университетов. М.: Наука, 2004. 391 с.
5. Пендю́р А. Д. Уравнения математической физики: метод. указания - Ярославль: ЯрГУ, 2000. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20000405.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

### **Автор:**

профессор кафедры дифференциальных уравнений, д.ф.-м.н.

А.Н. Куликов



**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Дополнительные главы уравнений в частных производных»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Контрольная работа № 1**

**Вариант 1**

1. Найти все  $a$  и  $b$ , при которых линейный оператор

$$Au = -u'' + au' + bu, u = u(x), u'(0) = u'(1) = 0$$

будет симметричным, положительно определенным. При найденных значениях  $a$  и  $b$  найти собственные функции и собственные значения, а также решить следующую задачу

$$Au = f(x), \text{ где а) } f(x) = 1, \text{ б) } f(x) = -x.$$

**Вариант 2**

1. Найти все  $a$  и  $b$ , при которых линейный оператор

$$Au = -u'' + au' + bu, u = u(x), u(0) = u(1) = 0$$

будет симметричным, положительно определенным. При найденных значениях  $a$  и  $b$  найти собственные функции и собственные значения, а также решить следующую задачу

$$Au = f(x), \text{ где а) } f(x) = 1.$$

**Вариант 3**

1. Найти все  $a$  и  $b$ , при которых линейный оператор

$$Au = -u'' + au' + bu, u = u(x), u(0) = u(1) = 0$$

будет симметричным, положительно определенным. При найденных значениях  $a$  и  $b$  найти собственные функции и собственные значения, а также решить следующую задачу

$$Au = f(x), \text{ где а) } f(x) = x(1 - x), \text{ б) } f(x) = 1.$$

**Вариант 4**

1. Найти все  $a$  и  $b$ , при которых линейный оператор

$$Au = -u'' + au' + bu, u = u(x), u'(0) = u(1) = 0$$

будет симметричным, положительно определенным. При найденных значениях  $a$  и  $b$  найти собственные функции и собственные значения, а также решить следующую задачу



$$Au = f(x), \text{ где } f(x) = 1.$$

## Правила выставления оценки по результатам контрольной работы

Оценка по результатам самостоятельной работы считается в баллах по следующему принципу:

- за каждое полностью правильно выполненное задание — 3 балла;
- при решении допущены незначительные ошибки — 2 балла;
- правильно выбран способ решения задания, но при его реализации допущены грубые ошибки — 1 балл.

## 2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Вопросы к зачету

#### Задача 1

Привести пример:

- а) симметричного, положительно определенного оператора;
- б) симметричного, но не положительно определенного оператора;
- в) симметричного, положительного, но не положительно определенного оператора;
- г) линейного, но не симметричного оператора.

#### Задача 2

Доказать, что оператор

$$Au = u^{(4)} + qu \quad (q \leq 0)$$

$$u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$$

будет положительно определенным.

#### Задача 3

Найти все  $q$ , при которых оператор  $Au$  будет положительно определенным.

- а)  $Au = -u'' + qu, u \in D_A$ , если  $u(x) \in C^2[0,1]$  и  $u(0) = u(1) = 0$ ;
- б)  $Au = -u'' + qu, u \in D_A$ , если  $u(x) \in C^2[0,1]$  и  $u'(0) = u'(1) = 0$ ;
- в)  $Au = -u'' + qu, u \in D_A$ , если  $u(x) \in C^2[0,1]$  и  $u(0) = u'(1) = 0$ ;
- г)  $Au = -u'' + qu, u \in D_A$ , если  $u(x) \in C^2[0,1]$  и  $u'(0) = u(1) = 0$ .

#### Задача 4

Найти собственные значения, собственные функции следующих линейных операторов

- а)  $Au = -u'', u(0) = u(1) = 0$ ;
- б)  $Au = -u'', u'(0) = u'(1) = 0$ ;
- в)  $Au = -u'', u(0) = u'(1) = 0$ .

#### Задача 5

Найти обобщенное решение уравнения

$$Au = f,$$

- а)  $Au = -u'', u(0) = u(1) = 0, f(x) = x(1-x)$ ;
- б)  $Au = -u'', u(0) = u(1) = 0, f(x) = \sin \pi x + (1/3) \sin 3\pi x$ ;



с)  $Au = -u'', u(0) = u(1) = 0, f(x) = \sin^3 \pi x$ .

Выделить те обобщенные решения, которые являются классическими.

### Задача 6

Найти собственные значения, собственные и присоединенные функции у линейного оператора

а)  $Au = -u'', u(0) = 0, u'(0) + u'(1) = 0$ ;

б)  $Au = -u'', u'(0) = 0, u(0) + u(1) = 0$ .

### Задача 7

Используя метод Галеркина найти спектр оператора  $A$ :

а)  $Au = -u'' + cu', u(0) = u(1) = 0$ ;

б)  $Au = -u'' + cu', u'(0) = u'(1) = 0$ ;

с)  $Au = -u'' + cu', u(0) = u'(1) = 0$ .

### Задача 8

Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x},$$

где  $u(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, A = \{a_{jk}\}, j = 1, 2. u(0, x) = f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$  найти решение

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2x$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, f_1(x) = \exp(x), f_2(x) = 1$ ;

с)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_1(x) = x^2, f_2(x) = 0$ ; д)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, f_1(x) = \exp(x), f_2(x) = 2 + \exp(x)$ .

д)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_1(x) = x^2, f_2(x) = 0$ ; д)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, f_1(x) = \exp(x), f_2(x) = 2 + \exp(x)$ .

### Задача 9

Для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x}, u(0, x) = f(x), u_t(t, 0) = u_t(t, 1) = 0.$$

Здесь

$u(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, а) f_1(x) = \sin^3 \pi x, f_2(x) = \cos^2 \pi x$ ;

б)  $f_1(x) = x(1-x), f_2(x) = 0$ .

### Задача 10

Для уравнения колебаний струны, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(0, x) = f(x), u_t(0, x) = g(x)$$

указать те  $f(x), g(x)$ , при которых решением будет волна бегущая направо (налево).



### Задача 11

Найти все значения параметра  $a$ , при которых нулевое решение следующей краевой задачи устойчиво (асимптотически устойчиво)

$$\text{a) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, u(0) = u(\pi) = 0, x \in [0, \pi].$$

$$\text{b) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, u'(0) = u'(\pi) = 0, x \in [0, \pi].$$

$$\text{c) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, u(0) = u'(\pi) = 0, x \in [0, \pi].$$

### 3. Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачтено» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.



## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Дополнительные главы уравнений в частных производных»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе «Дополнительные главы уравнений математической физики» лежит особый математический аппарат. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным физическим задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом «Дополнительные главы уравнений математической физики».

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия, законы и основы данного курса. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы проводятся семинарские занятия, которые помогают разъяснить материал по пройденной теме.

В конце семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет. Зачет по итогам первого семестра выставляется по итогам тестирования и краткого собеседования по его результатам.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Дополнительные главы уравнений математической физики» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.