

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра математического анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Прикладной функциональный анализ**

Направление подготовки (специальности)  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)  
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 24 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Прикладной функциональный анализ» – дать студентам представление о применении методов функционального анализа к исследованию конкретных прикладных задач. Задачами курса являются:

- познакомить студентов с физическими задачами, математическими моделями которых являются интегральные уравнения;
- познакомить студентов с основными видами интегральных уравнений;
- научить студентов методам исследования интегральных уравнений Фредгольма II рода;
- познакомить с краевыми задачами для дифференциальных уравнений и способами сведения их к исследованию интегральных уравнений;
- дать представление о корректности постановки задачи;
- научить студентов исследовать вопросы существования решения уравнений типа Вольтера.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-2</b> Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<b>И-ПК-2.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов	<b>Знать:</b> основные понятия и результаты теории интегральных уравнений <b>Уметь:</b> решать типовые вычислительные и аналитические задачи интегральных уравнений <b>Владеть навыками:</b> самостоятельного изучения вопросов теории интегральных уравнений, в частности, в области разработки алгоритмов нахождения решения таких задач
	<b>И-ПК-2.2</b> Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	<b>Знать:</b> основные алгоритмические методы решения интегральных уравнений <b>Уметь:</b> выделять составляющие теории интегральных уравнений и краевых задач в поставленных задачах <b>Владеть навыками:</b> численного решения теории интегральных

		уравнений и краевых задач
	<b>И-ПК-2.3</b> Способен совершенствовать свои навыки, связанные с применением современного математического аппарата	<b>Уметь:</b> пользоваться аналитическим теорией интегральных уравнений и краевых задач (разработка алгоритмов, графика, применение систем компьютерной математики и др.) <b>Владеть:</b> способностью совершенствовать свои знания, относящиеся к теории интегральных уравнений и краевых задач
<b>ПК-3</b> Способен к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>И-ПК-3.1</b> Обладает устойчивыми знаниями в области разработки алгоритмов и программирования	<b>Знать:</b> типовые алгоритмы теории интегральных уравнений и краевых задач
	<b>И-ПК-3.2</b> Имеет навыки разработки и реализации алгоритмов в области системного и прикладного программного обеспечения	<b>Уметь:</b> самостоятельно разрабатывать алгоритмы теории интегральных уравнений и краевых задач, пригодные для компьютерной реализации <b>Владеть навыками:</b> компьютерной реализации алгоритмов теории интегральных уравнений и краевых задач
	<b>И-ПК-3.3</b> Обладает способностью критического анализа и совершенствования разрабатываемых алгоритмов и программ	<b>Знать:</b> основные вопросы, связанные с эффективностью компьютерных методов теории интегральных уравнений и краевых задач <b>Уметь:</b> проводить сравнительный анализ различных алгоритмов теории интегральных уравнений и краевых задач <b>Владеть навыками:</b> теоретического и практического совершенствования вычислительных методов теории интегральных уравнений и краевых задач

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **3** зачетные единицы, **108** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную ра- боту студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего кон- троля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Некоторые сведения из	7	2	4				6	устный опрос

	теории функций и функциональных пространств. Понятие линейного нормированного пространства. Банахово пространство. Гильбертово пространство. Понятие ортонормированной системы. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Примеры функциональных пространств.							
2.	<i>Линейные операторы.</i> Ограниченные и неограниченные операторы. Вполне непрерывные операторы. Оператор Фредгольма. Доказательство полной непрерывности оператора Фредгольма. Собственные значения и собственные функции симметричных вполне непрерывных операторов.	7	2	4			6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
3.	Интегральные уравнения. Типы интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и Вольтера. Физические задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Понятие корректности постановки задачи.	7	2	4		1	6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
4.	Интегральное уравнение Фредгольма II рода. Однородное и неоднородное. Сопряженный оператор. Интегральное уравнение с симметричным ядром. Свойства собственных значений и собственных функций однородного интегрального уравнения с симметричным ядром. Вычисление собственных значений и собственных функций интегральных уравнений Фредгольма II рода с симметричными ядрами по методу Келлога	7	2	4			6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
5.	Теорема Гильберта-Шмидта. Повторные ядра. Разложение повторного ядра по собственным функциям однородного интегрального уравнения. Положительные ядра. Теорема Мерсера.	7	2	4			6	задания для самостоятельной работы, устный опрос

6.	Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование задачи Штурма-Лиувилля сведением к однородным интегральным уравнениям Фредгольма II рода. Теорема Стеклова	7	2	4		1		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
7.	Неоднородное уравнение Фредгольма II рода. Резольвента интегрального оператора. Альтернатива Фредгольма. Вырожденные ядра. Построение собственных значений и собственных функций интегральных уравнений и вырожденными ядрами. Примеры. Интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром, зависящим от разности аргументов	7	2	4		2		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
8.	Интегральные уравнения Фредгольма II рода с полярным ядром. Интегральное уравнение Фредгольма с произвольным непрерывным ядром. Построение резольвенты. Альтернатива Фредгольма.	7	2	4		2		6	задания для самостоятельной работы, устный опрос
							0,3	5,7	зачет
	<b>ИТОГО</b>		16	32		6	0,3	53,7	

## 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.
- система Wolfram Mathematica. (<https://www.wolframcloud.com/>)
- Network 15 Mathematica 11 Increment Standard Bundled List Price with Service.
- Network 15 Mathematica 11 Upgrade L3549-7407.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» [http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyl.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>
- Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
- База научных статей Mathnet
- База Scopus
- База Web of Sciences

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Е. А. Власова, И. К. Марчевский Элементы функционального анализа: учебное пособие. — Санкт-Петербург: Лань, 2022 <https://reader.lanbook.com/book/212189>
2. Е.П. Кубышкин. Методы решения уравнений математической физики: Учебное пособие - Ярославль, 2004.

### **б) дополнительная литература**

1. Н.И. Ахиезер, Н.М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Из-во Наука, 1966.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А. Н. , Фомин С. В. - 7-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 572 с. - ISBN 978-5-9221-0266-7. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102667.html>
3. А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов Интегральные уравнения. М.: Из-во Моск.ун-та,1989.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

Профессор кафедры математического анализа,  
доктор физ.-мат. наук, профессор

Кубышкин Е.П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Прикладной функциональный анализ»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы** даются по лекциям и учебным пособиям и др. Эти задания не оцениваются, но их выполнение контролируется на практических занятиях и (или) в ЭУК Moodle ЯрГУ. В последнем случае задания формулируются в соответствующих разделах курса.

Пример задания, предлагающегося на практическом занятии

1. Найти решение интегрального уравнения:

$$u(x) = \int_0^1 (\sin(x) \sin(y) + xy)u(y)dy + x \cos(x).$$

**Вопросы к зачету**

1. Общие сведения из теории функций и функционального анализа.
2. Линейные операторы и их свойства.
3. Интегральные уравнения. Типы интегральных уравнений. Корректность постановки задачи.
4. Интегральное уравнение Фредгольма II рода и их свойства.
5. Теорема Гильберта-Шмидта. Повторные ядра.
6. Положительные ядра. Теорема Мерсера.
7. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование задачи Штурма-Лиувилля сведением к однородным интегральным уравнениям Фредгольма II рода.
8. Теорема Стеклова.
9. Неоднородное уравнение Фредгольма II рода. Резольвента интегрального оператора. Альтернатива Фредгольма.
10. Вырожденные ядра. Построение собственных значений и собственных функций интегральных уравнений и вырожденными ядрами.
11. Интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром, зависящим от разности аргументов.
12. Интегральные уравнения Фредгольма II рода с полярным ядром.
13. Интегральное уравнение Фредгольма с произвольным непрерывным ядром. Построение резольвенты. Альтернатива Фредгольма
14. Интегральное уравнение Фредгольма I рода как некорректно поставленная задача. Методы регуляризации.
15. Теорема о минимуме сглаживающего функционала. Построение приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма I рода.

Пример задания, предлагаемого на зачете.

1. Найти решение интегрального уравнения:

$$u(x) = \int_0^1 (\sin(x) \sin(y) + xy)u(y)dy + x \cos(x).$$



## 2. Теорема Гильберта-Шмидта. Повторные ядра.

### **Правила выставления оценки на экзамене (в устной форме)**

В экзаменационный билет включается два теоретических вопроса и задача. На подготовку к ответу дается 1 час. По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

Оценка «отлично» выставляется студенту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины, дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, правильно решает задачу

Оценка «хорошо» выставляется студенту, ответ которого на экзамене в целом соответствует указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются самим студентом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора. Необходимым условием является хотя бы частичное решение задачи.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, который дает недостаточно полные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом все же демонстрирует некоторые базовые знания по предмету. При аргументации ответа студент не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не демонстрирует знания базовых понятий и результатов, не в состоянии решить задачу, плохо отвечает на дополнительные вопросы, не владеет понятийным материалом дисциплины. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов студента. На основную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы. Кроме того, оценка «Неудовлетворительно» может быть выставлена при незнании каких-то базовых понятий и результатов. Оценка «Неудовлетворительно» выставляется также студенту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

### **Правила выставления оценки на экзамене (в письменной форме)**

Студенту предлагается индивидуальный вариант заданий, содержащий 4-6 задач. На выполнение и представление заданий дается 1.5-2 часа. При оценивании выполненных заданий может использоваться следующая система оценок за одно задание:

- + (4 балла) – задание выполнено полностью, без ошибок;
- + (3 балла) – задание выполнено с незначительной ошибкой или почти полностью;
- + (2 балла) – задание выполнено с существенной ошибкой или примерно наполовину;
- + (1 балл) – лишь какие-то элементы представленного ответа могут быть оценены положительно.

Пусть  $k$  – число задач в предложенном варианте. Определяется общее число  $M$  баллов, набранных студентом. Оценка зависит от величины отношения  $r = \frac{M}{N}$ , где  $N = 4k$  – максимальное возможное число баллов за работу. Возможная градация оценок следующая:

- $0.75 \leq r \leq 1$  – оценка «отлично»;
- $0.60 \leq r < 0.75$  – оценка «хорошо»;
- $0.26 \leq r \leq 0.59$  – оценка «удовлетворительно»;
- $0 \leq r \leq 0.25$  – оценка «неудовлетворительно».

Преподаватель имеет право учитывать на экзамене работу студента в семестре.

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Студентам предлагается изучить не только рекомендованную литературу, но и возможные дополнительные источники (например, научные статьи), на которые может указать преподаватель. Эта работа по большей части может выполняться студентами индивидуально, под руководством преподавателя.

В процессе освоения дисциплины обучающиеся выполняют курсовые работы, которые являются важным этапом написания ВКР на 4-м курсе. Вопросы, связанные с выполнением курсовой работы и ВКР, оформлением текстов, разнообразные вопросы по выступлению на защитах этих работ, вполне целесообразно задать преподавателю дисциплины. Большую пользу принесет выступление на семинаре или студенческой (молодежной) конференции. Тема доклада для выступления вполне может быть связана с тематикой прикладного функционального анализа и смежными науками, в том числе, с компьютерной реализацией алгоритмов аппроксимации. Такой расширенный подход к освоению материала дисциплины может быть весьма полезен студентам.

Отметим, наконец, важность самостоятельной работы над математическими доказательствами. Именно доказательства, а не формулировки результатов, составляют суть математики. Доказательный стиль мышления выделяет математика из представителей многих других профессий, и именно доказательства наиболее полезны для повышения степени математизации мышления. Не следует думать, что, прослушав доказательство на лекции, вы его полностью поняли и усвоили. Попробуйте его воспроизвести - как правило, вы встретитесь со значительными трудностями. В этом нет ничего необычного.

По нашему мнению, даже в каждом простом на вид доказательстве закодированы те откровения, находки и открытия, которые были сделаны его автором много лет назад. И хотя они сглажены при изложении на лекции или на страницах учебника, они существуют и требуют осмысления. Каждый скачок в познании, сделанный давным-давно учёным-математиком должен иметь своё отражение в голове изучающего этот предмет много лет спустя. Поэтому математика трудна не только для творчества, но и для изучения. В известном смысле изучение математики само является творчеством, только творчеством для себя. Трудность математического знания имеет и другую сторону: математические истины устойчивы, непеременимы и даже вечны. Это очень привлекательное качество нашей науки.