

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Линейная алгебра

Направление подготовки (специальности)
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Линейная алгебра» являются основы теории векторных пространств, линейных преобразований, векторных пространств со скалярным произведением и линейных преобразований в них, а также основ линейной геометрии.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к обязательной части образовательной программы и использует знания и умения, полученные студентами при изучении курсов алгебры и геометрии, а также задействует знания из курса «Введение в теорию множеств и логическую символику». Обсуждение приложений линейной алгебры в физике задействует информацию, полученную студентами в курсе физики. Знания, полученные при изучении линейной алгебры, задействуются практически во всех математических курсах и курсах профессиональной подготовки. Это математический анализ, дифференциальные уравнения, алгебраическая алгоритмика, избранные вопросы алгебры, дискретная математика, теория функций комплексной переменной, теоретико-числовые методы в криптографии, криптографические методы защиты информации, методы алгебраической геометрии в криптографии.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	И-УК-1.1 Осуществляет системный анализ задачи, выделяя ее базовые составляющие И-УК-1.2 Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи	Знать: основные классы объектов линейной алгебры и многомерной линейной геометрии Уметь: распознавать объекты данной задачи, выбирать совокупность методов, соответствующих классу объектов рассматриваемой задачи, и последовательность приёмов и действий для её корректного решения Владеть: навыками интерпретации результатов анализа вычислений в задачах алгебры и геометрии
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач	И-ОПК-3.3 Применяет математический аппарат для решения прикладных и теоретических задач И-ОПК-3.4 Знает основные понятия, результаты и методы современной математики	Знать: основные понятия и результаты линейной алгебры и многомерной линейной геометрии Уметь: строить и анализировать объекты и выполнять основные конструкции в линейной алгебре и многомерной линейной геометрии Владеть: опытом работы с линейными и аффинными

профессиональной деятельности	и сценарии их применения в задачах профессиональной деятельности	отображениями, навыками вычислений характеристик векторных пространств и линейных отображений в матричной форме
-------------------------------	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **8** зачетных единиц, **288** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа					самостоятельная работа		
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационны е испытания			
1	Векторное пространство	3	6	6		2		8	Задание для сам. раб. № 1 Самостоят. работа № 1	
2	Гомоморфизмы векторных пространств	3	10	12		2		12	Задание для сам. раб. № 2 Самостоят. работа № 2	
3	Линейные операторы	3	12	12		2		15	Задание для сам. раб. № 3 Самостоят. работа № 3	
4	Двойственность	3	4	2		1		2		
						2	0,5	33,5	экзамен	
	Итого за 3 семестр		32	32		9	0,5	70,5		
5	Билинейные и квадратичные формы	4	6	6		1		8	Задание для сам. раб. № 5	
6	Векторные пространства с дополнительной структурой	4	8	8		2		10	Задание для сам. раб. № 6 Самостоят. работа № 4	
7	Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением	4	8	8		2		10	Задание для сам. раб. № 7 Самостоят. работа № 5	
8	Аффинные и евклидовы точечные пространства	4	10	10		2		9	Задание для сам. раб. № 8 Самостоят. работа № 6	
						2	0,5	33,5	экзамен	
	Итого за 4 семестр		32	32		9	0,5	70,5		
	ИТОГО		64	64		18	1,0	141		

Содержание разделов дисциплины:

1. Векторное пространство.

1.1. Понятие векторного пространства: определение и примеры векторных пространств над бесконечными и конечными полями. Линейная зависимость и ее свойства.

1.2. Подпространство. Объединение, сумма и пересечение подпространств. Линейная оболочка подмножества векторов векторного пространства.

1.3. Фильтрации (цепи подпространств) в векторном пространстве. Базис и размерность. Два определения размерности векторного пространства. Размерности и базисы суммы и пересечения подпространств.

1.4. Координаты вектора в базисе. Матрица перехода от одного базиса к другому. Вычисление координат вектора при смене базиса.

1.5. Прямая сумма подпространств. Прямое дополнение к подпространству.

2. Гомоморфизмы векторных пространств.

2.1. Линейное отображение (гомоморфизм) векторных пространств. Примеры линейных отображений. Изоморфизм векторных пространств. Классификация конечномерных векторных пространств. Базис как изоморфизм.

2.2. Матрица линейного отображения векторных пространств в паре базисов. Ее изменение при смене базисов.

2.3. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерии инъективности, сюръективности и биективности линейного отображения. Ранг произведения двух матриц.

2.4. Факторпространство. Изоморфность всех прямых дополнений к данному подпространству.

3. Линейные операторы.

3.1. Понятие эндоморфизма векторного пространства (линейного оператора). Матрица линейного оператора в базисе. Подобие матриц. Понятие алгебры над полем. Алгебра эндоморфизмов данного векторного пространства. Ее изоморфизмы на алгебру квадратных матриц.

3.2. Полиномы от линейного оператора. Гомоморфизм алгебры полиномов от 1 переменной в алгебру эндоморфизмов векторного пространства. Подалгебра, порожденная оператором, и минимальный полином линейного оператора. Вычисление минимального полинома линейного оператора.

3.3. Инвариантные подпространства линейного оператора. Примеры линейных операторов, обладающих и не обладающих собственными инвариантными подпространствами. Матрица линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством. Проекторы. Фактороператор и его матрица.

3.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический полином линейного оператора и его инвариантность. Теорема Гамильтона – Кэли.

3.5. Корневые подпространства линейного оператора, их основные свойства. Разложение векторного пространства в прямую сумму корневых подпространств.

3.6. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора. Жорданов базис.

4. Двойственность.

4.1. Понятие двойственного векторного пространства. Двойственность и операции над подпространствами. Линейный оператор, двойственный к данному. Двойственные базисы и матрица двойственного оператора в двойственном базисе. Рефлексивность векторных пространств.

4.2. Каноническое спаривание, его невырожденность и вид в различных базисах.

4.3. Приведение матрицы линейного оператора к верхнетреугольному виду.

5. Билинейные и квадратичные формы.

5.1. Полилинейное отображение. Полилинейная форма. Билинейная форма. Векторное пространство билинейных форм на данном векторном пространстве. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Матрица билинейной формы в выбранном базисе и ее преобразование при смене базисов. Конгруэнтность матриц.

5.2. Квадратичные формы. Канонический и нормальный (в вещественном случае) виды матрицы квадратичной формы. Знакоопределенность и невырожденность, сигнатура и ранг. Эквивалентность квадратичных форм. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

5.3. Кососимметрические формы. Симплектическая плоскость. Невырожденность кососимметрической формы и размерность пространства. Канонические матрицы кососимметрических форм. Метод Лагранжа приведения кососимметрической формы к каноническому виду.

6. Векторные пространства с дополнительной структурой.

6.1. Евклидовы пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Его следствия. Ортогональность. Ортонормированный базис. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональная группа.

6.2. Симплектическая группа. Теорема о спектре симплектического оператора.

6.3. Полуторалинейные формы. Эрмитовы формы и пространства. Неравенство Коши – Буняковского в эрмитовом случае. Ортонормированный базис в эрмитовом пространстве. Равенство Парсевала.

6.4. Унитарные матрицы и унитарная группа.

7. Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением.

7.1. Линейные операторы и θ -линейные формы. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Классы эрмитовых и косоэрмитовых операторов. Алгебры эрмитовых и косоэрмитовых операторов.

7.2. Матрица сопряженного и самосопряженного оператора. Критерий равенства операторов. Собственные значения и теорема о канонической форме эрмитова оператора. Приложения эрмитовых операторов в физике.

7.3. Приведение квадратичной формы к главным осям. Алгоритм. Матричная формулировка. Одновременная диагонализуемость пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

7.4. Канонический вид унитарного и ортогонального операторов.

7.5. Нормальный оператор. Связь нормальности и диагонализуемости. Спектральная теорема для нормального оператора.

7.6. Перестановочные операторы. Положительно определенные операторы. Теорема о разложении невырожденного оператора в произведение положительно определенного оператора и изометрии.

8. Аффинные и евклидовы точечные пространства.

8.1. Аффинные пространства. Изоморфизм аффинных пространств. Аффинные координаты. Связь различных систем координат друг с другом.

8.2. Плоскости в аффинном пространстве. Параметрическое задание плоскости. Аффинная оболочка. Взаимное расположение двух плоскостей. Аффинные функции. Аффинные плоскости как решения систем линейных уравнений.

8.3. Евклидовы аффинные пространства. Отрезок. Расстояния и углы. Теорема Пифагора. Расстояние от точки до плоскости. Объем параллелепипеда.

8.4. Общий перпендикуляр к двум плоскостям. Условие единственности общего перпендикуляра. Расстояние между плоскостями.

8.5. Группы и геометрии. Линейные геометрии.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет

привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, стимулировать интерес и расставлять акценты, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний. На практическом занятии проводится также разбор вызвавших затруднение задач из заданий для самостоятельной работы.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Тимофеева Н. В. Линейная алгебра. Современная алгебра: учеб. пособие для вузов - Ярославль, ЯрГУ, 2012. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120204.pdf>

2. Тимофеева Н. В. Линейная алгебра. Современная алгебра: учебное пособие для вузов. Ч.2 - Ярославль, ЯрГУ, 2017.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20170206.pdf>

3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре: учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург: Лань, 2024 <https://reader.lanbook.com/book/397331>

б) дополнительная литература

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях. Часть I: Основы алгебры — М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922101676-SCN0000/000.html>
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях. Часть II: Линейная алгебра — М: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях. Часть III: Основные структуры алгебры — М: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор(ы):

профессор кафедры АМЛ, д.ф.-м. н.

Н.В. Тимофеева

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Линейная алгебра»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущей аттестации**

Задания для самостоятельной работы формируют, а Самостоятельные работы контролируют сформированность **ОПК-3** (индикаторы **И-ОПК-3.3—3.4**)

Все номера заданий даны по книге И.В. Проскурякова (п. 2 дополнительной литературы)

Задание для самостоятельной работы к теме 1 «Векторное пространство»

1279, 1281, 1282, 1283, 1284, 1288 — 1292, 1299, 1303, 1304, 1313, 1318, 1321, 1322.

Задание для самостоятельной работы к теме 2 «Гомоморфизмы векторных пространств» 1436, 1439, 1440, 1442, 1443, 1446, 1449, 1453.

Задание для самостоятельной работы к теме 3 «Линейные операторы» 1468, 1473, 1474, 1478, 1480, 1483, 1499, 1527, 1532 – 1535.

Задание для самостоятельной работы к теме 5 «Билинейные и квадратичные формы» 1178, 1179, 1185, 1186, 1189, 1192, 1201, 1214, 1867

Задание для самостоятельной работы к теме 6 «Векторные пространства с дополнительной структурой» 1357, 1358, 1362, 1363, 1365, 1366, 1371, 1372

Задание для самостоятельной работы к теме 7 «Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением» 1542, 1544, 1551, 1555, 1557, 1572, 1576, 1578, 1586, 1587, 1588, 1224, 1244, 1249

Задание для самостоятельной работы к теме 8 «Аффинные и евклидовы точечные пространства» 1335 – 1337, 1341, 1342, 1374а, 1377, 1386, 1393, 1395, 1398, 1402, 1406

Самостоятельная работа № 1 «Векторное пространство» 1278, 1300, 1321

Самостоятельная работа № 2 «Гомоморфизмы векторных пространств» 1444, 14526

Самостоятельная работа № 3 «Линейные операторы» 1467, 1534

Самостоятельная работа № 4 «Векторные пространства с дополнительной структурой» 1360, 1371

Самостоятельная работа № 5 «Линейные операторы и квадратичные формы в пространствах со скалярным произведением» 1543, 1558

Самостоятельная работа № 6 «Аффинные и евклидовы точечные пространства» 1388, 13746

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Задание **экзамена** состоит из билета, содержащего 2 теоретических вопроса (см. приведенный ниже список), и задачи (см. приведенный далее список), которую студент выбирает случайным образом наряду с билетом. Студенту могут быть заданы дополнительные вопросы (в рамках вопросов билета или на тему задачи) с целью выявить уровень понимания изученного материала.

Список вопросов экзамена (И-УК-1.2 , И-УК-1.1, И-ОПК-3.3)

3 семестр

1. Линейные векторные пространства. Определение и примеры. Линейная оболочка. Подпространства векторного пространства.
2. Пересечение и сумма подпространств. Цепи подпространств.
3. Прямая сумма. Прямое дополнение.
4. Размерность и базис линейного векторного пространства. Теорема о монотонности размерности. Матрица перехода от базиса к базису.
5. Изоморфизм векторных пространств. Смежные классы и факторпространство.
6. Линейные отображения и линейные операторы. Задание линейных отображений матрицами. Размерность пространства линейных отображений из одного пространства в другое.
7. Минимальный многочлен линейного оператора.
8. Алгебра линейных операторов. Ее свойства. Размерность пространства $k[A]$.
9. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.
10. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа.
11. Ранг линейного оператора. Подобие матриц. Критерии невырожденности линейного оператора.
12. Характеристический многочлен. Примеры. След и определитель как инварианты.
13. Инвариантное подпространство линейного оператора. Инвариантное прямое разложение. Проектор и его строение. Инвариантная фильтрация. Вид матрицы линейного оператора в базисе, согласованном с инвариантным подпространством, инвариантной прямой суммой и инвариантной фильтрацией. Фактороператор.
14. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
15. Оператор с простым спектром. Критерий диагонализруемости матрицы линейного оператора.
16. Теорема о разложении линейного оператора в прямую сумму нильпотентного и невырожденного.
17. Теорема Гамильтона – Кэли. Частные случаи для теоремы Гамильтона – Кэли.
18. Нильпотентный оператор. Теорема о существовании жордановой нормальной формы для нильпотентного оператора.
19. Жорданова клетка. Корневые подпространства. Существование разложения в сумму корневых подпространств.
20. Теорема о жордановой нормальной форме. Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы.
21. Линейные функционалы. Двойственное пространство. Двойственный базис.
22. Каноническое спаривание. Рефлексивность векторных пространств. Пространство решений однородной системы линейных уравнений и линейные функционалы.
- 4 семестр**
23. Билинейные отображения. Полилинейные отображения. Задание билинейных отображений матрицами. Связь между матрицами билинейного отображения в различных базисах. Симметрические и кососимметрические билинейные формы.
24. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма. Приведение симметрических билинейных форм к каноническому виду. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
25. Закон инерции квадратичных форм. Метод Якоби приведения невырожденной квадратичной формы к каноническому виду.
26. Нормальный вид квадратичной формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.
27. Кососимметрические билинейные формы. Их классификация.
28. Евклидовы пространства. Неравенство Коши – Буняковского. Его следствия.
29. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта.
30. Изоморфизм евклидовых пространств.

31. Ортогональная и симплектическая группы. Теорема о спектре симплектического оператора.
32. Эрмитовы формы и пространства. Неравенство Коши – Буняковского.
33. Ортонормированный базис в эрмитовом пространстве. Равенство Парсеваля. Унитарные матрицы и унитарная группа.
34. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Классы эрмитовых и косоэрмитовых операторов.
35. Матрица сопряженного и самосопряженного оператора. Критерий равенства операторов.
36. Теорема о канонической форме эрмитова оператора.
37. Приведение квадратичной формы к главным осям. Матричная формулировка.
38. Нормальный оператор. Связь нормальности и диагонализруемости. Спектральная теорема для нормального оператора.
39. Перестановочные операторы.
40. Положительно определенные операторы.
41. Теорема о разложении невырожденного оператора в произведение положительно определенного оператора и изометрии.
42. Канонический вид матрицы изометрий (вещественный и комплексный случаи).
43. Аффинные пространства. Изоморфизм аффинных пространств.
44. Плоскости в аффинном пространстве.
45. Аффинные координаты. Связь различных систем координат друг с другом.
46. Плоскость (линейное подмногообразие). Параметрическое задание плоскости.
47. Аффинная оболочка. Взаимное расположение двух плоскостей.
48. Аффинные функции. Аффинные плоскости как решения систем линейных уравнений.
49. Евклидовы аффинные пространства. Отрезок. Расстояния и углы. Теорема Пифагора.
50. Расстояние от точки до плоскости. Объем параллелепипеда.
51. Общий перпендикуляр к двум плоскостям. Условие единственности общего перпендикуляра. Расстояние между плоскостями.
52. Группы и геометрии. Линейные геометрии.

Список задач экзамена (И-УК-1.2 , И-УК-1.1, И-ОПК-3.3, И-ОПК-3.4)

3 семестр

- Задача 1. Выяснить, какие из совокупностей многочленов степени не выше n над полем F образуют линейное векторное пространство: а) многочлены, имеющие корень в заданных двух точках a и b ; б) многочлены, у которых сумма всех коэффициентов равна нулю. В случае положительного ответа найти размерность и базис.
- Задача 2. Найти размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$: $a_1 = (1, 0, 1, 1), a_2 = (1, 0, 0, 1), b_1 = (0, 1, 1, 1), b_2 = (1, 1, 1, 1)$.
- Задача 3. Доказать, что сумма подпространств L и M векторного пространства V равна пересечению всех подпространств, содержащих L и M .
- Задача 4. Найти число всех базисов n -мерного пространства V над полем из q элементов, содержащих заданный ненулевой вектор.
- Задача 5. Является ли подпространством линейного векторного пространства многочленов от одной переменной над полем F : а) множество всех многочленов не содержащих четных степеней переменной x ; б) множество многочленов четной степени?
- Задача 6. Пусть размерность суммы двух подпространств на единицу больше размерности их пересечения. Что можно сказать об этих подпространствах?
- Задача 7. Пусть $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ -- множество многочленов от n переменных над полем F . Какова размерность подпространства этого пространства, состоящего из однородных многочленов степени k ?

Задача 8. Пусть U, V, W - подпространства векторного пространства. Докажите, что $(U+W) \cap (W+V) \cap (V+U) = [(W+V) \cap U] + [(V+U) \cap W]$.

Задача 9. Пусть V - векторное пространство размерности 4 над полем из пяти элементов. Сколько существует вырожденных операторов из V в V ?

Задача 10. Пусть линейный оператор A действует на множестве квадратных матриц размерности 2 умножением на фиксированную матрицу размера 2. Найти матрицу этого оператора в пространстве всех квадратных матриц размерности 2.

Задача 11. Пусть матрица A перестановочна с любой квадратной матрицей размера 5. Что можно сказать о ее жордановой нормальной форме?

Задача 12. Пусть квадратная матрица состоит из одних единиц. Какова ее жорданова нормальная форма?

Задача 13. Найти $\exp(A)$, где A - квадратная матрица, состоящая из одних единиц, размера 2.

Задача 14. Пусть матрица A обладает свойством $A^4 = I$, где I --- единичная матрица. Что можно сказать о ее жордановой нормальной форме?

Задача 15. Пусть λ - собственное значение матрицы A . Верно ли, что у матрицы $f(A)$, где f -многочлен одной переменной, имеется собственное значение $f(\lambda)$?

Задача 16. Пусть жорданова нормальная форма матрицы A состоит из одной клетки. Что можно сказать о жордановой нормальной форме A^2 ?

Задача 17. Верно ли, что оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда все его собственные значения равны нулю?

Задача 18. Каков минимальный многочлен матрицы A^2 , если жорданова нормальная форма матрицы A состоит из двух клеток?

Задача 19. Доказать, что если оператор A невырожденный, то операторы A и A^{-1} имеют одни и те же собственные векторы.

Задача 20. Найти все квадратные матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

Задача 21. Когда минимальный полином матрицы равен $\lambda^2 - 1$? Перечислить все такие матрицы размера 4.

Задача 22. Пусть три вектора a, b, c линейно независимы. Будут ли линейно независимы векторы: а) $a, a+b, a-b-c$; б) $a-b, b-c, c-a$; в) $a+b-2c, 2a-b+c, -a+2b+c$?

Задача 23. Какова размерность пространства функционалов, обладающих свойством $f(a) + f(b) + 2f(c) = 0$, если a, b и c - линейно независимые векторы?

Задача 24. Найти жорданову нормальную форму матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 25. Найти жорданов базис матрицы A : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 26. Найти все значения λ , при которых вектор b линейно выражается через a_1, a_2, a_3 : $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (3, 7, 8), a_3 = (1, -6, 1), b = (7, -2, \lambda)$.

Задача 27. Найти размерность суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (1, 1, -1), a_3 = (1, 3, 3)$ и $b_1 = (1, 2, 2), b_2 = (2, 3, -1), b_3 = (1, 1, -3)$.

Задача 28. Найти матрицу линейного оператора, заданного в пространстве вещественных квадратных матриц размера 2 транспонированием: $X \mapsto X^t$. В качестве базиса выбрать матричные единицы $E_{ij} = (e_{kl} = 1 \text{ при } k = i, l = j; e_{kl} = 0 \text{ в противном случае})$.

Задача 29. Найти все матрицы, перестановочные с жордановой клеткой.

Задача 30. Найти ядро и образ линейного оператора, заданного в пространстве вещественных квадратных матриц размера 2 умножением на фиксированную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ справа.}$$

4 семестр

Задача 31. Найти нормальный вид квадратичной формы $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду.

Задача 32. Какими значениями ранга и сигнатуры характеризуются те классы вещественно эквивалентных квадратичных форм, для которых форма f эквивалентна форме $-f$?

Ответ обоснуйте.

Задача 33. Найти число классов эквивалентности над полем вещественных чисел для форм от n переменных, имеющих заданную сигнатуру s .

Задача 34. Пусть A и B -- самосопряженные операторы на унитарном пространстве V . Если для любого $x \in V$ выполнено $(Ax|x) = (Bx|x)$, то $A = B$. Доказать.

Задача 35. Доказать, что всякая вещественная обратимая матрица может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и положительно определенной матрицы.

Задача 36. Доказать, что если линейные операторы A и B перестановочны, то $\ker A$ и $\operatorname{im} B$ инвариантны относительно оператора A .

Задача 37. Найти матрицу симметрической части билинейной формы $f(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 4x_1y_3 + x_2y_1 - 5x_2y_3 + x_3y_1$.

Задача 38. Не производя вычислений, выяснить, эквивалентны ли в области вещественных чисел следующие билинейные формы: $f(x, y) = 2x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1$ и $g(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_1y_3 - 3x_3y_1$.

Задача 39. Не разыскивая линейного преобразования, найти канонический вид квадратичной формы $q = 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 2xy + 2xz$.

Задача 40. Выяснить, какие из следующих квадратичных форм эквивалентны в области вещественных чисел: $f = x^2 - yz$, $g = xy - z^2$, $h = xy + z^2$.

Задача 41. Доказать, что если из каждой из двух квадратичных форм можно перейти некоторым линейным (не обязательно невырожденным) преобразованием к другой, то эти формы эквивалентны.

Задача 42. Найти размерность пространств симметрических и кососимметрических билинейных форм на векторном пространстве размерности n .

Задача 43. Найти ортогональную проекцию вектора x на линейное подпространство L , если $x = (4, 2, 3, 1)$, $L = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1), (2, 3, 3, 2) \rangle$.

Задача 44. Найти биссектрису угла A треугольника ABC , заданного координатами его вершин (в пространстве размерности, большей 3) если $A = (2, 4, 2, 4)$, $B = (6, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7)$. Чему равна площадь треугольника?

Задача 45. Найти уравнения плоскости, проходящей через точки (в пространстве размерности, большей 3) $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

Задача 46. Пусть V -- евклидово трехмерное пространство, такое, что

$$\|x\|^2 = (x|x) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 2yz. \text{ Найти все векторы, ортогональные вектору } x = (1, 2, 3).$$

Задача 47. Найти базис ортогонального дополнения M подпространства L , натянутого на систему векторов $a = (1, 0, 1, 2)$, $b = (2, 1, 2, 3)$, $c = (0, 1, -2, 1)$.

Задача 48. Пусть L -- подпространство евклидова пространства V . Показать, что любой вектор $x \in V$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in L$, а вектор z ортогонален любому вектору из L .

Задача 49. Верно ли, что множество симметрических квадратных матриц составляет группу по умножению?

Задача 50. Найти порядок группы невырожденных линейных операторов A пространства V размерности 2 над полем из двух элементов, удовлетворяющих соотношению $AA^T = E$.

Задача 51. Найти расстояние от точки, заданной вектором $x=(4,2,5,1)$, до подпространства, заданного системой уравнений $2x-2y+z+2t=9$, $2x-4y+2z+3t=12$.

Задача 52. Найти систему уравнений и параметрические уравнения, задающие аффинную оболочку множества точек: $A(1,0,1,2)$, $B(2,1,2,3)$, $C(0,1,-2,1)$, $D(1,3,2,4)$.

Задача 53. Пусть L и M -- подпространства евклидова пространства V и $\dim L < \dim M$. Докажите, что в M найдется ненулевой вектор, ортогональный любому вектору из L .

Задача 54. Найти векторы, дополняющие систему векторов $a_1=(2,3,5,-2)$, $a_2=(3,-7,3,0)$ до ортогонального базиса. Скалярное произведение считать стандартным.

Задача 55. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов: $(2,1,3,-1)$, $(7,4,3,-3)$, $(1,1,-1,0)$, $(5,7,7,8)$.

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс линейной алгебры является содержательно насыщенным и весьма объемным. Поэтому он требует от студента систематических усилий.

При изучении теории необходим разбор студентом лекционного материала дома с применением литературы и выделением мест, требующих пояснения при следующем контакте с преподавателем.

Задачный материал по линейной алгебре подразделяется на две большие группы. Первую группу составляют задачи сугубо вычислительной направленности; их цель – наработка владения вычислительными алгоритмами линейной алгебры. Эти алгоритмы несложны и при добросовестной работе студента не вызывают затруднений. Вторую группу составляют «теоретические» задачи. Это либо задачи на доказательство утверждений, либо задачи на вычисление, алгоритмом решения которых студент на данный момент не располагает, и в задание входит как раз построение этого алгоритма. Задачи обоих видов часто вызывают затруднения, и поэтому студенту рекомендуется приступать к выполнению домашнего задания заранее, чтобы у него было достаточно времени на размышление и возможность вернуться к решению задачи позднее. Задачный материал берется преимущественно из сборника И.В.Проскурякова.

В конце обоих семестров изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса, плюс задача, которую студент получает случайным образом из фиксированного набора. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Линейная алгебра» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.