

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 12 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целью дисциплины «Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии» является ознакомление студентов с основными понятиями и результатами теории коммутативных колец, понятием алгебраического многообразия и некоторыми подходами в изучении алгебраических многообразий. Курс направлен на дальнейшее развитие студентов в направлениях «абстрактной» или «вычислительной» математики в зависимости от индивидуальных склонностей каждого студента.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Использует знания и умения, полученные студентами при изучении курсов алгебры, линейной алгебры и аналитической геометрии. Полезны также знания, полученные студентами из курсов по выбору «Теория групп» и «Современная геометрия». Знания по данной дисциплине обогатят понимание студентами материала курсов по выбору «Криптографические методы» и «Информационная безопасность».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Профессиональные компетенции</b>		
<b>ПК-3</b> Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники.	<b>И-ПК-3.1</b> Знает основные методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программных продуктов и программных комплексов, их сопровождения, администрирования и развития (эволюции). <b>И-ПК-3.2</b> Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта <b>И-ПК-3.3</b> Имеет практический опыт применения указанных выше методов и технологий	<b>Знать:</b> - основные понятия и результаты теории коммутативных колец, начал теории модулей над коммутативными кольцами, понятие алгебраического множества. - о применении методов алгебраической геометрии в теоретической физике, задачах планирования движения и криптографии. <b>Уметь:</b> строить и исследовать гомоморфизмы колец и модулей и морфизмы алгебраических множеств, выявлять структуры кольца и идеала. <b>Владеть навыками:</b> вычислений в факторкольцах

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Кольца. Нули полиномов и идеалы. Порождение и системы образующих. Операции над идеалами	7	8	6		2		11	Домашние задания с последующим разбором, Задание для сам. работы к теме № 1
2	Модули над коммутатив-ными кольцами	7	2	4		2		11	Домашнее задание к теме № 2, с последующим разбором
3	Область целостности и её поле частных. Первое представление о теории размерности. Регулярные кольца и неособые многообразия	7	6	6				11	Домашние задания с последующим разбором, Задание для сам. работы к теме № 3
							0,3	2,7	зачёт
	ИТОГО		16	16		4	0,3	35.7	

#### Содержание разделов дисциплины

##### Тема 1. Кольца (коммутативные, ассоциативные, с единицей). Нули полиномов и идеалы. Порождение и системы образующих. Операции над идеалами

Примеры колец. Кольца полиномов над полями, кольцом целых чисел. Понятие алгебры. Идеал в кольце. Идеал, определяемый системой полиномиальных уравнений. Преобразования систем уравнений с точки зрения понятия идеала (готовимся к координатным кольцам). Факторкольцо. Примеры факторколец и вычислений в них.

Специальные элементы колец: делители нуля, нильпотенты, обратимые элементы. Простые и максимальные идеалы и факторкольца относительно них (геометрическое толкование – рисунки). Примеры простых и максимальных идеалов в полиномиальных кольцах.

Алгебраические множества – примеры (вспоминаем рисунки из темы 1) и определение. Функции на множествах. Современный подход к геометрии. Общее представление о методах алгебраической геометрии в физике. Поведение отображений множеств и функций (обращение стрелок при переходе от "геометрии" к "алгебре"). Координатное кольцо аффинного алгебраического множества – примеры. Простейшие свойства ((не)приводимость,

приведенность). Проективное пространство и проективное замыкание замкнутого алгебраического множества.

Гомоморфизм колец, его ядро и образ. Идеал аффинного алгебраического множества. Определение координатного кольца. Радикал идеала. Теорема Гильберта о нулях (без доказательства). Отображение (=морфизм) аффинных алгебраических множеств и их изоморфизм. Примеры. Аффинное алгебраическое многообразие. Представление о бирациональном изоморфизме.

Расширение понятия линейной комбинации. Системы образующих и "базисы". "Несвободное" порождение, понятие о сизигии (примеры). Представление о модуле над коммутативным кольцом как о понятии, обобщающем векторное пространство. Теорема Гильберта о базисе (без доказательства). Понятие об условиях конечности в кольцах.

"Базис Грёбнера": мотивировка и определение. Достоинства и недостатки (рассмотрение примеров). Простейший алгоритм вычисления базиса Грёбнера и обзор некоторых его модификаций.

Применения базисов Грёбнера. Тест совместности системы алгебраических уравнений.

Сумма, произведение и пересечение идеалов. Неприводимые компоненты алгебраического множества. Геометрические примеры. Отступление: топология Зариского. Замыкание подмножества по Зарискому (примеры с рисунками). Общее представление о задачах планирования движения.

## **Тема 2. Модули над коммутативными кольцами**

Модуль, подмодуль, фактормодуль. Примеры. Теорема о гомоморфизме для модулей. Модуль как понятие, объединяющее кольцо, идеал и факторкольцо. Некоторые операции над модулями. Геометрические примеры (декартово произведение, слой морфизма алгебраических многообразий).

## **Тема 3. Область целостности и её поле частных. Первое представление о теории размерности. Неособые многообразия и регулярные кольца**

Определения, примеры. Рациональная параметризация алгебраической кривой. Рациональные и нерациональные кривые (примеры). Эллиптическая кривая как пример нерациональной кривой. Бирациональные изоморфизмы (примеры). Понятие о проблеме рациональности и задачах бирациональной классификации. Понятие о групповой структуре на эллиптической кривой и роли эллиптических кривых в криптографии.

Область целостности и её поле частных. Поле рациональных функций замкнутого неприводимого алгебраического множества. *При наличии времени*: Размерность Крулля нётерова кольца. Трансцендентное расширение поля. Понятие об алгебраической зависимости элементов над полем. Трансцендентная размерность трансцендентного расширения поля. Размерность алгебраического многообразия. Примеры.

Понятие регулярного локального кольца (*при наличии времени*). Касательное пространство в точке алгебраического множества. Неособое (в точке) алгебраическое многообразие. Связь размерностей алгебраического множества и касательного пространства в неособой точке этого алгебраического множества.

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Кокс Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы: Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер. с англ. / Кокс Д., Литтл Дж., О, Ши Д. - М.: Мир, 2000. - 687с.

2. Тимофеева Н.В. Линейная алгебра. Современная алгебра - Ярославль: ЯрГУ, 2012.

<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120204.pdf>

### **б) дополнительная литература**

1. М. Атья, И. Макдональд Введение в коммутативную алгебру – М.: Мир, 1972.

2. Тимофеева Н.В. Алгебраические структуры - Ярославль: ЯрГУ, 2021. Ч. 1

3. Винберг Э. Б. Курс алгебры: учебник — М.: Факториал, 1999

4. Зуланке Р. Алгебра и геометрия: учебник. Том 2: Модули и алгебры — Москва: МЦНМО, 2008.
5. Медведева Л. Б. Введение в алгебраическую геометрию - Ярославль: ЯрГУ, 1987.
6. Рид М. Алгебраическая геометрия для всех - М.: Мир, 1991.
7. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. / И. Р. Шафаревич - 3-е изд., доп. - М.: МЦНМО, 2007. - 588 с.
8. Cox D., Little J., O'Shea D. Using Algebraic Geometry, 2<sup>nd</sup> ed., Graduate texts in Math, vol.185, Springer, 2004.  
<https://djvu.online/file/jwTY9oNhPWp1?ysclid=lip3mh9i5156181218>
9. Gallian J. Contemporary Abstract Algebra. Cengage Learning, 2010.  
<https://djvu.online/file/E2gpfrHdFjRgr?ysclid=lip3b6ug88975974882>
10. Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry, Graduate texts in Math, vol.150. <https://www.math.ens.psl.eu/~benoist/refs/Eisenbud.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

Профессор кафедры АМЛ, доктор ф.-м. наук

Н.В. Тимофеева

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задание для самостоятельной работы к теме № 1 (проверка сформированности ПК-3, индикаторы И-ПК-3.1, 3.2, 3.3):** в него входят задача 1 (3 пункта), задача 6 (1 пункт) и 3 задачи, аналогичные остальным задачам приведённого ниже списка. Неполные решения задачи, а также решения, содержащие ошибки, оцениваются неполным числом баллов.

Задачи, аналогичные задачам этого списка, входят в домашние задания. Домашние задания носят обучающий характер и обсуждаются на практических занятиях. Оценки за них не выставляются.

1. Составляют ли алгебры 1) над полем действительных чисел: а) вещественные полиномы от одной переменной? б) вещественные полиномы от двух переменных? в) вещественные полиномы от переменных, занумерованных натуральными числами? г) вещественные полиномы от двух переменных, имеющие чётные степени? Нечётные степени? д) целочисленные полиномы от одной переменной? е) комплексные числа? ж) комплексные полиномы от фиксированного набора переменных? з) кватернионы? 2) над полем комплексных чисел а) комплексные полиномы от любого фиксированного набора переменных? б) формальные степенные ряды от одной переменной с комплексными коэффициентами? (10 баллов)

2. Составляют ли подалгебру / идеал классы полиномов, кратных  $x$ , в факторкольце  $k[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$ ? (5 баллов)

3. Выполните действия в предложенном факторкольце кольца полиномов; в качестве ответа укажите представитель смежного класса, имеющий наименьшую степень. (5 баллов)

4. Охарактеризуйте группы обратимых элементов в кольцах задачи 1. (10 баллов)

5. Есть ли ненулевые делители нуля / нильпотенты в данных факторкольцах (даётся список из 3 примеров)? (3 балла)

6. Дайте алгебраическую версию отображений алгебраических множеств (гомоморфизм координатных колец)

1) проектирование плоскости на ось абсцисс параллельно оси ординат;

2) проектирование плоскости на ось абсцисс параллельно биссектрисе 1 и 3 координатной четвертей;

3) проектирование плоскости на биссектрису 2 и 4 четвертей параллельно оси ординат;

4) вложение эллипса, заданного каноническим уравнением, в содержащую его плоскость. (8 баллов)

7. Расклассифицируйте данные алгебраические множества (3 множества) по признаку неприводимости, используя простоту / непростоту определяющих их идеалов. (6 баллов)

8. Укажите какую-нибудь систему образующих образа идеала  $(x^2, x + y, y^2)$  в факторкольце  $k[x, y]/(x - y)$ . Можно ли задать этот образ двумя образующими? Одной образующей? То же самое для образов идеалов  $(x^2, y^2)$ ,  $(x^2, x + y)$ . (5 баллов)

9. Укажите, какие из данных алгебраических множеств совпадают, а какие различны (указаны их уравнения). Какие из различных алгебраических множеств изоморфны? Бирационально изоморфны? (6 баллов)

Зачётный минимум -- 60% от суммы баллов за задание для самостоятельной работы.

**Домашнее задание к теме № 2** (обсуждается на занятии после выполнения студентами дома; оценки не выставляются)

1. Дано проектирование множества  $X$ , определенного уравнением  $x^2 - y^2 = 0$ , на множество  $Y$ , представляющего собой ось абсцисс. Является ли координатное кольцо  $A(X)$  свободным  $A(Y)$ -модулем?

2. Рассмотрите слои отображения, описанного в задаче 1. Опишите их координатные кольца.

5. См. источник [Атья], гл.2, задача 7.

**Задание для самостоятельной работы к теме № 3 (проверка сформированности ПК-3, индикаторы И-ПК-3.1, 3.2):** в него входят две задачи, аналогичные задачам 1--4, задача 5 (2 пункта), из приведённого ниже списка. Неполные решения задачи, а также решения, содержащие ошибки, оцениваются неполным числом баллов.

Задачи, аналогичные задачам этого списка, входят в домашние задания. Домашние задания носят обучающий характер и обсуждаются на практических занятиях. Оценки за них не выставляются.

1. См. источник [Шафаревич], гл.1, задачи к §1. задача 6. (5 баллов)

2. См. источник [Шафаревич], гл.1, задачи к §1. задача 10. (5 баллов)

3. См. источник [Шафаревич], гл.1, задачи к §4. задача 3. (5 баллов)

4. См. источник [Шафаревич], гл.2, задачи к §1. задача 14. (5 баллов)

5. Опишите касательное пространство данного многообразия в данной точке: а)  $y = 0$  в аффинной плоскости переменных  $x, y$ , в начале координат, в произвольной точке; б)  $y - x^2 = 0$  в аффинной плоскости переменных  $x, y$ , в начале координат; в)  $x^2 + y^2 = 0$  в аффинной плоскости переменных  $x, y$ , в начале координат. Поле коэффициентов считайте алгебраически замкнутым. (9 баллов)

Зачётный минимум 60%

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

**Зачёт** выставляется по итогам выполнения заданий для самостоятельной работы.



## **Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Курс «Введение в коммутативную алгебру и элементы алгебраической геометрии» является, с одной стороны, ознакомительным и охватывает сравнительно несложные темы, а с другой – богат направлениями возможного роста и развития. Курс очень разнообразен и насыщен внутренними связями и параллелями. Многие сюжеты устроены таким образом, что имеют естественные продолжения в абстрактной алгебре, алгебраической геометрии, бирациональной геометрии, комплексной геометрии, вычислительной алгебре и геометрии (и являются полигоном для компьютерных вычислений и исследований в этой области). Эти продолжения давно выросли в самостоятельные ветви математического знания и в настоящее время продолжают плодотворно развиваться. Поэтому курс требует от студента готовности постоянно попадать в новые мыслительные ситуации и находить структурные аналогии, а также немалой любознательности.

Большая часть материала предназначена к изложению в интерактивном режиме. Традиционный лекционный монолог разбавляется гипотезами студентов, их предложениями по разрешению предложенных проблемных ситуаций, обсуждениями, небольшими отрезками времени на самостоятельную проверку гипотез. При изучении теории необходим разбор студентом лекционного материала дома с применением литературы и выделением мест, требующих пояснения при следующем контакте с преподавателем на занятиях и консультациях. Вопросы можно задавать очно либо с использованием форума в LMS Moodle. Там же размещён и список литературы и вспомогательные материалы по темам курса. Задачный материал часто непосредственно включён в линию повествования. Часть задач выносится в домашние задания.