

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ П.Г. ДЕМИДОВА  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С. И. ЯБЛОКОВА

ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ  
"АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"  
Часть 1

*Рекомендовано редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия по специальностям  
"Математика" и "Компьютерная безопасность"*

ЯРОСЛАВЛЬ 2002

ЧИТ. ЗАЛ

254909

ББК В 151.5 я 73  
Я 14

Рецензенты: кафедра геометрии ЯГПУ,  
доктор пед. наук, профессор кафедры алгебры ЯГПУ Ястребов А.В.

Я 14 Яблокова С.И. Лекции по курсу "Аналитическая геометрия".  
Часть 1: Учебное пособие / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2002.  
108 с.

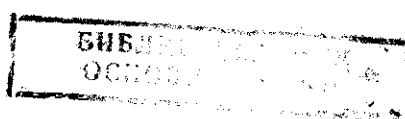
ISBN 5 - 8397 - 0209 - 9

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса, обучающихся по специальностям 010100 – "Математика" и 075200 – "Компьютерная безопасность". В первую часть вошли вопросы векторной алгебры, линейные образы на плоскости и в пространстве и преобразования координат.

Рис. 52. Библиогр. : 10 назв.

ISBN 5 - 8397 - 0209 - 9

© Ярославский государственный  
университет им. П.Г. Демидова,  
математический факультет, 2002  
© С.И. Яблокова, 2002



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит лекции по курсу "Аналитическая геометрия," изучаемому студентами первого курса университетов специальности 010100 — "Математика". Автор читает лекции по этой дисциплине на математическом факультете ЯрГУ имени П.Г.Демидова с 1985 года. Весь материал курса разбит на несколько частей, издание которых предполагается осуществить в течение 2 – 3 лет.

В первой части, излагаемой в данном пособии, рассматриваются вопросы векторной алгебры трехмерного пространства и линейные образы на плоскости и в пространстве. Весь излагаемый материал разбит на части, называемые лекциями. Это не означает, что каждая часть занимает при живом изложении в точности одну аудиторную лекцию. Скорее, каждая лекция в данном пособии — это одна тема курса, включающая в себя подход к основному вопросу темы, разбор этого вопроса и приложения. В качестве приложений разбираются различные задачи, решение которых служит иллюстрацией к введенным понятиям и теоремам.

Введение посвящено историческому обзору, в котором прослеживаются основные этапы развития геометрии (от Евклида до Декарта и Эйлера) и дается определение аналитического метода.

Первый раздел пособия — материал для самостоятельного изучения, куда включены вопросы, частично знакомые студентам по школьному курсу математики, но излагаемые языком высшей математики. Эти вопросы могут быть изучены студентами самостоятельно. Порядок изложения материала в целом соответствует рабочей учебной программе курса "Аналитическая геометрия". Нумерация формул осуществляется заново в каждом подпункте, а рисунков — в рамках каждой лекции. При ссылках указывается номер лекции (или подпункта) и номер рисунка (формулы).

Автор выражает благодарность заведующему кафедрой алгебры и математической логики профессору Л.С.Казарину, прочитавшему рукопись, за ценные советы и предложения.

## ВВЕДЕНИЕ

Геометрия возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. Необходимо было научиться измерять длины, площади, объемы, решать задачи, связанные со взаимным расположением одних объектов относительно других.

У математиков Древней Греции уже была упорядоченная система плоской геометрии, в которой в полном объеме применялся принцип логического заключения от одного утверждения к другому. Греческими математиками были заложены основы аксиоматического подхода к геометрии, на что указывают и знаменитые 13 книг "Начал" (Stoicheia) Евклида и книга с тем же названием, приписываемая Гиппократу. Ионийский философ Гиппократ, живший в V веке до н.э., исследовал площади плоских фигур, ограниченных как прямыми линиями, так и дугами окружности. Гиппократу уже известна теорема Пифагора, а также соответствующее неравенство для прямоугольных треугольников. Весь его трактат уже можно было бы отнести к евклидовой традиции, если бы он не был старше Евклида более чем на столетие.

Три знаменитые "математические проблемы античности" (трисекция угла, удвоение куба и квадратура круга) послужили толчком для развития новых областей математики. В связи с ними были открыты конические сечения, некоторые кривые третьего и четвертого порядка.

Евклиду (III век до н.э.) приписывают еще один трактат, который назывался "Данные" (Data) и содержал то, что современная математика назвала бы приложением алгебры к геометрии, но все изложено строго геометрическим языком.

Перу Архимеда (287 - 212 гг. до н.э.) принадлежит книга "О коноидах и сфероидах", в которой вычислены объемы некоторых тел, образованных вращением кривых второго порядка. Другой великий математик эпохи эллинизма Аполлоний (262 - 190 гг. до н.э.) написал трактат из 8 книг о конических сечениях ("О кониках"). Это книги об эллипсе, гиперболе и параболе, определяемых как сечения кругового конуса. Аполлоний не располагал алгебраическими обозначениями, однако многие его результаты можно сразу записать на языке координат, которым пользуется современная геометрия. Можно сказать, что Аполлоний предпринял попытку изучения геометрических мест точек с помощью их уравнений на примере конических сечений.

В своем труде "Катоптрика" (теория зеркал) Евклид показал, как ведут себя лучи света при отражении от плоских, выпуклых и вогнутых зеркал. Об отражении света от зеркал различной формы было написано великое множество работ. Архимед, Герон, Аполлоний, Диоклес посвятили этому вопросу свои книги. Аполлонию было известно, а в книге Диоклеса "О зажигательных зеркалах" (ок. 190 г. до н.э.) содержалось доказательство, что параболическое зеркало (сферический сегмент параболоида вращения, образованного вращением параболы вокруг ее оси), отражая свет от источника света, помещенного в его фокусе, собирает лучи в пучок, параллельный оси зеркала. Наоборот, если пучок падающих лучей направить параллельно оси параболического зеркала, то после отражения лучи соберутся в фокусе. Собранные в фокусе солнечные лучи вызывают резкий разогрев и способны зажечь помещенный в фокусе горючий материал. По преданию, Архимед, воспользовавшись этим свойством зажигательных зеркал, сконцентрировал солнечные лучи на римских судах, блокировавших с моря его родной город Сиракузы, и поджег неприятельский флот. Аполлонию были известны отражательные свойства и других конических сечений.

Запросы ирригации и сельского хозяйства в целом, а также мореплавания, обеспечили астрономии одно из первых мест в науке древнего мира. Возникла задача определения положения одних небесных светил относительно других при помощи чисел. В Месопотамии в позднеассирийскую эпоху наблюдения за движением небесных светил дали возможность определять положение планет солнечной системы для различных значений времени.

В III веке до н.э. Тимохарис и Аристилл определяли положение главных звезд при помощи измерений их расстояния от некоторых постоянных точек небесного свода. Гиппарх (II век до н.э.) и Птолемей (II век) знали способ определения положения точек на земной поверхности при помощи чисел (широты и долготы) астрономическими средствами.

Способ определения положения одних геометрических образов относительно других при помощи чисел называется в геометрии методом координат. Тот геометрический образ, относительно

которого определяется положение другого геометрического образа, называется системой координат, а числа, определяющие положение геометрического образа, называются координатами.

Однако отсутствие алгебраических обозначений, неуклюжий геометрический способ выражения получаемых результатов затормозили развитие геометрии на долгое время. В 1494 г. выходит книга францисканского монаха Луки Пачоли "Сумма арифметики". Она содержала все, что тогда знали по арифметике, алгебре и тригонометрии. Но самое ценное в этой книге то, что автор пользуется символьной записью уравнений.

В XVI веке итальянская школа математиков достигла замечательных результатов в области алгебры и вопросах решения уравнений. Стремительное развитие математики в эпоху Возрождения обусловлено развитием и усовершенствованием машин. При конструировании механизмов появляется необходимость рассчитывать движение его отдельных частей по линиям и поверхностям. Перед геометрией была поставлена задача изучения различных траекторий движущихся точек. Опубликование трудов Герона и Архимеда в XVI веке способствовало такого рода исследованиям. Особое значение имело издание Архимеда, которое появилось в 1558 году и сделало доступным для математиков античный интегральный метод. Ф.Коммандино, выполнивший перевод книги Архимеда на итальянский язык, применил эти методы для вычисления центров тяжести. Вычисление центров тяжести стало любимым предметом у изучавших Архимеда. Среди последователей Архимеда выдающееся место занимают Симон Стевин, который написал работы о центрах тяжести по гидравлике (1586 г.), Лука Валерио, создавший работы о центрах тяжести (1604 г.) и о квадратуре параболы (1606 г.), и Пауль Гульдин, в сочинении которого "Центробарика" (1641 г.) содержится теорема Гульдина о телах вращения.

Вслед за этими работами появились великие творения Кеплера (1571 - 1630 гг.), с именем которого, как и с именами Коперника (1473 - 1542 гг.) и Галилея (1564 - 1642 гг.), связана революция в астрономии. Кеплер отважился даже на вычисление объемов ради самого этого вычисления и в своей "Стереометрии винных бочек" (1615 г.) он вычислял объемы тел, получающихся при вращении конических сечений вокруг оси, лежащей с ними в одной плоскости. Книга Галилео Галилея "Беседы" (1638 г.) содержала параболическую орбиту снаряда, таблицы для высоты и дальности в зависимости от угла возвышения и заданной начальной скорости.

Однако синтетический метод, при помощи которого проводилось изучение геометрических образов в элементарной геометрии, оказался недостаточным для изучения траекторий движущихся точек. И вот в XVII веке появляется новый подход к геометрии. Этим мы обязаны великому французскому философу, физiku, физиологу и математику Рене Декарту (1596 - 1650 гг.). Вместе с многими другими великими мыслителями XVII века Декарт искал общий метод мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. Так как единственной наукой о природе, обладавшей в известной мере систематическим строением, была тогда механика, а ключ к пониманию механики давала математика, то математика стала наиболее важным средством для понимания вселенной. Более того, математика сама была блестящим примером того, что в науке можно найти истину. В качестве приложения к "Рассуждению о методе", в котором Декарт излагал свой рационалистический подход к изучению природы, он опубликовал небольшую книгу "Геометрия" (1637 г.) как пример своего общего метода объединения, в данном случае объединения алгебры и геометрии. "Геометрия" включала в алгебру всю область классической геометрии.

Заслуга Декарта состоит в создании *аналитической геометрии*, хотя сама "Геометрия" не является первым трактатом по этому предмету. Там нет "декартовых осей", не выведены уравнения прямой линии и конических сечений. Более того, значительная часть книги представляет собой теорию алгебраических уравнений.

Аполлоний определил конические сечения с помощью того, что сейчас мы называем координатами, хотя числовых значений они не имели. Широта и долгота в "Географии" Птолемея были уже числовыми координатами. Даже графическое представление встречается до Декарта. Заслуга Декарта состоит в том, что он последовательно применил хорошо развитую алгебру начала XVII века к геометрическому анализу древних и таким образом расширил область ее применения.

И хотя в книге Декарта не следует искать нашей современной аналитической геометрии, тем не менее именно его считают основоположником этого раздела математики.

Знаменательно, что в своей книге Рене Декарт написал:

"И я надеюсь, что наши потомки будут благодарны мне не только за то, что я здесь разъяснил, но и за то, что мною было опущено с целью предоставить им удовольствие самим найти это ..."

Несколько ближе к аналитической геометрии подошел Пьер Ферма (1601 - 1661 гг.), юрист из Тулузы, который написал небольшую работу по геометрии "Введение" (Isagoge), опубликованную в 1679 г. В этой книге есть некоторые уравнения для прямых линий и конических сечений относительно некоторой системы (обычно перпендикулярных) осей. К тому времени, когда было напечатано "Введение" Ферма, появились другие работы, в которых алгебра была применена к результатам Аполлония, — прежде всего книга Джона Валлиса "Трактат о конических сечениях" (Tractatus de Sectionibus conicis, 1655 г.) и, частично, написанные Иоганном де Виттом "Основы кривых линий" (Elementa curvarum linearum, 1659 г.). Оба труда создавались под прямым влиянием Декарта. Однако прогресс шел очень медленно, и даже в книге Лопиталья "Аналитический трактат о конических сечениях" (Traité analytique des Sections coniques, 1707 г.) можно найти немногим больше, чем перевод Аполлония на язык алгебры. Все эти авторы не решались допускать отрицательные значения для координат. Первым, кто смело обращался с алгебраическими уравнениями, был Ньютон (1643 - 1727 гг.) в своем исследовании кривых третьего порядка, которое называлось "Перечисление линий третьего порядка" (1703 г.). Ньютон дал классификацию плоских кривых третьей степени на 72 вида, исходя из своей теоремы о том, что каждую кубическую кривую можно получить из "расходящейся параболы"  $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$  при центральном проектировании одной плоскости на другую. Это было первым важным новым результатом, полученным путем применения алгебры к геометрии, так как все предыдущие работы были просто переводом Аполлония на алгебраический язык.

Первую аналитическую геометрию конических сечений, вполне освободившуюся от Аполлония, мы находим только во "Введении" (1748 г.) Леонарда Эйлера (1707 - 1783 гг.). Исследование кривых и поверхностей с помощью их уравнений ведется настолько свободно, что "Введение" можно рассматривать как первый учебник аналитической геометрии.

Новый этап в развитии геометрии связан с именем французского математика Гаспара Монжа (1746 - 1818 гг.), директора Политехнической школы — высшего учебного заведения Парижа. Он развивал особую область геометрии — начертательную геометрию. В начертательной геометрии Монжа содержался зародыш проективной геометрии, а его мастерство в применении алгебраических и аналитических методов в теории кривых и поверхностей содействовало развитию аналитической и дифференциальной геометрии. Аналитическую геометрию конических сечений и поверхностей второго порядка развивали Жан Ашетт (1769 - 1834 гг.) и Жан Батист Био (1774 - 1862 гг.). В "Опыте аналитической геометрии" (1802 г.) Био мы можем распознать наш современный учебник аналитической геометрии. Ученик Монжа Шарль Дюпен применял методы своего учителя в теории поверхностей, где он нашел асимптотические и сопряженные линии.

Итак, аналитический метод состоит в последовательном применении алгебры к изучению различных геометрических образов.

Всякая линия на плоскости рассматривается как геометрическое место точек, обладающих некоторым общим свойством. Если каждой точке поставить в соответствие пару чисел — ее координаты  $(x, y)$ , то общее свойство всех точек геометрического места позволяет связать координаты  $x$  и  $y$  уравнением  $F(x, y) = 0$ . Аналогично, поверхность рассматривается как геометрическое место точек пространства, обладающих общим свойством, которое после введения координат  $x, y, z$  точек записывается уравнением  $F(x, y, z) = 0$ .

И обратно, всякому уравнению  $F(x, y) = 0$  ( $F(x, y, z) = 0$ ) в некоторой системе координат ставится в соответствие геометрическое место точек плоскости (пространства), координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Т.е. в аналитической геометрии методами алгебры исследуются кривые и поверхности, задаваемые алгебраическими уравнениями. В основе этого раздела математики лежит метод координат.

## МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

"Что такое точка пространства? Все думают, что знают это, но это только иллюзия..."

(Анри Пуанкаре "Наука и гипотеза")

### 0.1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ

Прямую линию с указанным на ней направлением будем называть *осью*. Отрезок на оси называется *направленным*, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая – концом. Направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  будем обозначать  $\overrightarrow{AB}$ .

*Нулевой направленный отрезок* – это отрезок, у которого начало и конец совпадают.

С каждым направленным отрезком оси сопоставляется его числовая характеристика – *величина направленного отрезка*.

**Определение 1.** *Величиной  $AB$  направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  называется число, равное длине отрезка  $\overrightarrow{AB}$ , взятой со знаком плюс, если направление отрезка  $\overrightarrow{AB}$  совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление  $\overrightarrow{AB}$  противоположно направлению оси.*

Величины всех нулевых направленных отрезков будем считать равными нулю.

**Определение 2.** Два ненулевых направленных отрезка называются *равными*, если при совмещении начал этих отрезков совпадают и их концы (совмещать отрезки мы будем, перемещая их вдоль оси, на которой они лежат, сохраняя при этом их длину и направление).

Любые два нулевых направленных отрезка считаются равными.

Очевидно, направленные отрезки равны тогда и только тогда, когда равны величины этих отрезков.

*Линейные операции* над направленными отрезками – это операция сложения таких отрезков и операция умножения направленного отрезка на вещественное число.

**Определение 3.** Для определения *суммы* направленных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  совместим начало  $C$  отрезка  $\overrightarrow{CD}$  с концом  $B$  отрезка  $\overrightarrow{AB}$ . Полученный при этом направленный отрезок  $\overrightarrow{AD}$  называется *суммой* направленных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  и обозначается  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .

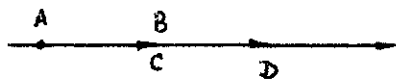


Рис. 1

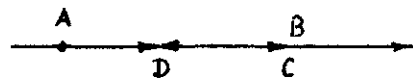


Рис. 2

**Определение 4.** *Произведением направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на вещественное число  $\alpha$  называется направленный отрезок, обозначаемый  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ , длина которого равна произведению числа  $|\alpha|$  на длину отрезка  $\overrightarrow{AB}$  и направление которого совпадает с направлением отрезка  $\overrightarrow{AB}$  при  $\alpha > 0$  и противоположно направлению  $\overrightarrow{AB}$  при  $\alpha < 0$ .*

Очевидно, величина направленного отрезка  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$  равна  $\alpha \cdot AB$ .

**Теорема 1.** *Величина суммы направленных отрезков равна сумме величин слагаемых отрезков.*

*Доказательство.* Если хотя бы один из направленных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  является нулевым, то сумма  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$  совпадает со вторым отрезком, и утверждение теоремы справедливо. Пусть оба отрезка  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  ненулевые. Совместим начало  $C$  отрезка  $\overrightarrow{CD}$  с концом  $B$  отрезка  $\overrightarrow{AB}$ , тогда  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ . Нужно доказать справедливость равенства  $AB + CD = AD$ .

Пусть направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  одинаково направлены. В этом случае длина отрезка  $\overrightarrow{AD}$  равна сумме длин отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ . Направление отрезка  $\overrightarrow{AD}$  совпадает с направлением каждого из отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , поэтому равенство  $AB + CD = AD$  справедливо.

Пусть отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  направлены в противоположные стороны. В этом случае величины  $AB$  и  $CD$  имеют разные знаки, поэтому длина отрезка  $\overrightarrow{AD}$  равна  $|AB + CD|$ . Направление отрезка  $\overrightarrow{AD}$  совпадает с направлением наибольшего по длине из отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , значит, знак величины  $AD$  совпадает со знаком числа  $AB + CD$ , т.е. также справедливо  $AD = AB + CD$ . Теорема доказана.

**Следствие (основное тождество).** При любом расположении точек  $A, B, C$  на числовой оси величины направленных отрезков  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AC}$  удовлетворяют соотношению

$$AB + BC = AC.$$

Введем декартовы координаты на прямой. Выберем на прямой определенное направление (т.е. сделаем ее осью) и некоторую точку  $O$  (начало координат), кроме того, укажем единицу масштаба. Рассмотрим произвольную точку  $M$  на прямой.

**Определение 5.** Декартовой координатой  $x$  точки  $M$  называется величина направленного отрезка  $\overrightarrow{OM}$ .

Обозначение  $M(x)$ .

Таким образом, любой точке нашей прямой ставится в соответствие определенное вещественное число.

**Теорема 2.** Пусть  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  – две произвольные точки оси. Величина  $M_1M_2$  направленного отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  равна  $x_2 - x_1$ , т.е.

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

*Доказательство.* Рассмотрим на оси три точки  $O, M_1$  и  $M_2$ . По следствию из теоремы 1 (основному тождеству) справедливо

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

но  $OM_1 = x_1$ ,  $OM_2 = x_2$ , поэтому

$$x_1 + M_1M_2 = x_2,$$

откуда

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

**Следствие.** Расстояние  $\text{dist}(M_1, M_2)$  между точками  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  оси может быть найдено по формуле

$$\text{dist}(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|.$$

## 0.2. ДЕКАРТОВА ПЛОСКОСТЬ

Две перпендикулярные оси на плоскости с общим началом и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат на плоскости. Одну из осей называют осью  $Ox$ , или осью абсцисс, другую – осью  $Oy$ , или осью ординат. Эти оси также называют координатными осями.

**Определение 1.** Обозначим через  $M_x$  и  $M_y$  соответственно проекции произвольной точки  $M$  плоскости на оси  $Ox$  и  $Oy$ . Декартовыми прямоугольными координатами  $x$  и  $y$  точки  $M$  называются соответственно величины направленных отрезков  $\overrightarrow{OM_x}$  и  $\overrightarrow{OM_y}$ .

Таким образом,  $x = OM_x$ ,  $y = OM_y$ . Декартовы координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  называются соответственно ее абсциссой и ординатой. Обозначение:  $M(x, y)$ .

Каждой точке плоскости мы поставили в соответствие пару вещественных чисел  $(x, y)$  – ее прямоугольные декартовы координаты, причем разным точкам, очевидно, отвечают разные пары



чисел. Обратно, для произвольной пары вещественных чисел  $x$  и  $y$  найдется единственная точка  $M$  на плоскости, для которой  $x$  является абсциссой, а  $y$  – ординатой. Действительно, легко построить эту точку: на оси  $Ox$  возьмем точку  $M_x$  на расстоянии  $|x|$  от начала координат, лежащую правее точки  $O$  (в направлении, задаваемом осью  $Ox$ ), если  $x > 0$ , и левее точки  $O$  (в противоположном направлении), если  $x < 0$ . На оси  $Oy$  возьмем точку  $M_y$  на расстоянии  $|y|$  от начала координат, причем откладываем отрезок  $\overrightarrow{OM_y}$  так, что его направление совпадает с направлением оси  $Oy$ , если  $y > 0$ , и противоположно направлению  $Oy$ , если  $y < 0$ . Через точку  $M_x$  проведем прямую, параллельную оси  $Oy$ , через точку  $M_y$  проведем прямую, параллельную оси  $Ox$ . Эти две прямые пересекутся в некоторой точке  $M$ , абсцисса которой равна  $x$ , а ордината равна  $y$ .

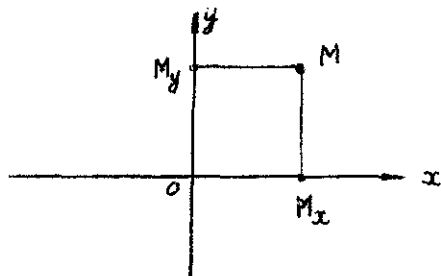


Рис. 3

**Определение 2.** Рассмотрим на плоскости направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$  и ось  $u$ . Пусть  $A_u$  и  $B_u$  – основание перпендикуляров, опущенных из концов отрезка, точек  $A$  и  $B$  на ось  $u$ . Проекцией направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $u$  называется величина направленного отрезка  $\overrightarrow{A_u B_u}$  оси  $u$ . Обозначается проекция символом  $pr_u \overrightarrow{AB}$ .

Углом наклона направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  к оси  $u$  назовем угол между двумя, выходящими из произвольной точки плоскости, лучами, один из которых имеет направление  $\overrightarrow{AB}$ , а другой – направление оси  $u$ . Очевидно, угол наклона не зависит от точки приложения лучей. Очевидно также, что этот угол не изменится, если ось  $u$  заменить любой параллельной и сонаправленной осью.

**Теорема.** Проекция направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $u$  равна произведению длины отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на косинус угла наклона  $\overrightarrow{AB}$  к оси  $u$ , т.е.

$$pr_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi, \quad \text{где } \varphi = (\overrightarrow{AB} \sim u).$$

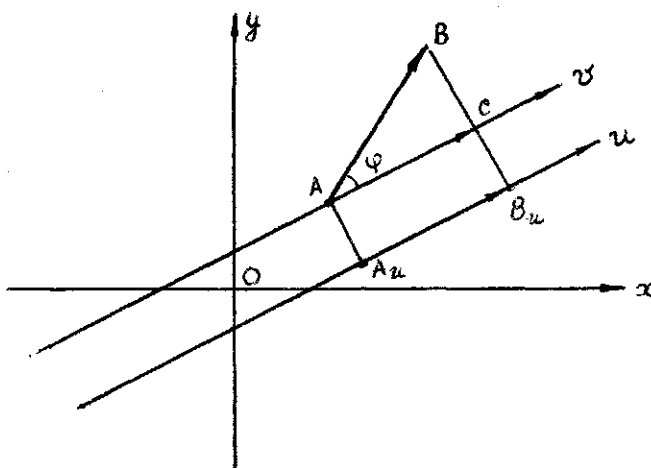


Рис. 4

**Доказательство.** Пусть  $v$  – ось, параллельная оси  $u$ , одинаково с ней направленная, проходит через начало  $A$  направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$ . Очевидно, угол наклона  $\overrightarrow{AB}$  к оси  $u$  равен углу наклона

$\overrightarrow{AB}$  к оси  $v$ . Пусть  $\varphi = (\overrightarrow{AB}, v)$ . Через концы направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  проведем прямые, перпендикулярные оси  $u$  (а значит, и оси  $v$ ). Обозначим через  $A_u$  и  $B_u$  точки пересечения этих прямых с осью  $u$ , а  $A$  и  $C$  — точки пересечения с осью  $v$ .

Длины отрезков  $AC$  и  $A_uB_u$  равны, так как это отрезки, лежащие на параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми (перпендикулярными к оси  $u$ ). Направления  $AC$  и  $A_uB_u$  также совпадают, так как  $u$  и  $v$  одинаково направлены, значит,  $AC = A_uB_u$ . Но

$$AC = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

Далее,

$$pr_u \overrightarrow{AB} = A_uB_u = AC = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi,$$

что и доказывает теорему.

Если на оси  $u$  введены декартовы координаты точек  $A_u(u_1)$ ,  $B_u(u_2)$ , то проекция направленного отрезка  $\overrightarrow{AB}$  на ось  $u$ , очевидно, равна  $u_2 - u_1$ . Это следует из определения проекции и теоремы о выражении величины направленного отрезка через координаты его концов.

Пусть на плоскости, в которой введены прямоугольные декартовы координаты, даны две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Найдем расстояние между этими двумя точками, выразив его через координаты точек.

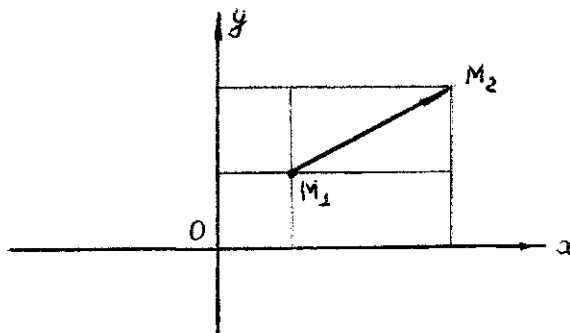


Рис. 5

Очевидно, расстояние  $dist(M_1, M_2)$  между точками  $M_1$  и  $M_2$ , равно длине направленного отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , равно также длине гипотенузы прямоугольного треугольника, стороны (катеты) которого параллельны координатным осям и проходят через точки  $M_1$  и  $M_2$ . Длина катета, параллельного оси  $Ox$ , равна абсолютной величине проекции отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  на ось  $Ox$ , т.е. равна  $|x_2 - x_1|$ . Аналогично, длина второго катета, параллельного оси  $Oy$ , равна абсолютной величине проекции отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  на ось  $Oy$ , т.е.  $|y_2 - y_1|$  (см. рис. 5). Пользуясь теоремой Пифагора, получаем

$$dist(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Прежде чем формулировать свойства проекции, вспомним определение суммы двух направленных отрезков. Мы знаем, что отрезок называется направленным или вектором, если указано, какая из его граничных точек является началом и какая — концом. Суммой двух направленных отрезков  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  (плоскости или пространства) называется направленный отрезок  $\overrightarrow{AD}$ , идущий из начала (точки  $A$ ) первого из слагаемых отрезков в конец (точку  $D$ ) второго отрезка при условии, что начало  $C$  второго отрезка совмещено с концом  $B$  первого.

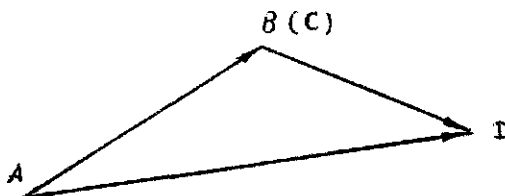


Рис. 6

**Свойства проекции:**

- (1)  $pr_u (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = pr_u \overrightarrow{AB} + pr_u \overrightarrow{BC}$  (проекция суммы направленных отрезков на ось равна сумме их проекций на эту ось);
- (2)  $pr_u \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha pr_u \overrightarrow{AB}$  для любого вещественного числа  $\alpha$ .

Докажем первое свойство.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Если на оси  $u$  ввести декартовы координаты, обозначая координаты проекций точек  $A, B, C$  на эту ось через  $x_1, x_2$  и  $x_3$  соответственно, то

$$pr_u \overrightarrow{AC} = x_3 - x_1, \quad pr_u \overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, \quad pr_u \overrightarrow{BC} = x_3 - x_2.$$

Тогда в силу  $x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1)$  получаем

$$pr_u (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = pr_u \overrightarrow{AB} + pr_u \overrightarrow{BC}$$

Второе свойство можно доказать, например, используя полученную выше теорему. Пусть  $\varphi = (\overrightarrow{AB} \wedge u)$ , так как по определению умножения направленного отрезка на вещественное число  $\alpha$  направленный отрезок  $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$  параллелен отрезку  $\overrightarrow{AB}$  и одинаково с ним направлен в случае  $\alpha > 0$  и противоположно направлен в случае  $\alpha < 0$ , то

$$\begin{aligned} \psi = (\alpha \cdot \overrightarrow{AB} \wedge u) &= \varphi \quad \text{при } \alpha > 0, \\ \psi = (\alpha \cdot \overrightarrow{AB} \wedge u) &= \pi + \varphi \quad \text{при } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$pr_u \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = |\alpha \cdot \overrightarrow{AB}| \cos \psi = |\alpha| |\overrightarrow{AB}| \cos \psi,$$

причем при  $\alpha > 0$   $|\alpha| \cos \psi = \alpha \cos \varphi$ ,

а при  $\alpha < 0$   $|\alpha| \cos \psi = |\alpha| \cos(\pi + \varphi) = -|\alpha| \cos \varphi = \alpha \cos \varphi$ . Таким образом,

$$pr_u \alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \alpha |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = \alpha pr_u \overrightarrow{AB}.$$

**Пример.** Найти центр и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами  $(-2, 5)$ ,  $(6, -3)$ ,  $(8, 5)$ .

*Решение.* Пусть  $x, y$  — координаты центра окружности  $O'$  и  $r$  — ее радиус. Тогда расстояние от точки  $O'$  до любой вершины треугольника равно радиусу, значит, выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} (-2 - x)^2 + (5 - y)^2 = r^2 \\ (6 - x)^2 + (-3 - y)^2 = r^2 \\ (8 - x)^2 + (5 - y)^2 = r^2. \end{cases}$$

Решим эту систему. Вычитая из второго и третьего равенств первое, получаем систему для вычисления координат центра окружности:

$$\begin{cases} (6 - x)^2 - (-2 - x)^2 + (-3 - y)^2 - (5 - y)^2 = 0 \\ (8 - x)^2 - (-2 - x)^2 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 8(4 - 2x) - 8(2 - 2y) = 0 \\ 10(6 - 2x) = 0. \end{cases}$$

Упростим систему:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2 = 0 \\ 6 - 2x = 0, \end{cases}$$

откуда  $x = 3, y = 2$ .

Итак, центр окружности находится в точке  $O'(3, 2)$ , значит, ее радиус равен

$$r = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

### 0.3. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве с общим началом  $O$  и одинаковой масштабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве. Одну из осей называют осью  $Ox$ , или осью абсцисс, другую – осью  $Oy$ , или осью ординат, третью – осью  $Oz$ , или осью аппликат.

Пусть  $M$  – произвольная точка пространства. Обозначим  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  ее проекции соответственно на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

**Определение.** Декартовыми прямоугольными координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $M$  называются соответственно величины направленных отрезков  $\overrightarrow{OM_x}$ ,  $\overrightarrow{OM_y}$  и  $\overrightarrow{OM_z}$ . Декартовы координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки  $M$  называются соответственно ее абсциссой, ординатой и аппликатой. Обозначение:  $M(x, y, z)$ .

Попарно взятые координатные оси располагаются в координатных плоскостях  $Oxy$ ,  $Oxz$  и  $Oyz$ . Эти плоскости разбивают пространство на 8 октантов.

Получим формулу для вычисления расстояния между двумя точками в пространстве, если известны координаты этих точек.

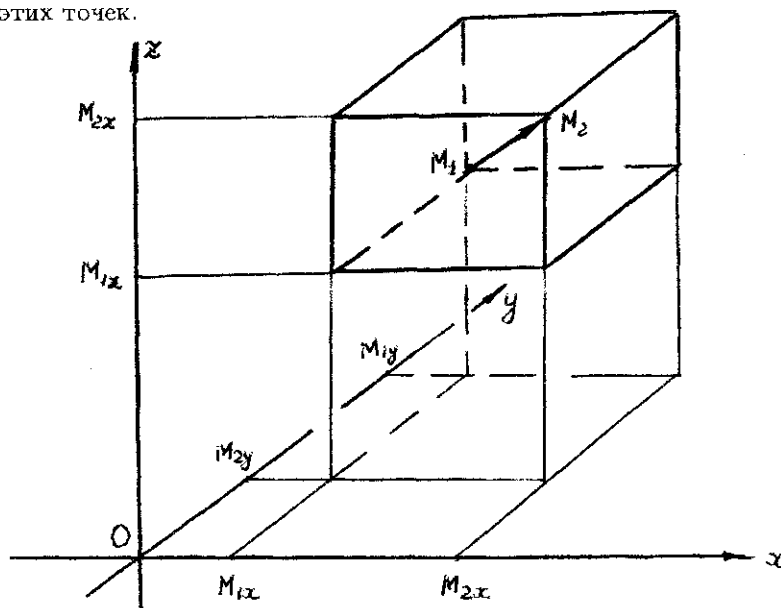


Рис. 7

Пусть даны две различные точки в пространстве  $M_1$  и  $M_2$ , заданные своими прямоугольными декартовыми координатами  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$ , равно длине направленного отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , равно также длине диагонали параллелепипеда, грани которого параллельны координатным плоскостям и проходят через точки  $M_1$  и  $M_2$ . Длина параллельного оси  $Ox$  ребра этого параллелепипеда равна, очевидно, абсолютной величине проекции отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  на ось  $Ox$ , т.е. равна  $|x_2 - x_1|$ . Длина параллельного оси  $Oy$  ребра параллелепипеда равна абсолютной величине проекции отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  на ось  $Oy$ , т.е.  $|y_2 - y_1|$ . Аналогично, длина ребра, параллельного оси  $Oz$ , равна  $|z_2 - z_1|$ . Так как рассматриваемый параллелепипед является прямоугольным (см. рис. 7), то по теореме Пифагора

$$\text{dist}(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

### 0.4. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Рассмотрим в пространстве две различные точки  $M_1$  и  $M_2$  и прямую, определяемую этими точками, т.е. прямую, проходящую через  $M_1$  и  $M_2$ . На этой прямой выберем направление и некоторую единицу масштаба. Таким образом, прямая становится осью. На полученной оси рассмотрим направленный отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$ . Пусть  $M$  – любая отличная от  $M_2$  точка указанной оси.

**Определение.** Число

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \quad (1)$$

называется *отношением*, в котором точка  $M$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

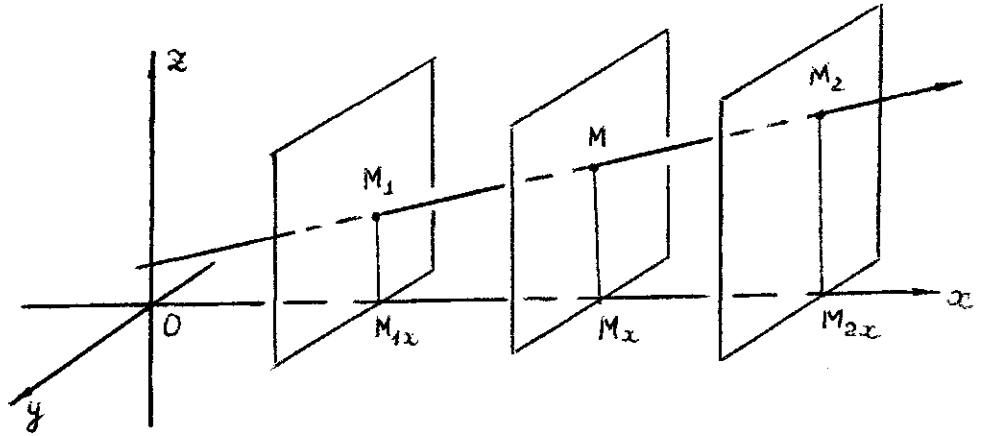


Рис. 8

Согласно определению это число равно отношению величины  $M_1M$  направленного отрезка  $\overrightarrow{M_1M}$  оси к величине  $MM_2$  направленного отрезка  $\overrightarrow{MM_2}$  той же оси. Для любой точки оси  $M$ , отличной от  $M_2$ , число (1) определяется однозначно.

Заметим, что отношение  $\lambda$ , в котором точка  $M$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , не зависит от направления оси. Действительно, если изменить направление на противоположное, то величины  $M_1M$  и  $MM_2$  одновременно изменят знак, поэтому знак их отношения (1) не изменится.

Число  $\lambda$  не зависит от выбора масштаба на оси. При изменении масштаба величины  $M_1M$  и  $MM_2$  умножатся на одно и то же число и, следовательно, их отношение (1) не изменится.

Заметим, что если бы мы не исключили возможность совпадения точки  $M$  с  $M_2$ , то в последнем случае получили бы  $MM_2 = 0$  и (1) не определено.

Наконец, для положительных значений  $\lambda$  точка  $M$  лежит между точками  $M_1$  и  $M_2$  (в этом случае направления отрезков  $\overrightarrow{M_1M}$  и  $\overrightarrow{MM_2}$  совпадают, а значит величины  $M_1M$  и  $MM_2$  одного знака), а для отрицательных  $\lambda$  точка  $M$  лежит вне отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  (направления отрезков  $\overrightarrow{M_1M}$  и  $\overrightarrow{MM_2}$  противоположны, а значит, и величины  $M_1M$  и  $MM_2$  имеют разные знаки).

Число  $\lambda$  может принимать любое действительное значение, кроме  $-1$ . Действительно, если точка  $M$  пробегает часть оси, лежащую вне отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  за точкой  $M_1$ , то  $\lambda$  меняется в промежутке  $(-1, 0)$ ; если  $M = M_1$  то, очевидно,  $\lambda = 0$ ; если  $M$  пробегает отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$  (не совпадая с  $M_2$ ), то  $\lambda$  меняется от 0 до  $+\infty$ ; наконец, если  $M$  пробегает часть оси, лежащую вне отрезка  $\overrightarrow{M_1M_2}$  за точкой  $M_2$ , то  $\lambda$  меняется в промежутке  $(-\infty, -1)$ .

Если бы  $\frac{M_1M}{MM_2} = -1$ , то  $M_1M = -MM_2$ , или  $M_1M + MM_2 = 0$ . Но  $M_1M + MM_2 = M_1M_2$ , значит  $M_1M_2 = 0$ , откуда немедленно следовало бы, что точки  $M_1$  и  $M_2$  совпадают, что противоречит выбору этих точек.

Рассмотрим задачу о вычислении координат точки  $M$ , делящей отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$  в отношении  $\lambda$ , если известны координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  и число  $\lambda \neq -1$ . Рассмотрим в пространстве прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$ , пусть в этой системе координат точки  $M_1$  и  $M_2$  имеют соответственно координаты  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$ . Координаты точки  $M$  обозначим  $(x, y, z)$ .

Спроектируем точки  $M_1$ ,  $M$  и  $M_2$  на ось координат. Пусть  $M_{1x}$ ,  $M_x$ ,  $M_{2x}$  есть проекции этих точек на ось  $Ox$ . Очевидно, точка  $M_x$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{M_{1x}M_{2x}}$  оси  $Ox$  в отношении  $\lambda$ , поэтому

$$\frac{M_{1x}M_x}{M_xM_{2x}} = \lambda. \quad (2)$$

Но

$$M_{1x}M_x = x - x_1, \quad M_xM_{2x} = x_2 - x,$$

значит, из соотношения (2) получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \text{или} \quad x - x_1 = \lambda (x_2 - x),$$

откуда

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2,$$

и

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Совершенно аналогично вычисляются координаты  $y$  и  $z$  точки  $M$ . В результате получаем

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Формулы (4) называются *формулами деления отрезка в данном отношении  $\lambda$* .

Если  $\lambda = 1$ , т.е.  $M_1M = MM_2$ , точка  $M$  делит отрезок  $\overrightarrow{M_1M_2}$  пополам. Получающиеся при этом из соотношений (4) формулы

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (5)$$

называются *формулами деления отрезка пополам*.

Наконец, из формул (4) видно, что  $\lambda \neq -1$ , иначе формулы не имеют смысла. Мы получили формулы деления отрезка в данном отношении  $\lambda$  в пространстве. Для плоскости рассуждения не изменятся и формулы, очевидно, примут вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

**Пример.** Три последовательные вершины трапеции находятся в точках  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(2, -2, 1)$ ,  $C(8, -4, 4)$ . Найти четвертую вершину  $D$  этой трапеции, точку  $M$  пересечения ее диагоналей и точку  $S$  пересечения продолжений боковых сторон, зная, что длина основания  $\overrightarrow{AD}$  равна 21.

*Решение.* Длина меньшего основания  $\overrightarrow{BC}$  равна

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(8-2)^2 + (-4+2)^2 + (4-1)^2} = 7,$$

т.е. основание  $\overrightarrow{AD}$  в три раза длиннее  $\overrightarrow{BC}$ , так как векторы  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BC}$  одинаково направлены, то

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}.$$

Поэтому можно найти координаты точки  $D$  (равные координатам вектора  $\overrightarrow{OD}$ )

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{BC} = (-1, 2, 3) + 3(6, -2, 3) = (17, -4, 12).$$

Треугольники  $AMD$  и  $BMC$  подобны с коэффициентом подобия 3, поэтому

$$\frac{AM}{MC} = 3.$$

Значит, по формулам (4) получаем

$$x = \frac{-1 + 3 \cdot 8}{1 + 3} = \frac{23}{4}, \quad y = \frac{2 + 3 \cdot (-4)}{1 + 3} = -\frac{10}{4}, \quad z = \frac{3 + 3 \cdot 4}{1 + 3} = \frac{15}{4}$$

– координаты точки  $M$ . Наконец, треугольники  $ASD$  и  $BSC$  подобны с тем же коэффициентом подобия 3, и так как  $S$  лежит вне отрезка  $\overrightarrow{AB}$ , то

$$\frac{AS}{SB} = -3,$$

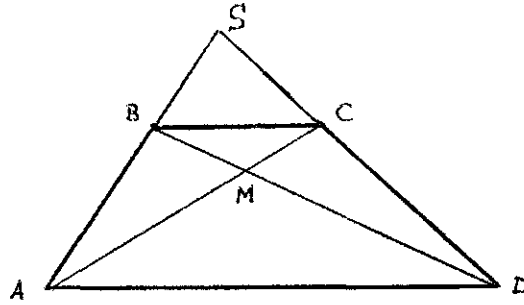


Рис. 9

откуда координаты точки  $S$  есть

$$x = \frac{-1 - 3 \cdot 2}{1 - 3} = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{2 - 3 \cdot (-2)}{1 - 3} = -4, \quad z = \frac{3 - 3 \cdot 1}{1 - 3} = 0.$$

Решим задачу о вычислении координат центра тяжести системы материальных точек. Пусть в пространстве заданы материальные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \dots, \quad M_n(x_n, y_n, z_n),$$

в которые помещены соответственно массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Мы хотим найти координаты центра тяжести этой системы.

Решая задачу, мы будем пользоваться двумя допущениями:  $m_1$  и  $m_2$  соответственно находится на отрезке  $\overline{M_1 M_2}$  и делит этот отрезок в отношении  $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$  (обратно пропорциональном отношению масс, помещенных в концах отрезка);

2) центр тяжести системы точек  $M_1, M_2, \dots, M_k$  с массами соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_k$  совпадает с центром тяжести системы из двух точек, одна из которых является точкой  $M_k$  с массой  $m_k$ , а другая находится в центре тяжести системы точек  $M_1, M_2, \dots, M_{k-1}$  и имеет массу  $m_1 + m_2 + \dots + m_{k-1}$ .

Найдем центр тяжести системы из двух материальных точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  с массами  $m_1$  и  $m_2$ , пользуясь первым допущением. Обозначим эту точку  $P_1(x, y, z)$ . Тогда

$$\frac{M_1 P_1}{P_1 M_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

откуда по формулам (4) получаем

$$x = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$

$$z = \frac{z_1 + \frac{m_2}{m_1} z_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}.$$

Найдем координаты центра тяжести  $P_2(x, y, z)$  системы из трех точек, добавив к точкам  $M_1$  и  $M_2$  точку  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  с массой  $m_3$ . Используя второе допущение, получим

$$\frac{P_1 P_2}{P_2 M_3} = \frac{m_3}{m_1 + m_2}.$$

Используя формулы (4), получаем координаты  $P_2$

$$x = \frac{\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

По индукции предположим, что координаты центра тяжести  $P_{n-2}$  системы из  $n-1$  материальных точек  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  есть

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}, \\ y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_{n-1} y_{n-1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}, \\ z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_{n-1} z_{n-1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}. \end{aligned}$$

Добавляя к этой системе материальных точек еще одну точку  $M_n$  с массой  $m_n$  и пользуясь вторым допущением, получаем

$$\frac{P_{n-2}P_{n-1}}{P_{n-1}M_n} = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}},$$

где  $P_{n-1}$  – центр тяжести системы из  $n$  точек.

Тогда, используя формулы (4) и координаты точек  $P_{n-2}$  и  $M_n$ , получаем координаты точки  $P_{n-1}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_{n-1} x_{n-1}}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}} + \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}} x_n}{1 + \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}} = \\ &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\ y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\ z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \end{aligned}$$

## 0.5. ВЕКТОРЫ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

### ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ.

#### ТЕОРЕМА О КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРАХ

*Геометрическим вектором*, или просто *вектором*, будем называть направленный отрезок. Обозначается либо  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A$  – начало,  $B$  – конец вектора, либо  $\mathbf{a}$ . На чертеже вектор обычно изображают стрелкой. Длину вектора обозначают  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\mathbf{a}|$ , соответственно.

**Определение 1.** Вектор называется *нулевым*, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

**Определение 2.** Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

**Определение 3.** Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.

Начало вектора называют *точкой его приложения*.

**Лемма.** Каковы бы ни были вектор  $\mathbf{a}$  и точка  $P$ , существует, и притом единственный, вектор  $\overrightarrow{PQ}$  с началом в точке  $P$ , равный вектору  $\mathbf{a}$ .

Другими словами, точка приложения данного вектора может быть выбрана произвольно, т.е. мы не различаем двух равных векторов, имеющих разные точки приложения и получающихся один из другого параллельным переносом.

*Доказательство.* Пусть  $l$  – прямая, на которой лежит вектор  $\mathbf{a}$ . Тогда существует единственная прямая  $l'$ , параллельная прямой  $l$  и проходящая через точку  $P$ . На прямой  $l'$  существует единственная точка  $Q$  такая, что длина отрезка  $PQ$  равна длине вектора  $\mathbf{a}$  и направление  $\overrightarrow{PQ}$  совпадает с направлением  $\mathbf{a}$ .

*Линейными операциями* над векторами называют операцию сложения векторов и операцию умножения вектора на вещественное число.



**Определение 4.** Суммой  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  называется вектор, идущий из начала вектора  $\mathbf{a}$  в конец вектора  $\mathbf{b}$  при условии, что вектор  $\mathbf{b}$  приложен к концу вектора  $\mathbf{a}$ .

Это правило называется *правилом треугольника*.

Свойства сложения векторов:

- (1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (переместительное свойство);
- (2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (сочетательное свойство);
- (3) существует нулевой вектор  $\mathbf{0}$  такой, что  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$  для любого вектора  $\mathbf{a}$ ;
- (4) для каждого вектора  $\mathbf{a}$  существует противоположный ему вектор  $(-\mathbf{a})$  такой, что  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

Для доказательства свойства 1 приложим два произвольных вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$ . Обозначим буквами  $A$  и  $B$  концы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно и построим параллелограмм  $OBCA$ , натянутый на эти векторы (см. рис. 10). Из определения равенства векторов следует, что  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ . Из треугольника  $OBC$  следует, что

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Из рассмотрения треугольника  $OAC$  следует, что

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Свойство 1 доказано.

Нами получено еще одно правило сложения векторов – *правило параллелограмма*: если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  этих векторов представляет собой диагональ указанного параллелограмма, идущую из общего начала векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Для доказательства свойства 2 приложим вектор  $\mathbf{a}$  к произвольной точке  $O$ , вектор  $\mathbf{b}$  – к концу вектора  $\mathbf{a}$ , а вектор  $\mathbf{c}$  к концу вектора  $\mathbf{b}$ . Буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$  обозначим концы векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  соответственно (см. рис. 11). Тогда

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

откуда и следует свойство 2.

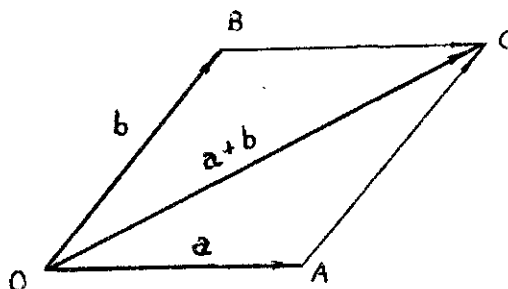


Рис. 10

Свойство 3 вытекает из определения 4 суммы векторов и того, что нулевой вектор – это вектор, у которого начало и конец совпадают.

Для доказательства свойства 4 определим вектор  $(-\mathbf{a})$  *противоположный вектору  $\mathbf{a}$* , как вектор, коллинеарный вектору  $\mathbf{a}$ , имеющий одинаковую длину с вектором  $\mathbf{a}$  и противоположное направление.

Доказанные свойства позволяют распространить правило сложения на сумму любого конечного числа векторов: если приложить вектор  $\mathbf{a}_2$  к концу вектора  $\mathbf{a}_1$ , вектор  $\mathbf{a}_3$  к концу вектора  $\mathbf{a}_2$  и так далее, наконец, вектор  $\mathbf{a}_n$  к концу вектора  $\mathbf{a}_{n-1}$ , то сумма  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n$  представляет собой вектор, идущий из начала вектора  $\mathbf{a}_1$  в конец вектора  $\mathbf{a}_n$ . Эти же свойства 1 – 4 позволяют определить операцию вычитания векторов.

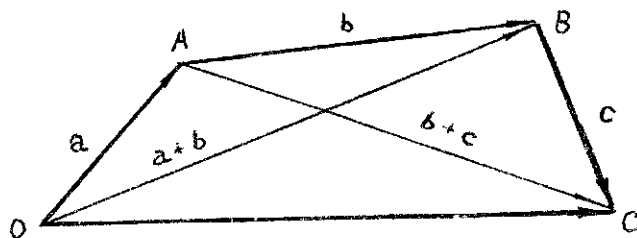


Рис. 11

**Определение 5.** Разностью  $a - b$  вектора  $a$  и вектора  $b$  называется такой вектор  $c$ , который в сумме с вектором  $b$  дает вектор  $a$ .

**Утверждение.** Существует, и притом единственный, вектор  $c$ , представляющий собой разность  $a - b$ , причем  $c$  равен  $a + (-b)$ , где  $(-b)$  — вектор, противоположный  $b$ .

*Доказательство.* Если  $c = a + (-b)$ , то из свойств 1 — 4 следует

$$c + b = (a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a,$$

т.е.  $a + (-b)$  представляет собой разность  $a - b$ . Убедимся в однозначности вектора  $c$ . Предположим противное, пусть кроме вектора  $c = a + (-b)$  существует еще один вектор  $d$  такой, что  $d + b = a$ . Тогда из

$$(d + b) + (-b) = a + (-b) = c,$$

$$(d + b) + (-b) = d + (b + (-b)) = d + 0 = d$$

следует, что  $c = d$ .

Из определения 5 и из правила треугольника сложения векторов получаем правило построения разности  $a - b$ : разность  $a - b$  приведенных к общему началу векторов  $a$  и  $b$  есть вектор, идущий из конца вычитаемого вектора  $b$  в конец уменьшаемого вектора  $a$  (см. рис. 12).

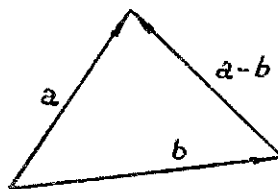


Рис. 12

**Определение 6.** Произведением  $\alpha a$  вектора  $a$  на вещественное число  $\alpha$  называется вектор  $b$ , коллинеарный вектору  $a$ , имеющий длину равную  $|\alpha| |a|$ , и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора  $a$ , в случае  $\alpha > 0$  и противоположное направлению вектора  $a$ , в случае  $\alpha < 0$ .

Геометрический смысл операции умножения вектора на число состоит в том, что при умножении вектора  $a$  на число  $\alpha$  вектор  $a$  "растягивается" в  $\alpha$  раз. При  $\alpha > 1$  это действительно растяжение, при  $0 < \alpha < 1$  в действительности происходит сжатие, а при отрицательных  $\alpha$  кроме растяжения или сжатия происходит еще и изменение направления на противоположное.

*Свойства операции умножения вектора на число :*

- (1)  $\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b$ ;
- (2)  $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$  (распределительные свойства);
- (3)  $\alpha (\beta a) = (\alpha \beta) a$  (сочетательное свойство числовых множителей).

Для доказательства первого свойства приложим векторы  $a$  и  $b$  к общему началу  $O$  и построим на них параллелограмм, диагональ которого будет представлять собой сумму  $a + b$ . При "растяжении" сторон этого параллелограмма в  $\alpha$  раз в силу свойств подобия диагональ также "растягивается" в  $\alpha$  раз, но это и означает, что

$$\alpha a + \alpha b = \alpha (a + b).$$

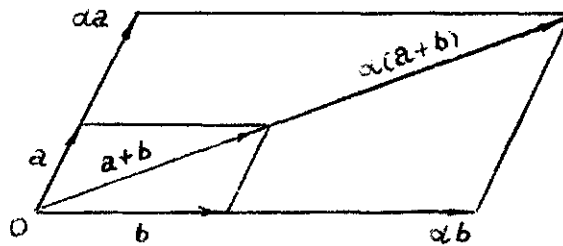


Рис. 13

Второе и третье свойства очевидны из наглядных геометрических соображений. Свойство 2 означает, что при "растяжении" вектора  $\mathbf{a}$  в  $\alpha + \beta$  раз получается такой же вектор, как при сложении вектора  $\mathbf{a}$ , "растянутого" в  $\alpha$  раз, с вектором  $\mathbf{a}$ , "растянутым" в  $\beta$  раз.

Свойство 3 означает, что при "растяжении" вектора  $\mathbf{a}$  сначала в  $\beta$  раз, а потом еще в  $\alpha$  раз получается такой же вектор, как и при "растяжении" вектора  $\mathbf{a}$  сразу в  $\alpha\beta$  раз.

**Пример.** Из точки  $O$  выходят два вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ . Найти какой-нибудь вектор  $\overrightarrow{OC}$ , идущий по биссектрисе угла  $AOB$ .

**Решение.** Воспользуемся операцией сложения векторов и правилом параллелограмма. Сумма векторов есть диагональ параллелограмма, идущая из их общего начала. Если бы этот параллелограмм был ромбом, то диагональ была бы и биссектрисой соответствующего угла, поэтому будем строить ромб. У ромба длины сторон равны, значит, надо уравнивать длины векторов. Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}.$$

Каждый из них имеет длину, равную единице, поэтому вектор

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

лежит на биссектрисе угла  $AOB$ .

**Теорема.** Если вектор  $\mathbf{b}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{a}$ , то существует вещественное число  $\lambda$  такое, что  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ .

**Доказательство.** Приложим векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  к общему началу  $O$ , тогда они расположатся на одной прямой в силу своей коллинеарности. На прямой выберем начало, масштаб и направление. Обозначим  $A$  и  $B$  концы векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  соответственно.

Можно исключить из рассмотрения случай, когда  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , так как в этом случае равенство  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$  получается при  $\lambda = 0$ . Можно также исключить из рассмотрения случай совпадения точек  $A$  и  $B$ . Действительно, это означало бы, что  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , тогда равенство  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$  получается при  $\lambda = 1$ .

Поэтому будем считать, что точки  $A$  и  $B$  различны. Далее, так как по условию теоремы вектор  $\mathbf{a}$  ненулевой, то точка  $O$  отлична от точки  $A$ . Тогда можно утверждать, что точка  $O$  делит направленный отрезок  $\overrightarrow{BA}$  в некотором отношении, которое можно обозначить через  $-\lambda$ , т.е.

$$\frac{BO}{OA} = -\lambda, \quad (1)$$

или

$$BO = -\lambda OA,$$

откуда

$$OB = \lambda OA \quad (2)$$

(где  $OA$ ,  $OB$  – величины направленных отрезков  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ ).

Возможны два случая: 1) векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково направлены; 2) векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены в противоположные стороны.

В случае, когда направление  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  одинаково, точка  $O$  лежит вне отрезка  $\overrightarrow{BA}$ , поэтому отношение  $\frac{BO}{OA}$  отрицательно, следовательно,  $\lambda > 0$ .

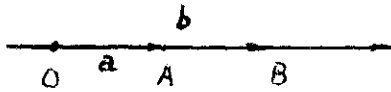


Рис. 14



Рис. 15

В случае, когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  направлены в противоположные стороны, точка  $O$  лежит внутри отрезка  $\overline{BA}$ , поэтому отношение  $\frac{BO}{OA}$  положительно, а значит,  $\lambda < 0$ .

Покажем, что в обоих случаях  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ . Достаточно доказать, что  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Коллинеарность  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  следует из коллинеарности  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и определения операции умножения вектора на число ( $\lambda \mathbf{a}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ , а значит, и вектору  $\mathbf{b}$ ). Из равенства (2) следует, что

$$|OB| = |\lambda OA| = |\lambda| |OA|,$$

но  $|OB| = |\mathbf{b}|$ ,  $|OA| = |\mathbf{a}|$ , поэтому длины векторов  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  равны.

Наконец, если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют одинаковое направление, то  $\lambda > 0$ , следовательно, вектор  $\lambda \mathbf{a}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{a}$ , т.е.  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  одинаково направлены. Если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  противоположно направлены, то  $\lambda < 0$ , следовательно, вектор  $\lambda \mathbf{a}$  имеет направление, противоположное направлению вектора  $\mathbf{a}$ , т.е. векторы  $\mathbf{b}$  и  $\lambda \mathbf{a}$  одинаково направлены. Теорема доказана.

# ЛЕКЦИЯ 1

## ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

"Что мы хотим сказать, когда говорим,  
что пространство имеет три измерения?"  
(Анри Пуанкаре "Ценность науки")

### 1.1. Понятие линейной зависимости векторов

**Определение 1.** *Линейной комбинацией*  $n$  векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа, т.е. выражение вида

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n, \quad (1)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – произвольные вещественные числа.

**Определение 2.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие вещественные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  с указанными числами обращается в нуль, т.е.

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Линейную комбинацию векторов (1) называют *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  отличен от нуля. Определение 2 можно также переформулировать в виде:

**Определение 2'.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, обращающаяся в нуль.

Если векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  не являются линейно зависимыми, то говорят, что они *линейно независимы*.

**Определение 3.** Векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  называются *линейно независимыми*, если равенство нулю их линейной комбинации (1) возможно лишь в случае, когда все числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  равны нулю.

**Теорема 1.** Если хотя бы один из векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

*Доказательство.* Для определенности считаем, что вектор  $\mathbf{a}_1$  является нулевым. Тогда если взять

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0,$$

то

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}.$$

Итак, найдена нетривиальная ( $\alpha_1 \neq 0$ ) линейная комбинация векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , обращающаяся в нуль. По определению 2 система линейно зависима, что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Если среди  $n$  векторов какие-либо  $k$  векторов ( $k < n$ ) линейно зависимы, то и вся система из  $n$  векторов линейно зависима.

*Доказательство.* Для определенности будем считать, что векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  линейно зависимы. (Если это не так, то перенумеруем векторы в системе, чтобы линейно зависимые векторы получили первые  $k$  номеров.) По определению 2 найдутся такие вещественные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Очевидно, что

$$0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+2} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Складывая равенства (3) и (4), получаем

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+2} + \dots + 0 \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

т.е. нетривиальную (среди  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  есть ненулевой) линейную комбинацию векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , обращающуюся в нуль. По определению 2 система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  линейно зависима.

Рассмотрим геометрический смысл понятия линейной зависимости для двух и трех векторов.

**Теорема 3.** Два вектора являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

*Необходимость.* Пусть два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – линейно зависимы. Докажем, что они коллинеарны. По определению 2 найдутся такие вещественные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что справедливо

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Пусть для определенности  $\beta \neq 0$ , тогда из равенства (5) получим

$$\mathbf{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a}.$$

Вводя обозначение  $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ , последнее равенство перепишем в виде

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a},$$

т.е.  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны (по определению умножения вектора на число).

*Достаточность.* Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Докажем, что они линейно зависимы. Если хотя бы один из векторов нулевой, то они линейно зависимы в силу теоремы 1. Поэтому рассмотрим случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ненулевые. Пусть  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , по теореме о коллинеарных векторах существует вещественное число  $\lambda$  такое, что  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ , или

$$\lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Так как из двух чисел  $\lambda, -1$  одно заведомо отлично от нуля, то по определению 2 получаем, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  линейно зависимы.

**Следствие.** Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны, то они линейно независимы.

**Определение 4.** Векторы называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

**Теорема 4.** Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

*Необходимость.* Пусть три вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  линейно зависимы. Докажем, что они компланарны. По определению 2 найдутся такие вещественные числа  $\alpha, \beta, \gamma$ , хотя бы одно из которых отлично от нуля, что

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Будем считать, что  $\gamma \neq 0$ , тогда из (6) получим

$$\mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b}.$$

Обозначая  $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \mu = -\frac{\beta}{\gamma}$ , перепишем последнее равенство в виде

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b},$$

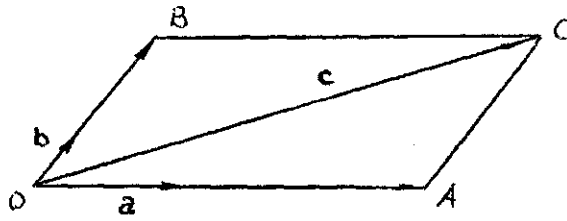


Рис. 1

т.е. если все три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  приложены к общему началу, то вектор  $\mathbf{c}$  равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\lambda\mathbf{a}$  и  $\mu\mathbf{b}$ , но это и означает, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  лежат в одной плоскости, следовательно, они компланарны.

**Достаточность.** Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны. Докажем, что они линейно зависимы. Исключим из рассмотрения случай, когда какая-либо пара векторов из данных трех коллинеарна. Действительно, если найдется пара коллинеарных векторов, то эта пара является линейно зависимой в силу теоремы 3, но тогда в силу теоремы 2 все три вектора линейно зависимы.

Остается рассмотреть случай, когда в тройке векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ни одна пара векторов не коллинеарна. Перенесем компланарные векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  на одну плоскость и приведем их к общему началу  $O$ . Через конец вектора  $\mathbf{c}$  проведем прямые, параллельные векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Пусть  $A$  – точка пересечения прямой, параллельной вектору  $\mathbf{b}$ , с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{a}$ ;  $B$  – точка пересечения прямой, параллельной вектору  $\mathbf{a}$ , с прямой, на которой лежит вектор  $\mathbf{b}$  (существование этих точек следует из того, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны). По правилу сложения векторов (правило параллелограмма) (см. рис. 1)

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Вектор  $\overrightarrow{OA}$  по построению коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{a}$ , следовательно, по теореме о коллинеарных векторах существует такое вещественное число  $\lambda$ , что

$$\overrightarrow{OA} = \lambda\mathbf{a}.$$

Вектор  $\overrightarrow{OB}$  по построению коллинеарен ненулевому вектору  $\mathbf{b}$ , следовательно, в силу той же теоремы

$$\overrightarrow{OB} = \mu\mathbf{b}$$

для некоторого вещественного  $\mu$ . Тогда

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

или

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0.$$

Так как из чисел  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $-1$  одно заведомо отлично от нуля, то по определению 2 векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  линейно зависимы. Теорема доказана.

**Следствие.** Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  не компланарны, то они линейно независимы.

**Теорема 5.** Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

**Доказательство.** Исключим из рассмотрения случай, когда какая-нибудь тройка из указанных четырех векторов компланарна. Действительно, в случае компланарности трех векторов из теоремы 4 следует, что они линейно зависимы, но тогда в силу теоремы 2 вся четверка также линейно зависима.

Рассмотрим случай, когда среди четырех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  никакая тройка векторов не компланарна. Приведем все векторы к общему началу  $O$  и проведем через конец вектора  $\mathbf{d}$  плоскости, параллельные плоскостям, натянутым на пары векторов  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ , и  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Векторы, входящие в каждую из этих пар, не коллинеарны, следовательно, определяют плоскость. Точки пересечения указанных плоскостей с прямыми, на которых лежат векторы  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{a}$ , обозначим соответственно  $C$ ,  $B$  и  $A$  (см. рис. 2). В результате нашего построения мы получаем параллелепипед, диагональю

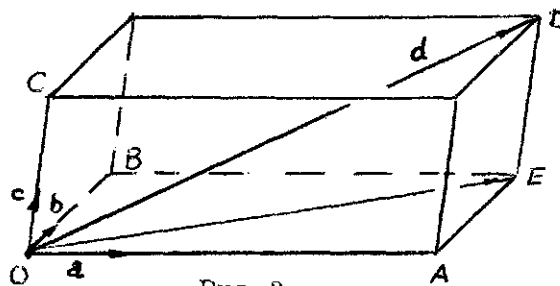


Рис. 2

которого является вектор  $\vec{d} = \vec{OD}$ , а ребра параллельны векторам  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Так как  $OEDC$  – параллелограмм, то по правилу сложения векторов

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{OC}. \quad (7)$$

$OAEB$  также является параллелограммом, значит, по правилу сложения векторов

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB}. \quad (8)$$

Объединяя равенства (7) и (8), получим

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}. \quad (9)$$

Вектор  $\vec{OA}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{a}$ ,  $\vec{OB}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{b}$ ,  $\vec{OC}$  коллинеарен ненулевому вектору  $\vec{c}$ . Применяя теорему о коллинеарных векторах к каждой паре коллинеарных векторов, получаем

$$\vec{OA} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{OB} = \mu \vec{b}, \quad \vec{OC} = \nu \vec{c}.$$

Тогда (9) принимает вид

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

или

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} - \vec{d} = 0.$$

Среди чисел  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $-1$  одно заведомо отлично от нуля, поэтому, применяя определение 2, получаем, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  линейно зависимы.

**Следствие.** Каковы бы ни были некопланарные векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , для любого вектора  $\vec{d}$  найдутся такие вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , что справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}.$$

## 1.2. АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Определение 1.** Говорят, что линейно независимые векторы образуют в пространстве *базис*, если любой вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов.

**Теорема 1.** Любая тройка некопланарных векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образует в пространстве базис.

Для доказательства заметим, что в силу следствия из теоремы 4, любые три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  – линейно независимы. Тогда в силу следствия из теоремы 5 для любого вектора  $\vec{d}$  пространства найдутся вещественные числа  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  такие, что

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}, \quad (1)$$

т.е. любой вектор пространства представляется в виде линейной комбинации трех некопланарных векторов, значит, согласно определению,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют базис пространства.

Из теоремы 4 предыдущего пункта (из доказательства достаточности) и определения 1 следует



**Следствие.** Любая пара неколлинеарных векторов образует базис в плоскости.

Равенство (1) будем называть *разложением вектора  $\mathbf{d}$  по базису  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$* , а числа  $\alpha, \mu, \nu$  — *координатами вектора  $\mathbf{d}$  относительно базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$* .

**Теорема 2.** Каждый вектор  $\mathbf{d}$  может быть единственным образом разложен по базису.

Другими словами, координаты каждого вектора относительно базиса определены однозначно.

*Доказательство.* Пусть векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  образуют базис пространства. Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, что некоторый вектор  $\mathbf{d}$  имеет два разложения по базису:

$$\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} + \gamma_1 \mathbf{c} \quad (2)$$

и

$$\mathbf{d} = \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b} + \gamma_2 \mathbf{c}. \quad (3)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (3), в результате получим

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2) \mathbf{b} + (\gamma_1 - \gamma_2) \mathbf{c}. \quad (4)$$

Так как векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  образуют базис, то они линейно независимы. По определению линейно независимой системы векторов получаем, что равенство (4) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты обращаются в нуль, т. е.

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 - \beta_2 = 0, \quad \gamma_1 - \gamma_2 = 0,$$

откуда

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2,$$

что противоречит предположению. Значит, единственность разложения по базису доказана.

**Определение 2.** Аффинные координаты в пространстве определяются заданием базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и некоторой точки  $O$ , называемой *началом координат*. Аффинными координатами любой точки  $M$  пространства называются координаты вектора  $\overrightarrow{OM}$  относительно базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

Так как каждый вектор  $\overrightarrow{OM}$  может быть единственным образом разложен по базису, то каждой точке  $M$  пространства однозначно соответствует тройка аффинных координат.

Очевидно, декартовы прямоугольные координаты являются частным случаем аффинных координат, соответствующим такому выбору базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , когда все три вектора попарно ортогональны и имеют единичную длину. Действительно, пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  попарно ортогональны и  $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$ . Очевидно, они ненулевые и некопланарные, значит,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — линейно независимы и образуют базис пространства. Тогда любой вектор  $\mathbf{a}$  пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации этих векторов:

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_3.$$

Числа  $\alpha, \beta, \gamma$  являются *декартовыми прямоугольными координатами вектора  $\mathbf{a}$* .

Остается заметить, что если векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  образуют базис аффинной системы координат, то в этом базисе векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  имеют следующие координаты:

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0),$$

$$\mathbf{b} = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{c} = (0, 0, 1).$$

Действительно,

$$\mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} = 0 \cdot \mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c},$$

$$\mathbf{c} = 0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + 1 \cdot \mathbf{c}.$$

**Пример.** Векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  заданы своими прямоугольными декартовыми координатами:

$$\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{c} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{d} = (3, 5, 2).$$

Проверить, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  можно взять за базис аффинной системы координат. Найти аффинные координаты вектора  $\mathbf{d}$  в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ .

*Решение.* Покажем, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — линейно независимы, т. е. что линейная комбинация этих векторов обращается в нуль только в случае, когда все коэффициенты этой линейной комбинации нулевые. Пусть

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

или

$$\alpha (1, 0, 0) + \beta (1, 1, 0) + \gamma (1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Преобразуя левую часть, получаем

$$(\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma) = (0, 0, 0),$$

т. е.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Значит,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  линейно независимы и их можно взять в качестве базиса аффинной системы координат. Найдем координаты  $\mathbf{d}$  в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , т. е. такие вещественные числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , что

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}.$$

Имеем

$$(3, 5, 2) = \alpha (1, 0, 0) + \beta (1, 1, 0) + \gamma (1, 1, 1),$$

или

$$(3, 5, 2) = (\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma).$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, стоящих в правой и левой частях полученного равенства, получаем систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \beta + \gamma = 5 \\ \gamma = 2, \end{cases}$$

решение которой  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 2$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{d}$  имеет в базисе  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  координаты  $(-2, 3, 2)$ .

## ЛЕКЦИЯ 2

### СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

*"В науке самое простое – найденное вчера и самое  
сложное – то, что будет найдено завтра."  
(Жан Батист Вуо)*

#### 2.1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

**Определение 1.** Пусть дан произвольный вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и произвольная ось  $u$ . Через  $A'$ ,  $B'$  обозначим основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $B$  на ось  $u$ . *Проекцией вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  на ось  $u$  называется величина  $A'B'$  направленного отрезка  $\overrightarrow{A'B'}$  оси  $u$ .*

Обозначение:  $pr_u \mathbf{a}$  (или  $pr_u \overrightarrow{AB}$ ).

**Определение 2.** Углом наклона вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  к оси  $u$  называется угол между двумя выходящими из произвольной точки лучами, один из которых имеет направление вектора  $\mathbf{a}$ , а другой – направление оси  $u$ .

Очевидно, на величину этого угла не влияют выбор точки выхода лучей и замена оси  $u$  любой другой осью, имеющей то же направление, что и ось  $u$ .

**Теорема 1.** Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $u$  равна длине вектора  $\mathbf{a}$ , умноженной на косинус угла наклона вектора  $\mathbf{a}$  к оси  $u$ , т. е.

$$pr_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\mathbf{a} \wedge u).$$

*Доказательство.* Пусть  $v$  – ось, проходящая через начало  $A$  вектора  $\mathbf{a}$  и имеющая направление оси  $u$ . Пусть  $C$  – проекция точки  $B$  (конца вектора  $\mathbf{a}$ ) на ось  $v$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  – проектирующие плоскости, т.е. плоскости, перпендикулярные оси  $u$  и проходящие через точки  $A$  и  $B$  соответственно, то  $C$  есть точка пересечения плоскости  $\beta$  с осью  $v$ .

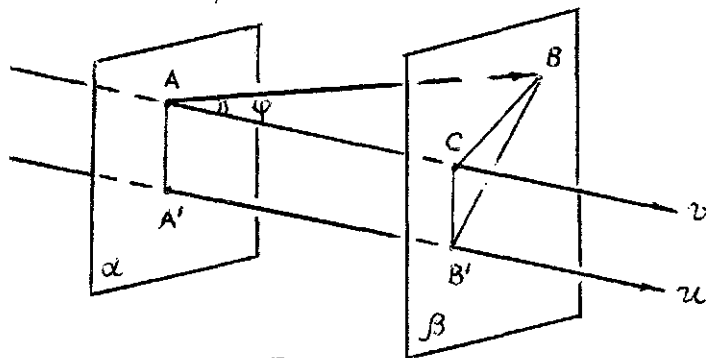


Рис. 1

Пусть  $\varphi = \angle BAC$  – это угол наклона вектора  $\mathbf{a}$  к оси  $v$  (следовательно, и к оси  $u$ ). Справедливо  $A'B' = AC$ , так как оси  $u$  и  $v$  одинаково направлены, и длины этих отрезков равны, поскольку  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{A'B'}$  лежат на параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ . Но

$$AC = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = |\mathbf{a}| \cos \varphi,$$

значит,

$$pr_u \mathbf{a} = A'B' = AC = |\mathbf{a}| \cos \varphi.$$

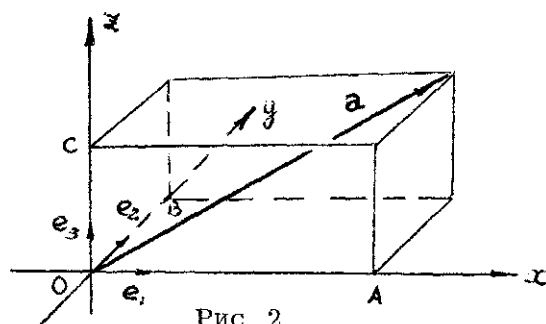


Рис. 2

**Теорема 2.** Декартовы прямоугольные координаты  $x, y, z$  вектора  $\mathbf{a}$  равны проекциям этого вектора соответственно на оси  $Ox, Oy, Oz$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — попарно ортогональные векторы, имеющие единичную длину. Значит, они образуют базис прямоугольной декартовой системы координат. Такой базис мы будем называть *ортонормированным*. Приложим вектор  $\mathbf{a}$  к началу координат  $O$  нашей системы координат и проведем через конец этого вектора плоскости, параллельные координатным плоскостям  $Oxy, Oyz, Oxz$ . В результате получим прямоугольный параллелепипед, диагональю которого является вектор  $\mathbf{a}$ . Если обозначить точки пересечения плоскостей, проведенных через конец  $\mathbf{a}$  соответственно через  $C, A$ , и  $B$ , то

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Вектор  $\overrightarrow{OA}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{e}_1$ , значит

$$\overrightarrow{OA} = x \mathbf{e}_1$$

(теореме о коллинеарных векторах можно применить, так как  $\mathbf{e}_1 \neq 0$ ). Аналогично,

$$\overrightarrow{OB} = y \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OC} = z \mathbf{e}_3.$$

Значит,

$$\mathbf{a} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3,$$

где  $x, y, z$  — некоторые вещественные числа. Так как построенный параллелепипед является прямоугольным, то проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно равны величинам направленных отрезков  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  и  $\overrightarrow{OC}$  этих осей, т. е.

$$pr_{Ox} \mathbf{a} = OA, \quad pr_{Oy} \mathbf{a} = OB, \quad pr_{Oz} \mathbf{a} = OC.$$

Для доказательства теоремы осталось показать, что  $OA = x, OB = y, OC = z$ . Действительно,  $\overrightarrow{OA} = x \mathbf{e}_1$ , и так как  $|\mathbf{e}_1| = 1$ , то  $|OA| = |x|$ . Знаки чисел  $OA$  и  $x$  совпадают, так как если  $\overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{e}_1$  одинаково направлены, то оба числа  $OA$  и  $x$  положительны, если  $\overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{e}_1$  имеют противоположные направления, то оба числа  $OA$  и  $x$  отрицательны, следовательно,

$$OA = x.$$

Аналогично доказывается, что

$$OB = y, \quad OC = z.$$

*Проекция вектора на ось имеет следующие свойства:*

1.  $pr_u(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = pr_u \mathbf{a} + pr_u \mathbf{b}$   
(проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось);
2.  $pr_u \alpha \mathbf{a} = \alpha pr_u \mathbf{a}$ .

**Упражнение.** Доказать свойства проекции вектора на ось.

## 2.2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

**Определение 1.** Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается либо  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , либо  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Согласно данному определению

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}). \quad (1)$$

Можно сформулировать и другое определение скалярного произведения, если использовать понятие проекции вектора на ось. Действительно, по теореме 1

$$pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

$$pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

тогда формулу (1) можно переписать либо в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}, \quad (2)$$

либо в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) позволяют дать еще одно определение скалярного произведения.

**Определение 2.** Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длины одного из этих векторов на проекцию другого вектора на ось, определяемую первым вектором.

*Свойства скалярного произведения:*

Начнем с алгебраических свойств, к которым относятся следующие:

- (1)  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$  (переместительное свойство);
- (2)  $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b})$  для любого вещественного числа  $\alpha$  (сочетательное свойство относительно числового множителя);
- (3)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$  (распределительное свойство относительно сложения векторов);
- (4)  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ , если  $\mathbf{a} \neq 0$  и  $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ , если  $\mathbf{a} = 0$ .

*Доказательство свойства 1.* По определению 1

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \quad (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

и так как

$$\cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \cos(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}),$$

то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

*Доказательство свойства 2.* Воспользуемся определением 2 и вторым свойством проекции вектора на ось, тогда получим

$$(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| pr_{\mathbf{b}} \alpha \mathbf{a} = |\mathbf{b}| \alpha pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \alpha |\mathbf{b}| pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Следствие 1.** Для любого вещественного числа  $\beta$  справедливо

$$(\mathbf{a}, \beta \mathbf{b}) = \beta (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Действительно, используем уже доказанные свойства 1 и 2

$$(\mathbf{a}, \beta \mathbf{b}) = (\beta \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \beta (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \beta (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Следствие 2.** Для любых вещественных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  справедливо

$$(\alpha \mathbf{a}, \beta \mathbf{b}) = \alpha \beta (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством 2 и следствием 1.

*Доказательство свойства 3.* Воспользуемся определением 2 и первым свойством проекции:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= |\mathbf{c}| \operatorname{pr}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| (\operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + \operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{b}) \\ &= |\mathbf{c}| \operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{a} + |\mathbf{c}| \operatorname{pr}_{\mathbf{c}} \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

**Следствие 1.**

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Очевидно, следует из свойств 1 и 3 скалярного произведения.

**Следствие 2.**

$$\left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j).$$

Для доказательства обозначим  $\sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j$  через  $\mathbf{y}$ . Тогда, применяя  $n$  раз свойство 3, получаем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \mathbf{y} \right) &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n, \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{y}) + (\mathbf{a}_3 + \dots + \mathbf{a}_n, \mathbf{y}) = \dots \\ &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{y}) + \dots + (\mathbf{a}_n, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{a}_i, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4)$$

Для каждого  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) рассмотрим скалярное произведение  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{y})$ . Применяя  $m$  раз следствие 1 из свойства 3 для каждого  $i$ , получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_i, \mathbf{y}) &= \left( \mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \right) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_m) \\ &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_2 + \dots + \mathbf{b}_m) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_3 + \dots + \mathbf{b}_m) = \dots \\ &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_2) + \dots + (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_m) = \sum_{j=1}^m (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{y})$  в формулу (4), получаем

$$\left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j).$$

*Доказательство свойства 4.*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \cos 0^0$$

по определению 1. Так как  $\cos 0^0 = 1$ , то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2.$$

Очевидно, что  $|\mathbf{a}|^2 > 0$ , если вектор  $\mathbf{a}$  ненулевой, если же  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , то  $|\mathbf{a}|^2 = 0$ .

Скалярное произведение вектора на себя называют *скалярным квадратом* этого вектора. В ходе доказательства четвертого свойства получено

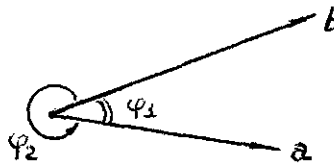


Рис. 3

**Следствие.** Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2.$$

Прежде чем формулировать геометрические свойства скалярного произведения, уточним понятие угла между векторами. Приведем два вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  к общему началу. В качестве угла между векторами можно взять любой из двух углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , в сумме составляющих  $2\pi$ . Так как  $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$ , то  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ .

В определение скалярного произведения входит косинус угла между векторами, поэтому мы не уточняли, какой из двух углов берется. Выбор угла важен для геометрических свойств, поэтому установим соглашение о выборе угла между двумя векторами:

под углом между двумя векторами подразумеваем всегда тот угол, который не превосходит  $\pi$  (т. е. наименьший из двух углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ).

*Геометрические свойства скалярного произведения:*

**Теорема 1.** Два ненулевых вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их скалярное произведение  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  положительно (отрицательно).

*Доказательство.* Пусть угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является острым (тупым), тогда  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi > 0$ ,  $(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$  и  $\cos \varphi < 0)$ . Тогда

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi > 0 \quad (< 0).$$

Обратно, пусть  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  положительно (отрицательно). Но так как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

и  $|\mathbf{a}| > 0$ ,  $|\mathbf{b}| > 0$ , то знак скалярного произведения определяется косинусом угла  $\varphi$ .  $\cos \varphi > 0$ , если  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  ( $\cos \varphi < 0$ , если  $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ ).

**Теорема 2.** Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Другими словами  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны.

*Необходимость.* Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны, тогда  $\varphi = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi = 0$ . Поэтому

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi = 0.$$

*Достаточность.* Пусть  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ . Покажем, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны. Исключим тривиальный случай, когда один из этих векторов нулевой, нулевой вектор имеет неопределенное направление, и его можно считать ортогональным любому вектору. Рассмотрим поэтому случай  $\mathbf{a} \neq 0$  и  $\mathbf{b} \neq 0$ . Но в этом случае  $|\mathbf{a}| > 0$  и  $|\mathbf{b}| > 0$ , значит, из равенства

$$0 = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

следует, что  $\cos (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$ , т. е.  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{\pi}{2}$ .

Значит,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны.

Выведем правило вычисления скалярного произведения векторов в прямоугольной декартовой системе координат.

**Теорема 3.** Пусть в прямоугольной декартовой системе координат векторы заданы своими координатами:

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Тогда скалярное произведение этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат, т. е.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (5)$$

*Доказательство.* Так как базисом прямоугольной декартовой системы координат служат ортонормированные векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , то

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3.$$

Тогда, применяя следствие 2 из третьего алгебраического свойства скалярного произведения, а затем следствие 2 из второго свойства, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3, x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3) = \\ &= x_1 x_2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_1 z_2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + \\ &+ y_1 x_2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + y_1 y_2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + y_1 z_2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \\ &+ z_1 x_2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + z_1 y_2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + z_1 z_2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

В силу того, что  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  попарно ортогональны, имеем (по теореме 2)

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) = 0,$$

значит,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + y_1 y_2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + z_1 z_2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3).$$

Далее, в силу

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = |\mathbf{e}_i|^2 = 1, \quad (i = 1, 2, 3),$$

получаем формулу (5)

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

**Следствие 1.** В прямоугольной декартовой системе координат необходимое и достаточное условие ортогональности векторов

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

имеет вид

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (6)$$

Утверждение следует из теорем 2 и 3.

**Следствие 2.** В прямоугольной декартовой системе координат угол  $\varphi$  между векторами

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

определяется равенством

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (7)$$

*Доказательство.* По определению 1

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$



поэтому

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Из четвертого свойства скалярного произведения и следствия из него

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = x_1 x_1 + y_1 y_1 + z_1 z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

откуда

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

$$|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = x_2 x_2 + y_2 y_2 + z_2 z_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

откуда

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

В результате

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

**Пример.** При каком значении  $\lambda$  векторы  $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны, если

$$\mathbf{a} = (0, -4, 5), \quad \mathbf{b} = (1, 2, -2)$$

(в прямоугольной системе координат).

*Решение.* По теореме 2  $\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение обращается в нуль, т.е.

$$(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0.$$

Используя распределительное и сочетательное свойства скалярного произведения, это равенство можно переписать в виде:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{(\mathbf{b}, \mathbf{b})}.$$

По теореме 3

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = -18,$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 1 + 2^2 + (-2)^2 = 9,$$

следовательно,  $\lambda = -\frac{(-18)}{9} = 2$ .

**Упражнение.** Пусть ось  $u$  составляет с осями координат углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Доказать, что проекция произвольного вектора  $\mathbf{a} = (x, y, z)$  на эту ось определяется равенством

$$pr_u \mathbf{a} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

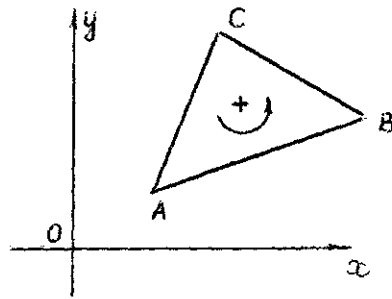


Рис. 4 (А)

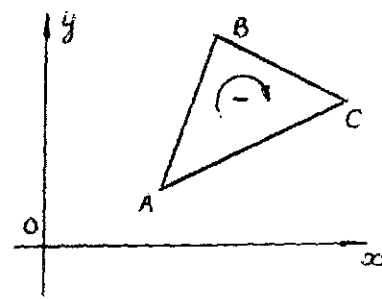


Рис. 4 (Б)

### 2.3. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат. Треугольник на плоскости задан координатами своих вершин  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ . Будем рассматривать ориентированный треугольник: *ориентацию* треугольника считаем *положительной*, если движение по дуге окружности, проведенной через вершины треугольника  $ABC$ , от  $A$  к  $C$ , содержащей  $B$ , совершается *против часовой стрелки*. В противном случае считаем треугольник *отрицательно ориентированным* (см. рис. 4(а) и 4(б).)

Рассмотрим векторы  $\vec{AB} = (a_1, a_2)$  и  $\vec{AC} = (b_1, b_2)$ , лежащие на сторонах треугольника  $ABC$ . Очевидно,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 - x_1, & a_2 &= y_2 - y_1, \\ b_1 &= x_3 - x_1, & b_2 &= y_3 - y_1. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\varphi$  внутренний угол треугольника между сторонами  $AB$  и  $AC$ , тогда площадь треугольника  $S$  равна

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \varphi.$$

Выразим  $\sin \varphi$  через координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ . Обозначим через  $\alpha_1$  угол между вектором  $\vec{AB}$  и осью  $Ox$ , через  $\alpha_2$  - угол между вектором  $\vec{AC}$  и осью  $Ox$ . (Все углы отсчитываем против часовой стрелки.)

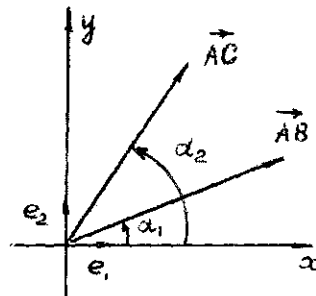


Рис. 5 (А)

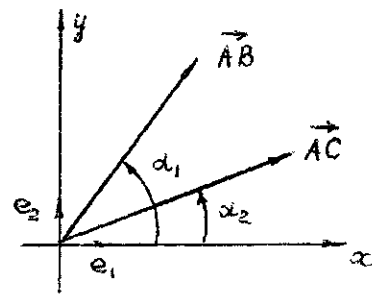


Рис. 5 (Б)

В первом случае (рис. 5(а)), очевидно,

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Во втором случае (рис. 5(б))

$$\varphi = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Так как

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \quad (1)$$

а координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  равны проекциям этих векторов на оси  $Ox$  и  $Oy$ , т.е.

$$\begin{aligned}a_1 &= pr_{Ox} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \alpha_1, \\a_2 &= pr_{Oy} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \sin \alpha_1, \\b_1 &= pr_{Ox} \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha_2, \\b_2 &= pr_{Oy} \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}| \sin \alpha_2,\end{aligned}$$

то выражая синусы и косинусы углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  через длины векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  и их координаты

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_1}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{a_2}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{b_1}{|\overrightarrow{AC}|}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{b_2}{|\overrightarrow{AC}|},$$

и подставляя эти выражения в (1), получаем

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}. \quad (2)$$

Тогда

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin(-(\alpha_2 - \alpha_1)) = -\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}.$$

В случае, если треугольник положительно ориентирован, получаем

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

В случае, если треугольник отрицательно ориентирован, получаем

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \left( -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \right) = -\frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Таким образом,

$$S = \pm \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

или, после подстановки координат вершин треугольника,

$$S = \pm \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (3)$$

Формулу (3) можно также переписать в виде

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

или в виде

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1).\end{aligned}$$

## ЛЕКЦИЯ 3 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

"Боги людям открыли не все.

В поиск пустившись, люди сами открыли немало."

( Ксенофан )

### 3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Пусть в пространстве даны два ортонормированных базиса  $e_1, e_2, e_3$  и  $e_1', e_2', e_3'$ , причем первая тройка векторов приложена к некоторой точке  $O$ , вторая – к точке  $O'$ .

*Репером* в пространстве будем называть тройку некопланарных векторов, данных в определенном порядке и приложенных к некоторой точке – началу репера. Тройку некопланарных векторов будем называть *базисом репера*.

Рассмотрим прямоугольные реперы  $Oe_1e_2e_3$  и  $O'e_1'e_2'e_3'$ . Можно ли с помощью движения в пространстве совместить эти два репера?

Очевидно, всегда можно перенести и повернуть второй репер так, чтобы точка  $O'$  совпала с точкой  $O$ , а вектор  $e_1'$  совпал с  $e_1$ . При этом плоскость векторов  $e_2'$  и  $e_3'$ , перпендикулярная к  $e_1'$ , совместится с плоскостью векторов  $e_2$  и  $e_3$ , перпендикулярной  $e_1$ . Поворотом в этой плоскости (вокруг  $e_1$  ( $e_1'$ )) всегда можно добиться совмещения векторов  $e_2'$  и  $e_2$ . После этого векторы  $e_3'$  и  $e_3$  окажутся коллинеарными. Они либо совпадут (реперы совмещены), либо окажутся противоположно направленными (реперы совместить нельзя).

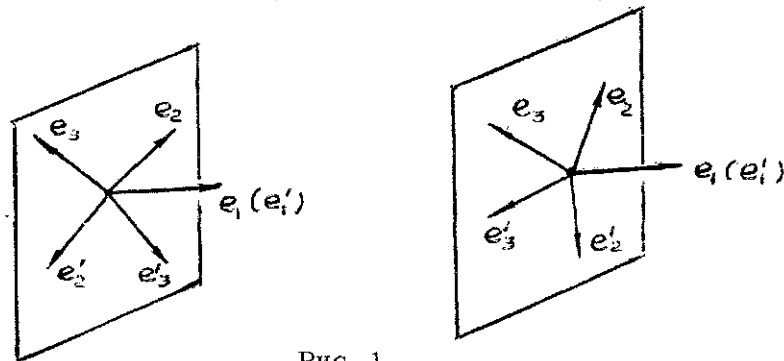


Рис. 1

Допустим, что реперы  $Oe_1e_2e_3$  и  $O'e_1'e_2'e_3'$  совместить нельзя. Возьмем любой другой репер  $O''e_1''e_2''e_3''$ . Очевидно, что он наложится (совместится) либо на первый из наших реперов, либо на второй. Таким образом, все ортонормированные базисы (прямоугольные реперы) распадаются на два класса. Базисы (реперы), принадлежащие одному классу, совмещаются, принадлежащие разным классам, – не совмещаются. Каждый из этих двух классов задает *ориентацию* пространства: *правую* (положительную) или *левую* (отрицательную).

Приведенное рассуждение поможет ввести ориентацию произвольного аффинного репера, хотя говорить о наложении (совмещении) таких реперов нельзя.

**Определение 1.** Три вектора называются *упорядоченной тройкой*, если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым и какой – третьим.

Условимся перечислять векторы упорядоченной тройки в порядке их нумерации, т.е. в упорядоченной тройке  $a, b, c$  вектор  $a$  является первым,  $b$  – вторым,  $c$  – третьим.

**Определение 2.** Упорядоченная тройка некопланарных векторов называется *правоориентированной* (или *правой*), если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левоориентированной* (или *левой*).

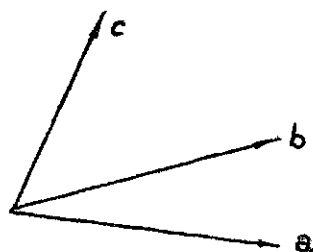


Рис. 2

**Пример 1.** Тройка  $(a, b, c)$ , изображенная на рисунке 2, очевидно, является правой.

Нетрудно увидеть, что тройки  $(b, c, a)$  и  $(c, a, b)$  также являются правыми. Тройки же  $(a, c, b)$ ,  $(c, b, a)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(-a, b, c)$ ,  $(a, -b, c)$ ,  $(a, b, -c)$  являются левыми.

*Циклической* будем называть такую перестановку векторов, когда первый вектор переносится на последнее место, остальные векторы сдвигаются на одно место влево, не изменяя порядка. Таким образом, при циклических перестановках из упорядоченной тройки  $(a, b, c)$ , получаем сначала  $(b, c, a)$ , затем  $(c, a, b)$ .

Из приведенного примера можно сделать следующие выводы:

- (1) при циклических перестановках упорядоченная тройка векторов не изменяет ориентацию;
- (2) при перестановке любых двух векторов тройки местами ориентация меняется на противоположную;
- (3) если какой-либо из векторов тройки изменяет направление на противоположное, то ориентация изменяется.

**Определение 3.** Векторным произведением вектора  $a$  на вектор  $b$  называется вектор  $c$ , обозначаемый  $c = [a, b]$  (или  $c = a \times b$ ) и удовлетворяющий условиям:

- (1) длина вектора  $c$  равна произведению длин векторов  $a$  и  $b$  на синус угла между ними, т.е.

$$|c| = |a||b|\sin(a \wedge b);$$

- (2) вектор  $c$  ортогонален каждому из векторов  $a$  и  $b$ ;
- (3) вектор  $c$  направлен так, что тройка  $(a, b, c)$  является правой.

**Пример 2.** Пусть  $e_1, e_2, e_3$  – ортонормированная тройка, являющаяся правой. Тогда найдем  $[e_1, e_2]$ . По определению 3 векторное произведение  $e_1$  и  $e_2$ , есть вектор, ортогональный каждому из векторов  $e_1$  и  $e_2$ , значит, он коллинеарен  $e_3$ . Так как тройка  $e_1, e_2, [e_1, e_2]$  должна быть правой, то направление  $[e_1, e_2]$  совпадает с направлением  $e_3$ . Осталось сравнить длины этих векторов. Очевидно,

$$|[e_1, e_2]| = |e_1||e_2|\sin(e_1 \wedge e_2) = \sin 90^\circ = 1,$$

так как  $|e_1| = |e_2| = 1$  и  $e_1$  ортогонален  $e_2$ . Длина  $e_3$  также равна 1. Значит,

$$[e_1, e_2] = e_3.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} [e_2, e_3] &= e_1, & [e_3, e_1] &= e_2, & [e_2, e_1] &= -e_3, \\ [e_1, e_3] &= -e_2, & [e_3, e_2] &= -e_1. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Пусть  $b$  – вектор единичной длины, вектор  $a$  ортогонален вектору  $b$ . Найдем векторное произведение  $[a, b]$ .

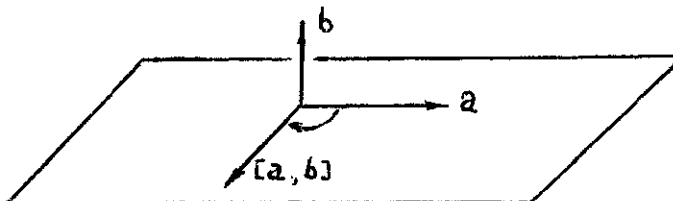


Рис. 3

Так как

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin 90^\circ = |\mathbf{a}|$$

и тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  должна быть правой, то вектор  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  получается из вектора  $\mathbf{a}$  поворотом вокруг вектора  $\mathbf{b}$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке (если смотреть из конца вектора  $\mathbf{b}$ ) (см. рис. 3).

### 3.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

**Справедливы следующие свойства:**

- (1)  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  (антикоммутативность);
- (2)  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  для любого действительного числа  $\alpha$  (сочетательное свойство относительно числового множителя);
- (3)  $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  (распределительное свойство);
- (4)  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$  для любого вектора  $\mathbf{a}$ .

*Доказательство свойства 1.* Докажем, что векторы  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $-\mathbf{b}, [\mathbf{a}]$  равны. Для этого следует показать, что их длины равны, что они коллинеарны и имеют одинаковое направление. Очевидно,

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = |-\mathbf{b}, [\mathbf{a}]|.$$

Векторы  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $-\mathbf{b}, [\mathbf{a}]$  коллинеарны, так как оба ортогональны одной и той же плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Осталось сравнить направление. Тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  — правая, тройка  $\mathbf{b}, \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  также является правой по определению 3. Если в последней тройке переставить местами первые два вектора, то ориентация изменится, т. е. тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  — левая. Если в ней поменять направление одного из векторов, то ориентация снова изменится, значит, тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  — правая. Из того, что обе тройки  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$  правые, следует, что направления векторов  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $-\mathbf{b}, [\mathbf{a}]$  совпадают.

*Доказательство свойства 2.* Исключим из рассмотрения тривиальные случаи, когда один из векторов нулевой или  $\alpha = 0$ . В этих случаях свойство 2, очевидно, справедливо. Обозначим через  $\mathbf{c}$  вектор, стоящий в левой части равенства, т. е.  $\mathbf{c} = [\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , через  $\mathbf{d}$  обозначим вектор, стоящий в правой части, т. е.  $\mathbf{d} = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Нам надо доказать, что  $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ . Пусть  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ,  $\psi$  — угол между  $\alpha \mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Если  $\alpha > 0$ , то  $\alpha \mathbf{a}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{a}$ , значит, в этом случае  $\varphi = \psi$ . Если  $\alpha < 0$ , то направление  $\alpha \mathbf{a}$  противоположно направлению  $\mathbf{a}$ , в этом случае  $\psi = \pi - \varphi$ . Заметим, что в обоих случаях  $\sin \varphi = \sin \psi$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}| &= |[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\alpha \mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \psi = \\ &= |\alpha||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \psi, \\ |\mathbf{d}| &= |\alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\alpha||[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \\ &= |\alpha||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}|$ .

Векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  коллинеарны, так как они ортогональны одной и той же плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\alpha \mathbf{a}$ . Остается проверить, что  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  одинаково направлены. Если  $\alpha > 0$ , то  $\mathbf{a}$  и  $\alpha \mathbf{a}$  одинаково направлены, тогда  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  также одинаково направлены. При умножении на положительное число направление вектора не изменится, значит,  $\alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  одинаково направлены. Если  $\alpha < 0$ , то  $\mathbf{a}$  и  $\alpha \mathbf{a}$  имеют противоположные направления, тогда  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  также противоположно направлены. При умножении на отрицательное число направление вектора изменяется на противоположное, значит,  $\alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $[\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}]$  одинаково направлены. Итак,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  имеют равные длины, коллинеарны и одинаково направлены, значит,  $\mathbf{c} = \mathbf{d}$ .

**Следствие 1.**  $[\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  для любого действительного числа  $\alpha$ .

*Доказательство.* Действительно, применяя свойства 1 и 2, получим

$$[\mathbf{a}, \alpha \mathbf{b}] = -[\alpha \mathbf{b}, \mathbf{a}] = -\alpha [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \alpha [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

**Следствие 2.**

$$[\alpha a, \beta b] = \alpha \beta [a, b]$$

для любых действительных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ .

Очевидно, следует из свойства 2 и следствия 1.

*Доказательство свойства 3.* Прежде чем доказывать это свойство, получим два вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $c$  – произвольный ненулевой вектор. Каждый вектор  $a$  можно разложить в сумму векторов, один из которых ортогонален  $c$ , другой – коллинеарен  $c$ .

*Доказательство.* Хотим представить вектор  $a$  в виде

$$a = a_1 + a_2,$$

где  $a_1$  ортогонален  $c$ , а  $a_2$  коллинеарен  $c$ , т.е.  $(a_1, c) = 0$  и  $a_2 = \alpha c$  для некоторого вещественного числа  $\alpha$ .

Скалярно умножим обе части равенства  $a = a_1 + \alpha c$  на вектор  $c$ , тогда

$$(a, c) = (a_1, c) + \alpha (c, c) = \alpha (c, c),$$

откуда

$$\alpha = \frac{(a, c)}{(c, c)}.$$

Итак,

$$a_2 = \frac{(a, c)}{(c, c)} c, \quad a_1 = a - \frac{(a, c)}{(c, c)} c,$$

т.е. векторы  $a_1$  и  $a_2$  найдены.

**Лемма 2.** Пусть  $c$  – произвольный ненулевой вектор, вектор  $a = a_1 + a_2$ , где  $a_1$  ортогонален  $c$ ,  $a_2$  коллинеарен  $c$ . Тогда

$$[a, c] = [a_1, c].$$

*Доказательство.* Пусть  $\varphi = (a \wedge c)$ , тогда из того, что  $(a_1 \wedge c) = \frac{\pi}{2}$  и  $a = a_1 + a_2$  следует, что

$$|a_1| = |a| \sin \varphi, \quad |a_2| = |a| \cos \varphi.$$

Значит,

$$|[a_1, c]| = |a_1| |c| \sin \frac{\pi}{2} = |a| |c| \sin \varphi = |[a, c]|.$$

Векторы  $[a, c]$  и  $[a_1, c]$  коллинеарны, так как они ортогональны одной и той же плоскости, в которой лежат векторы  $c$ ,  $a$  и  $a_1$ . Так как векторы  $a$  и  $a_1$  лежат по одну сторону от вектора  $c$ , то обе тройки  $a, c, [a, c]$  и  $a_1, c, [a, c]$  правые.

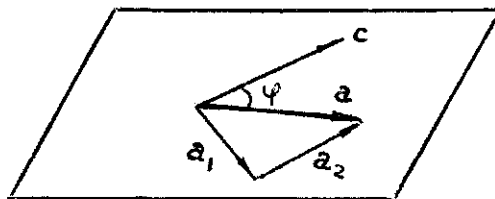


Рис. 4

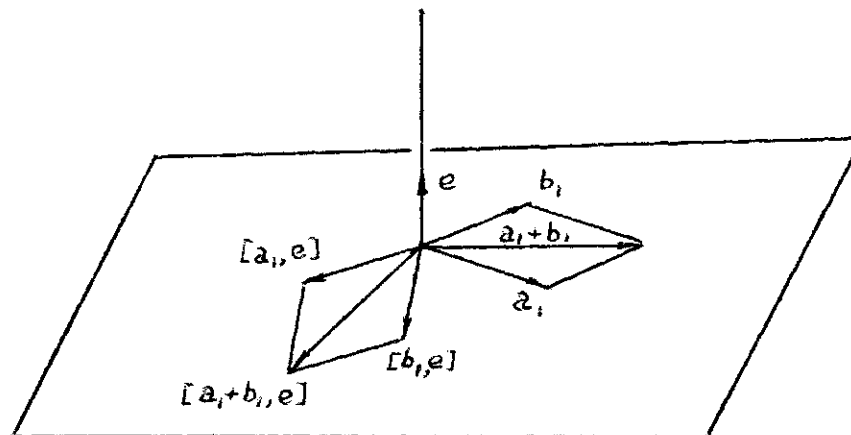


Рис. 5

Но  $a_1, c, [a_1, c]$  также правая, значит, векторы  $[a, c]$  и  $[a_1, c]$  одинаково направлены. Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству третьего свойства:

$$[a + b, c] = [a, c] + [b, c] \quad (1)$$

Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда  $c = 0$ . В этом случае равенство (1) очевидно. Пусть  $c$  — ненулевой, тогда по лемме 1 каждый из векторов  $a$  и  $b$  представим в виде суммы двух векторов

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

где  $a_1$  и  $b_1$  ортогональны  $c$ ,  $a_2$  и  $b_2$  коллинеарны  $c$ . Тогда

$$a + b = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2),$$

где  $a_1 + b_1$  ортогонален  $c$ , а  $a_2 + b_2$  коллинеарен  $c$ . По лемме 2

$$[a + b, c] = [a_1 + b_1, c],$$

$$[a, c] = [a_1, c],$$

$$[b, c] = [b_1, c],$$

поэтому, достаточно доказать равенство

$$[a_1 + b_1, c] = [a_1, c] + [b_1, c]. \quad (2)$$

Рассмотрим вектор  $e = \frac{1}{|c|} c$ . Это вектор, коллинеарный  $c$ , одинаково с ним направленный и имеющий единичную длину. Покажем, что справедливо

$$[a_1 + b_1, e] = [a_1, e] + [b_1, e]. \quad (3)$$

Вспомним пример 3. Для того, чтобы получить векторное произведение  $a_1 + b_1$  на ортогональный вектор  $e$  единичной длины, достаточно повернуть вектор  $a_1 + b_1$  вокруг  $e$  по часовой стрелке на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Но при таком повороте параллелограмм, построенный на векторах  $a_1$  и  $b_1$ , поворачивается целиком вместе со своей диагональю  $a_1 + b_1$ . Значит, равенство (3) справедливо.

Умножим обе части (3) на числовой множитель  $|c|$ , получим

$$|c|[a_1 + b_1, e] = |c|[a_1, e] + |c|[b_1, e]$$

или

$$[a_1 + b_1, |c|e] = [a_1, |c|e] + [b_1, |c|e]$$

в силу следствия 1 из свойства 2. Но  $|c|e = c$  по определению вектора  $e$ , значит, последнее равенство есть

$$[a_1 + b_1, c] = [a_1, c] + [b_1, c],$$



что и требовалось доказать.

**Следствие 1.**

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}].$$

Действительно, в силу свойств 1 и 3 имеем

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = -[\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] - [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}].$$

**Следствие 2.**

$$\left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i, \sum_{j=1}^m \mathbf{b}_j \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j].$$

**Упражнение.** Доказать самостоятельно следствие 2 (см. доказательство аналогичного следствия для скалярного произведения).

*Доказательство свойства 4.*

Рассмотрим вектор  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}]$ , его длина есть  $|\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) = 0$ , так как  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}) = 0^0$ . Только нулевой вектор имеет единичную длину, следовательно,  $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$ .

### 3.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ВЕКТОРОВ

**Теорема 1.** Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

*Доказательство.* Необходимость следует из определения векторного произведения. Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, то угол между ними равен либо 0, либо  $\pi$ , в обоих случаях синус этого угла равен нулю. Следовательно,

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0,$$

значит,  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ .

*Достаточность.* Пусть  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ . Докажем, что векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Можно сразу исключить тривиальный случай, когда один из них нулевой, так как нулевой вектор коллинеарен любому вектору. Поэтому будем считать, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  оба ненулевые, тогда  $|\mathbf{a}| > 0$  и  $|\mathbf{b}| > 0$ .

Имеем:

$$0 = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}),$$

откуда

$$\sin(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0,$$

т. е.  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны.

**Теорема 2.** Длина (модуль) векторного произведения  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  равна площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

*Доказательство.* Так как площадь параллелограмма равна произведению длин смежных сторон на синус угла между ними, то утверждение теоремы вытекает из определения 3.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{c}$  – некоторый вектор,  $\pi$  – любая содержащая его плоскость,  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, лежащий в плоскости  $\pi$  и ортогональный к  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{f}$  – единичный вектор, ортогональный к плоскости  $\pi$  и направленный так, что тройка  $\mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{f}$  – правая. Тогда для любого вектора  $\mathbf{a}$ , лежащего в плоскости  $\pi$ , справедливо

$$[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = pr_{\mathbf{e}} \mathbf{a} |\mathbf{c}| \mathbf{f}. \quad (1)$$

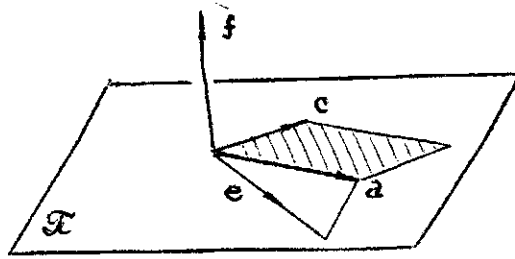


Рис. 6

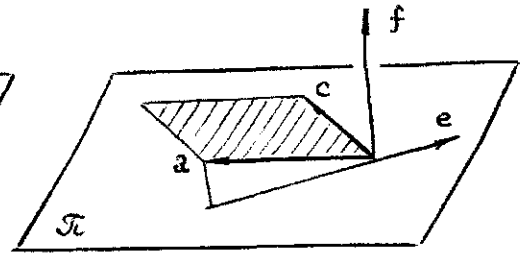


Рис. 7

*Доказательство.* Достаточно доказать, что векторы, стоящие в правой и левой частях равенства (1), имеют одинаковую длину, коллинеарны и имеют одинаковое направление.

По теореме 2 длина вектора  $[a, c]$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $a$  и  $c$ , приведенных к общему началу. Длина вектора, стоящего в правой части (1), равна  $|pr_e a| |c|$ , т.е. площади того же параллелограмма. (Если за основание параллелограмма принять вектор  $c$ , то его высота будет равна  $|pr_e a|$  (см. рис.6 и рис.7).)

Из определения векторного произведения следует, что вектор  $[a, c]$  ортогонален плоскости  $\pi$ , вектор  $pr_e a |c| f$  также ортогонален плоскости  $\pi$  (по условию теоремы  $f$  ортогонален  $\pi$ ), следовательно, эти векторы коллинеарны.

Векторы  $[a, c]$  и  $f$  одинаково направлены, когда тройка  $a, c, f$  является правой. Так как  $e, c, f$  — правая тройка по условию, то в этом случае векторы  $a$  и  $e$  лежат по одну сторону от вектора  $c$  (см. рис.6). Но тогда  $pr_e a$  является положительной и, значит,  $pr_e a |c| f$  и  $f$  одинаково направлены.

Векторы  $[a, c]$  и  $f$  противоположно направлены, когда тройка  $a, c, f$  является левой, т.е. векторы  $a$  и  $e$  лежат по разные стороны от вектора  $c$  (см. рис.7). В этом случае  $pr_e a$  отрицательна и, значит,  $pr_e a |c| f$  и  $f$  противоположно направлены, следовательно,  $[a, c]$  и  $pr_e a |c| f$  одинаково направлены. Таким образом, в любом случае  $[a, c]$  и  $pr_e a |c| f$  одинаково направлены.

Теорема доказана.

Осталось получить правило вычисления координат векторного произведения двух векторов. Мы получим это правило для прямоугольной декартовой системы координат.

**Теорема 4.** Если векторы  $a$  и  $b$  в прямоугольной декартовой системе координат заданы своими координатами

$$a = (x_1, y_1, z_1), \quad b = (x_2, y_2, z_2),$$

то их векторное произведение есть вектор  $c$  с координатами

$$[a, b] = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (2)$$

*Доказательство.* Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — правая ортонормированная тройка, являющаяся базисом прямоугольной декартовой системы координат. Значит,

$$a = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, \quad b = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3.$$

Найдем  $[a, b]$ , используя следствия 2 из второго и третьего алгебраических свойств векторного произведения

$$\begin{aligned} [a, b] &= [x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3] = \\ &= x_1 x_2 [e_1, e_1] + x_1 y_2 [e_1, e_2] + x_1 z_2 [e_1, e_3] + \\ &+ y_1 x_2 [e_2, e_1] + y_1 y_2 [e_2, e_2] + y_1 z_2 [e_2, e_3] + \\ &+ z_1 x_2 [e_3, e_1] + z_1 y_2 [e_3, e_2] + z_1 z_2 [e_3, e_3]. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2,$$

а также первое и четвертое свойства, получаем

$$[a, b] = x_1 y_2 e_3 - x_1 z_2 e_2 - x_2 y_1 e_3 + y_1 z_2 e_1 + x_2 z_1 e_2 - y_2 z_1 e_1 =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

Для запоминания формулы (2) удобно использовать символ определителя третьего порядка, а именно

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Действительно, разложим этот определитель по первой строке

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{e}_1 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \mathbf{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{e}_3 = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

**Следствие.** Если векторы

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

*Доказательство.* Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны, то по теореме 2  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ . Из формулы (2) следует, что

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0, \quad x_2 z_1 - x_1 z_2 = 0, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

т.е.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2},$$

т.е. координаты  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  пропорциональны.

Применим полученные результаты к следующей задаче. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат треугольник задан координатами своих вершин  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$  и  $C(x_3, y_3, z_3)$ . Найти его площадь.

По теореме 2 длина вектора  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$  равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Площадь этого параллелограмма равна удвоенной площади треугольника  $ABC$ , поэтому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Координаты  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  без труда вычисляются, а именно

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Тогда  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] =$

$$= \left( \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right)$$

и  $S_{\Delta ABC} =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

## ЛЕКЦИЯ 4

### СМЕШАННОЕ И ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

*"Математические теории не имеют целью открыть нам истинную природу вещей...  
Единственная цель их – систематизировать физические законы, которые мы узнаем  
из опыта, но которые мы не могли бы даже и выразить без помощи математики."*

*(Анри Пуанкаре "Наука и гипотеза")*

#### 4.1. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим три произвольных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , и  $\mathbf{c}$ . Умножим  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{b}$  векторно, а затем получившийся при этом вектор  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  скалярно умножим на вектор  $\mathbf{c}$ . В результате получим число  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$ , называемое *смешанным произведением векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$* .

**Теорема 1.** Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  определены своими прямоугольными декартовыми координатами

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

то смешанное произведение  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$  равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , т.е.

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

*Доказательство.* Вектор  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  по теореме 4 лекции 3 имеет координаты

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Скалярное произведение векторов  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и  $\mathbf{c}$  равно сумме произведений их соответствующих координат (п.2.2), т.е.

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3. \quad (2)$$

Если разложить по третьей строке определитель, стоящий в правой части равенства (1), получим

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

отсюда и из равенства (2) следует справедливость равенства (1).

Выясним геометрический смысл смешанного произведения векторов.

**Теорема 2.** Смешанное произведение  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$  равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , взятому со знаком плюс, если тройка  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  – правая, и со знаком минус, если тройка  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  – левая. Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, то  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$ .

*Доказательство.* Исключим из рассмотрения случай, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Действительно, в этом случае  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны и требуется доказать, что их смешанное произведение равно нулю. Это очевидно, так как  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ .

Будем считать, что  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны. Обозначим через  $S$  площадь параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , через  $\mathbf{e}$  обозначим вектор единичной длины, коллинеарный вектору  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  и сонаправленный с этим вектором. Тогда

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = S\mathbf{e},$$

и

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (S\mathbf{e}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{e}, \mathbf{c}) = S|\mathbf{e}| \operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = S \operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c}.$$

Если  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не компланарны, то  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c}$  с точностью до знака равна высоте  $h$  параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , если основанием служит параллелограмм, построенный на векторах  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Причем, если векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{e}$  лежат по одну сторону от плоскости, определяемой

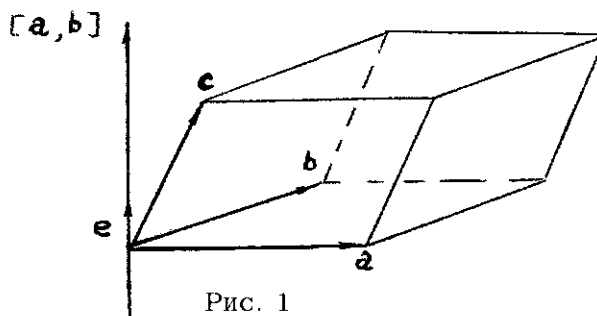


Рис. 1

векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = h$ , а если  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{e}$  лежат по разные стороны от этой плоскости, то  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = -h$ . Т.е.  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = h$ , если тройки  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$  одинаково ориентированы,  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = -h$ , если эти тройки противоположно ориентированы. Но тройка  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}$  является правой, так как  $\mathbf{e}$  имеет то же направление, что и  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Поэтому

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = S \operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = \begin{cases} Sh, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ - правая,} \\ -Sh, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ - левая.} \end{cases}$$

Итак, первое утверждение теоремы доказано.

Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  компланарны, то вектор  $\mathbf{c}$  лежит в плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , следовательно,  $\operatorname{pr}_{\mathbf{e}} \mathbf{c} = 0$ , а значит  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$ .

#### Свойства смешанного произведения векторов

1. Смешанное произведение  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$  меняет знак при перестановке местами любых двух векторов, а при циклической перестановке сомножителей оно не меняется, т.е.

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a}) = ([\mathbf{c}, \mathbf{a}], \mathbf{b})$$

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = -([\mathbf{b}, \mathbf{a}], \mathbf{c}) = -([\mathbf{c}, \mathbf{b}], \mathbf{a}) = -([\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{b}).$$

**Доказательство.** Достаточно заметить, что абсолютная величина смешанного произведения при любых перестановках сомножителей не меняется (это объем одного и того же параллелепипеда), а ориентация тройки не меняется при циклической перестановке и изменяется на противоположную при перестановке местами любых двух сомножителей.

**Следствие.** Для любых трех векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , и  $\mathbf{c}$  справедливо  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$ .

Очевидно, следует из коммутативности скалярного произведения и того, что  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = ([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{a})$ .

2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

**Доказательство.** Из теоремы 2 следует, что компланарность векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  влечет равенство нулю их смешанного произведения.

Обратно, пусть смешанное произведение векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  обращается в нуль. Если бы векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  были не компланарны, то их смешанное произведение равнялось бы отличному от нуля числу – объему параллелепипеда, натянутого на эти три вектора. Значит, из  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = 0$  следует, что  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  компланарны.

**Следствие.** В прямоугольной декартовой системе координат необходимое и достаточное условие компланарности векторов

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это следствие вытекает из теоремы 1 и свойства 2 смешанного произведения.

**Пример.** Найти объем тетраэдра, вершины которого в прямоугольной декартовой системе координат есть:  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$ ,  $D(x_4, y_4, z_4)$ .

Так как объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ , равен ушестеренному объему тетраэдра  $ABCD$ , то объем тетраэдра  $V$  равен

$$V = \frac{1}{6} |([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD})|.$$

Поскольку

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$$

то

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$

#### 4.2. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

**Определение.** Если вектор  $\mathbf{b}$  векторно умножается на вектор  $\mathbf{c}$ , а вектор  $\mathbf{a}$  векторно умножается на  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ , то получающийся при этом вектор  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$  называется *двойным векторным произведением*.

**Теорема 3.** Для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  справедлива формула

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (1)$$

*Доказательство.* Если векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  коллинеарны, то  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}$  и  $[\mathbf{a}, \mathbf{0}] = \mathbf{0}$ . Покажем, что в правой части (1) также стоит  $\mathbf{0}$ . Пусть  $\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{c}|} \mathbf{c}$  (т.е.  $\mathbf{c} = |\mathbf{c}| \mathbf{e}$ ). Так как  $\mathbf{b}$  коллинеарен  $\mathbf{c}$ , то  $\mathbf{b} = \pm |\mathbf{b}| \mathbf{e}$ , где "+" берется, если  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{e}$  одинаково направлены, и "-" — в противном случае. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \pm |\mathbf{b}| \mathbf{e}(\mathbf{a}, |\mathbf{c}| \mathbf{e}) = \pm |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (\mathbf{a}, \mathbf{e}) \mathbf{e} \\ \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{c}| \mathbf{e}(\mathbf{a}, \pm |\mathbf{b}| \mathbf{e}) = \pm |\mathbf{b}| |\mathbf{c}| (\mathbf{a}, \mathbf{e}) \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Значит, их разность равна  $\mathbf{0}$ . Таким образом, в этом случае теорема верна.

Рассмотрим случай, когда векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  не коллинеарны. Так как  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$  ортогонален плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , а вектор  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$  ортогонален вектору  $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ , то  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$  компланарны. Векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  можно взять за базис плоскости, тогда

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}. \quad (2)$$

Пусть  $\pi$  — плоскость векторов  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в плоскости  $\pi$ , ортогональный к  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$  — единичный вектор, ортогональный  $\pi$  и такой, что тройка  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{g}$  — правая (см. рис.2). Тогда (п. 3.3)

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = pr_{\mathbf{e}} \mathbf{b} |\mathbf{c}| \mathbf{g}. \quad (3)$$

Пусть  $c_0 = \frac{1}{|c|} c$ , тогда  $e, c_0, g$  образуют базис прямоугольной декартовой системы координат. Разложим вектор  $a$  по этому базису, учитывая, что его координаты равны проекциям вектора  $a$  на базисные векторы

$$a = pr_e a \cdot e + pr_{c_0} a \cdot c_0 + pr_g a \cdot g. \quad (4)$$

Умножим  $a$  векторно на  $[b, c]$  (см. формулы (4) и (3)):

$$\begin{aligned} [a, [b, c]] &= [pr_e a \cdot e + pr_{c_0} a \cdot c_0 + pr_g a \cdot g, pr_e b |c| g] = \\ &= pr_e b pr_e a |c| [e, g] + pr_e b pr_{c_0} a |c| [c_0, g] + pr_e b pr_g a |c| [g, g] = \\ &= (в силу того, что [e, g] = -c_0, [c_0, g] = e, [g, g] = 0) \\ &= -pr_e b pr_e a |c| c_0 + pr_e b pr_{c_0} a |c| e. \end{aligned}$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (2), получим

$$\alpha b + \beta c = -pr_e b pr_e a |c| c_0 + pr_e b pr_{c_0} a |c| e.$$

Умножим обе части полученного соотношения на  $e$  скалярно. Учитывая, что  $e$  ортогонален  $c$ , а значит,  $(c, e) = 0$ ,  $(c_0, e) = 0$ , получаем

$$\alpha (b, e) = pr_e b pr_{c_0} a |c| (e, e)$$

или

$$\alpha pr_e b |e| = pr_e b pr_{c_0} a |c| |e|^2,$$

откуда (в силу  $|e| = 1$ )

$$\alpha = pr_{c_0} a |c| = (a, c).$$

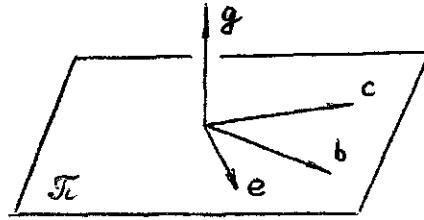


Рис. 2

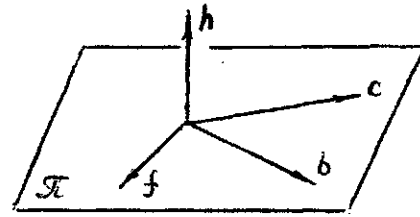


Рис. 3

Чтобы найти  $\beta$ , поменяем ролями векторы  $b$  и  $c$  и учтем, что  $[a, [c, b]] = -[a, [b, c]]$ .

Пусть  $f$  – единичный вектор в плоскости  $\pi$ , ортогональный вектору  $b$ ,  $h$  – единичный вектор, ортогональный плоскости  $\pi$  и такой, что  $f, b, h$  – правая тройка (см. рис.3). Тогда (п. 3.3)

$$[c, b] = pr_{fc} |b| h. \quad (5)$$

Пусть  $b_0 = \frac{1}{|b|} b$  (откуда  $b = |b| b_0$ ), тогда  $f, b_0, h$  образуют базис прямоугольной декартовой системы координат. Найдем координаты вектора  $a$  в этой системе и разложим его по базису:

$$a = pr_{fa} \cdot f + pr_{b_0} a \cdot b_0 + pr_{ha} \cdot h. \quad (6)$$

Используя формулы (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} [a, [c, b]] &= pr_{fa} pr_{fc} |b| [f, h] + pr_{b_0} a pr_{fc} |b| [b_0, h] + \\ &+ pr_{ha} pr_{fc} |b| [h, h] = -pr_{fa} pr_{fc} |b| b_0 + pr_{b_0} a pr_{fc} |b| f \end{aligned}$$

в силу того, что  $[b_0, h] = f$ ,  $[f, h] = -b_0$ ,  $[h, h] = 0$ .

С другой стороны

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]] = -\alpha \mathbf{b} - \beta \mathbf{c}.$$

Значит,

$$-\alpha \mathbf{b} - \beta \mathbf{c} = -pr_{\mathbf{f}} \mathbf{a} pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c} |\mathbf{b}| b_0 + pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c} |\mathbf{b}| \mathbf{f}.$$

Умножим скалярно обе части полученного равенства на  $\mathbf{f}$  (так как  $\mathbf{f}$  ортогонален  $\mathbf{b}$ , то  $(\mathbf{f}, \mathbf{b}) = 0$ ,  $(\mathbf{f}, \mathbf{b}_0) = 0$ )

$$-\alpha (\mathbf{b}, \mathbf{f}) - \beta (\mathbf{c}, \mathbf{f}) = -pr_{\mathbf{f}} \mathbf{a} pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c} |\mathbf{b}| (\mathbf{b}_0, \mathbf{f}) + pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c} |\mathbf{b}| (\mathbf{f}, \mathbf{f}),$$

или

$$-\beta pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c} |\mathbf{f}| = pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} |\mathbf{b}| pr_{\mathbf{f}} \mathbf{c},$$

откуда

$$-\beta = pr_{\mathbf{b}} \mathbf{a} |\mathbf{b}| = (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Итак,  $\beta = -(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Следовательно,

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  справедливо

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Действительно, в силу свойств векторного произведения и только что доказанной теоремы

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] &= -[\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = -\{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})\} = \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

**Следствие 2.** Для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  справедливо

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] &= \mathbf{c}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{d}) - \mathbf{d}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = \\ &= \mathbf{b}([\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{d}) - \mathbf{a}([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{d}). \end{aligned}$$

*Доказательство.* В силу формулы (1)

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{d}) - \mathbf{d}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}).$$

В силу следствия 1 и свойств смешанного произведения векторов

$$\begin{aligned} [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] &= \mathbf{b}(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \\ &= \mathbf{b}([\mathbf{a}, \mathbf{c}], \mathbf{d}) - \mathbf{a}([\mathbf{b}, \mathbf{c}], \mathbf{d}). \end{aligned}$$



## ЛЕКЦИЯ 5

### ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

*"Чтобы обрести мощь, математика должна охватывать в едином абстрактном понятии существенные черты всех физических реализаций (этого) понятия ... Математическая прямая не должна, следовательно, иметь толщину, цвет, молекулярную структуру или испытывать натяжение..."*

(М.Клейн "Краткие очерки истории математики")

#### 5.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

**Теорема 1.** Любая прямая на плоскости  $Oxy$  задается уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

где  $A, B, C$  – некоторые постоянные, причем одновременно  $A$  и  $B$  не могут обращаться в нуль. Обратно, любое уравнение вида (1) является уравнением некоторой прямой на плоскости  $Oxy$ .

*Доказательство.* Пусть нам дана на плоскости некоторая прямая  $\ell$ . Возьмем на прямой  $\ell$  некоторую точку  $M_0(x_0, y_0)$  и рассмотрим вектор  $\mathbf{n} = (A, B)$ , перпендикулярный (ортогональный) прямой  $\ell$ . Точка  $M(x, y)$  тогда и только тогда принадлежит прямой  $\ell$ , когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\mathbf{n}$  ортогональны. Действительно, если  $M$  принадлежит прямой  $\ell$ , то векторы  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\mathbf{n}$  перпендикулярны. Обратно, если  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен  $\mathbf{n}$ , то  $M$  принадлежит прямой  $\ell$ . Таким образом, прямая  $\ell$  задается условием

$$(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n}) = 0.$$

Так как  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ , то используя теорему о вычислении скалярного произведения в прямоугольной декартовой системе координат, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением прямой  $\ell$ . Его можно преобразовать следующим образом:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим через  $C$  выражение, стоящее в скобках  $C = -Ax_0 - By_0$ , тогда получаем окончательно

$$Ax + By + C = 0.$$

Обратно, пусть дано уравнение (1). Покажем, что оно является уравнением некоторой прямой на плоскости  $Oxy$ . Пусть  $x_0, y_0$  – какое-нибудь решение этого уравнения, то есть  $x_0, y_0$  удовлетворяют равенству:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \quad (3)$$

Вычитая из уравнения (1) равенство (3), получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это есть уравнение (2), которое представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и перпендикулярной вектору  $\mathbf{n} = (A, B)$ . Теорема доказана.

**Определение 1.** Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Из доказательства теоремы 1 получаем *геометрический смысл коэффициентов  $A, B$  в общем уравнении прямой (1): коэффициенты  $A$  и  $B$  представляют собой координаты вектора, перпендикулярного прямой, задаваемой уравнением (1). Этот вектор называется нормалью к прямой или нормальным вектором к прямой.*

**Следствие.** Если два общих уравнения

$$Ax + By + C = 0$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

определяют одну и ту же прямую, то найдется такое вещественное  $\alpha$ , что

$$A_1 = \alpha A, \quad B_1 = \alpha B, \quad C_1 = \alpha C, \quad (4)$$

т.е. коэффициенты этих уравнений пропорциональны.

**Доказательство.** Так как уравнения задают одну и ту же прямую, то нормали  $\mathbf{n} = (A, B)$  и  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$  коллинеарны. Так как  $\mathbf{n} \neq 0$ , то по теореме о коллинеарных векторах найдется такое вещественное число  $\alpha$ , что

$$A_1 = \alpha A, \quad B_1 = \alpha B.$$

Возьмем какую-нибудь точку на прямой, пусть  $M_0(x_0, y_0)$ , тогда после подстановки ее координат в оба уравнения получим

$$Ax_0 + By_0 + C = 0$$

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0.$$

Умножим первое из этих двух равенств на  $\alpha$  и вычтем из второго, тогда получим

$$(A_1 - \alpha A)x_0 + (B_1 - \alpha B)y_0 + (C_1 - \alpha C) = 0,$$

или

$$C_1 - \alpha C = 0,$$

откуда

$$C_1 = \alpha C.$$

Значит, соотношения (4) выполняются.

**Определение 2.** Общее уравнение прямой (1) называется *полным*, если все его коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  отличны от нуля. Если хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю, то уравнение (1) называется *неполным*.

Рассмотрим неполные уравнения прямой:

- (1) если в уравнении (1)  $C = 0$ , то уравнение  $Ax + By = 0$  определяет прямую, проходящую через начало координат;
- (2) если в (1)  $A = 0$ , то уравнение  $By + C = 0$  определяет прямую, параллельную оси  $Ox$ . Действительно, вектор нормали к этой прямой  $\mathbf{n} = (0, B)$  перпендикулярен оси  $Ox$ ;
- (3) если в (1)  $B = 0$ , то уравнение  $Ax + C = 0$  определяет прямую, параллельную оси  $Oy$ , так как ее нормаль  $\mathbf{n} = (A, 0)$  перпендикулярна к оси  $Oy$ ;
- (4) если в (1)  $A = C = 0$ , то  $By = 0$  определяет прямую  $Ox$  (ось абсцисс);
- (5) если в (1)  $B = C = 0$ , то уравнение  $Ax = 0$  определяет прямую  $Oy$  (ось ординат).

## 5.2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Рассмотрим полное уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Так как все его коэффициенты ненулевые, то его можно преобразовать сначала к виду

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1,$$

а затем к виду

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Полагая

$$a = \frac{-C}{A}, \quad b = \frac{-C}{B},$$

получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*.

Числа  $a$  и  $b$  имеют простой геометрический смысл:

они равны величинам отрезков, которые наша прямая отсекает соответственно на осях  $Ox$  и  $Oy$ .

Действительно, найдем точку пересечения  $K$  нашей прямой (1) с осью  $Ox$ . Очевидно,  $K(x, 0)$ . Подставляя ее координаты в уравнение (1), получаем  $\frac{x}{a} = 1$ , откуда  $x = a$ , следовательно,  $K(a, 0)$ . Если  $L$  — точка пересечения прямой (1) с осью  $Oy$ , то  $L(0, y)$ , тогда из (1) получаем  $\frac{y}{b} = 1$  или  $y = b$ . Значит,  $L(0, b)$ .

### 5.3. КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

**Определение.** Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть дана точка  $M_0(x_0, y_0)$ , лежащая на прямой  $l$ , и известен некоторый направляющий вектор  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  этой прямой. Напишем уравнение прямой  $l$ .

Точка  $M(x, y)$  тогда и только тогда принадлежит прямой  $l$ , когда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  коллинеарен вектору  $\mathbf{q}$ , т.е. пропорциональны координаты этих векторов. Значит, прямую  $l$  можно задать уравнением:

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}. \quad (1)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* прямой.

Вектор  $\mathbf{q} \neq 0$ , поскольку является направляющим вектором прямой, но одна из его координат может обратиться в нуль. В отношении (1) мы будем понимать пропорцию  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  как равенство  $ad = bc$ . Поэтому обращение в нуль одного из знаменателей в (1) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Пусть, например,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 \neq 0$ , тогда пропорцию  $\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}$  рассмотрим как равенство  $q_2(x - x_0) = q_1(y - y_0)$ , и так как правая часть этого равенства нулевая, то  $q_2(x - x_0) = 0$ . Из того, что  $q_2 \neq 0$  следует, что  $x - x_0 = 0$ .

**Пример 1.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(1, 2)$ ,  $B(-4, 4)$ ,  $C(-1, -2)$ . Написать уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине  $C$  и медианы, проведенной из вершины  $A$ .

**Решение.** Найдем середину стороны  $BC$ . Так как точка  $M$  делит сторону  $BC$  пополам, то ее координаты можно вычислить по формулам деления отрезка пополам

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-4 - 1}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 - 2}{2}.$$

Итак,  $M(-\frac{5}{2}, 1)$ .

Проведем через точки  $A$  и  $M$  прямую

$$\frac{x - 1}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{y - 2}{2 - 1},$$

откуда

$$2x - 2 = 7y - 14,$$

и  $2x - 7y + 12 = 0$  — уравнение искомой медианы.

Пусть  $K$  – точка пересечения биссектрисы угла  $C$  со стороной  $AB$  треугольника  $ABC$ . Из элементарной геометрии известно, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины сторон  $CB$  и  $CA$ :

$$|CB| = \sqrt{(-4+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$

$$|CA| = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Таким образом, точка  $K$  делит сторону  $\overrightarrow{AB}$  в отношении  $\lambda = \frac{2}{3}$ , тогда ее координаты находим по формулам

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{1 + \frac{2}{3}(-4)}{1 + \frac{2}{3}} = -1, \quad y_K = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{14}{5}.$$

Теперь можно написать уравнение биссектрисы  $CK$ . Направляющий вектор этой прямой  $\overrightarrow{CK} = (0, \frac{24}{5})$ , т.е. прямая параллельна оси  $Oy$ . Искомое уравнение имеет вид  $x = -1$  или  $x + 1 = 0$ .

#### 5.4. ВЕКТОРНОЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Пусть дана точка  $M_0(x_0, y_0)$ , лежащая на прямой  $l$ , и известен некоторый направляющий вектор  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  этой прямой. Получим другие уравнения прямой  $l$ . Так как вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{q}$ , и  $\mathbf{q}$  – ненулевой, то по теореме о коллинеарных векторах

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{q}$$

для некоторого вещественного числа  $t$ . Если точка  $M$  пробегает прямую  $l$ , то параметр  $t$  принимает всевозможные действительные значения. Вводя обозначения

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM},$$

$$\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0},$$

и пользуясь правилом сложения векторов, получим

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

или

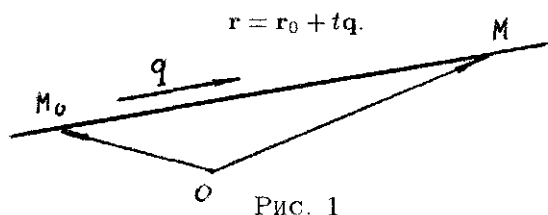
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}. \quad (1)$$


Рис. 1

Уравнение (1) называется *векторным уравнением* прямой  $l$ .

Запишем векторное уравнение, подставляя координаты участвующих в нем векторов, тогда получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов в правой и левой частях равенства, получим *параметрические уравнения* прямой  $l$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + tq_1, \\ y = y_0 + tq_2. \end{cases} \quad (2)$$

Параметрические уравнения прямой можно также получить из канонического уравнения ((1) п.5.3). Примем за параметр  $t$  каждое из соотношений (1) п.5.3. Так как один из знаменателей обязательно отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то параметр  $t$  пробегает все действительные числа (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Тогда из

$$\frac{x - x_0}{q_1} = t, \quad \frac{y - y_0}{q_2} = t$$

получаем уравнения (2).

**Пример 1.** Написать уравнение прямой  $l$ , проходящей через две различные точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ .

Так как точки  $M_1$  и  $M_2$  различны, то вектор

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ненулевой. Этот вектор можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой, тогда каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3)$$

**Пример 2.** Найти точку  $Q$ , симметричную точке  $M(-3, 8)$  относительно прямой  $3x - 4y - 9 = 0$ .

*Решение.* Сначала найдем проекцию  $P$  точки  $M$  на прямую. Для этого из точки надо опустить перпендикуляр на данную прямую. Уравнение перпендикуляра легко написать, действительно, вектор  $(3, -4)$  есть нормаль к данной прямой, следовательно, он является направляющим для искомого перпендикуляра. Кроме того, известны координаты точки, через которую проходит перпендикуляр, значит,

$$\begin{aligned} x &= -3 + 3t, \\ y &= 8 - 4t \end{aligned}$$

есть параметрические уравнения перпендикуляра.

$P(x, y)$  есть точка пересечения двух прямых, чтобы найти ее, следует решить систему

$$\begin{cases} 3x - 4y - 9 = 0 \\ x = -3 + 3t \\ y = 8 - 4t. \end{cases}$$

В результате получим  $t = 2$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ . Точка  $P(3, 0)$  есть середина отрезка  $MQ$ ; если обозначить координаты точки  $Q$  через  $(x, y)$ , то можно записать соотношение

$$\frac{-3 + x}{2} = 3, \quad \frac{8 + y}{2} = 0,$$

откуда  $x = 9$ ,  $y = -8$  — координаты искомой точки.

## 5.5. Угловой коэффициент прямой. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Возьмем общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Считаем, что в этом уравнении  $B \neq 0$ , тогда его можно разрешить относительно  $y$ :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Если обозначить  $-\frac{A}{B}$  через  $k$ ,  $-\frac{C}{B}$  — через  $b$ , то последнее уравнение переписывается в виде

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Выясним геометрический смысл коэффициента  $k$  в этом уравнении, что касается  $b = -\frac{C}{B}$ , мы выяснили его геометрический смысл, когда выводили уравнение прямой в отрезках,  $b$  — есть величина отрезка, отсекаемого прямой на оси  $Oy$ .

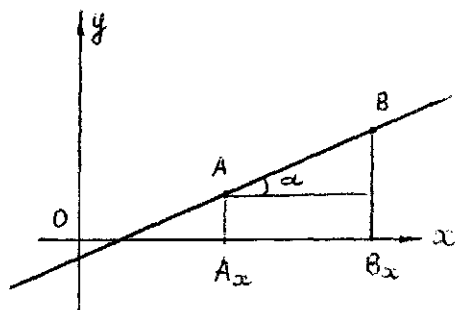


Рис. 2

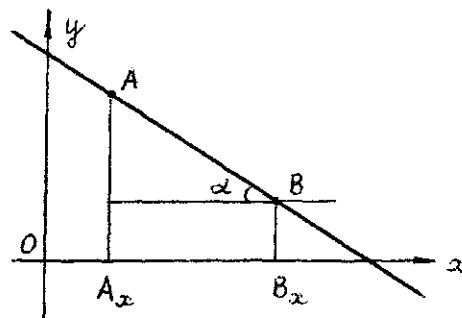


Рис. 3

**Определение 1.** Пусть  $P$  – точка пересечения прямой с осью  $Ox$ ,  $M$  – точка на оси  $Ox$  по ту сторону от  $P$ , куда направлена ось  $Ox$ ,  $N$  – точка на прямой по ту сторону от  $P$ , куда направлена ось  $Oy$ . Тогда  $\angle NPM$  называется *углом наклона прямой к оси  $Ox$* .

Рассмотрим две точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  на прямой (1). Пусть  $x_1 < x_2$ . Координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению (1), т.е.

$$y_1 = kx_1 + b,$$

$$y_2 = kx_2 + b.$$

Вычитая из второго равенства первое, получаем

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

откуда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Рассмотрим два случая:

(1) прямая наклонена к оси  $Ox$  под острым углом (рис.2);

(2) прямая наклонена к оси  $Ox$  под тупым углом (рис.3).

В первом случае, очевидно,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

во втором –

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\pi - \alpha).$$

Таким образом, в каждом случае  $k$  есть тангенс угла наклона прямой к оси  $Ox$ .

**Определение 2.** Коэффициент  $k$  называется *угловым коэффициентом прямой*, а уравнение (1) – *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение (1) можно получить также из канонического уравнения прямой

$$\frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{q_2},$$

где в качестве направляющего вектора прямой  $q = (q_1, q_2)$  можно взять вектор  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ . Умножим обе части канонического уравнения на  $q_2$

$$y - y_1 = \frac{q_2}{q_1} (x - x_1)$$

или

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Учитывая, что

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k,$$

получаем

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (2)$$

Обозначая через  $b$  постоянную  $b = y_1 - kx_1$ , получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b.$$

5.6. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ.  
УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

а) Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{q_2}$$

и

$$l_2 : \frac{x - x_2}{p_1} = \frac{y - y_2}{p_2}.$$

Задача определения угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  сводится к задаче определения угла между направляющими векторами  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  и  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  этих прямых. Угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  равен одному из двух углов между  $l_1$  и  $l_2$ , которые в сумме составляют  $\pi$ . Значит,

$$\cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}| |\mathbf{p}|} = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2}}. \quad (1)$$

Условие параллельности прямых  $l_1$  и  $l_2$  эквивалентно условию коллинеарности их направляющих векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , т.е.

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{q_2}{p_2}. \quad (2)$$

Условие перпендикулярности прямых, очевидно, эквивалентно ортогональности их направляющих векторов, т.е.  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$  или

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 = 0. \quad (3)$$

б) Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы общими уравнениями

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

и

$$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Вопрос об определении угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , очевидно, сводится к определению угла между нормальными векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  к этим прямым. Любые две пересекающиеся прямые образуют два угла, в сумме дающих  $\pi$ . Один из этих углов равен углу между нормальными векторами к прямым, достаточно определить этот угол. Так как  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2)$ , то

$$\cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2) = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (4)$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны тогда и только тогда, когда их нормали  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (5)$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  ортогональны (или  $\cos(l_1 \wedge l_2) = 0$ ), т.е.  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$ , или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (6)$$

в) Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

и

$$l_2 : y = k_2 x + b_2.$$

Тогда тангенс угла  $\varphi_1$  наклона прямой  $l_1$  к оси  $Ox$  равен  $k_1$ , а тангенс угла  $\varphi_2$  наклона прямой  $l_2$  к оси  $Ox$  равен  $k_2$ . Один из двух углов между прямыми равен

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

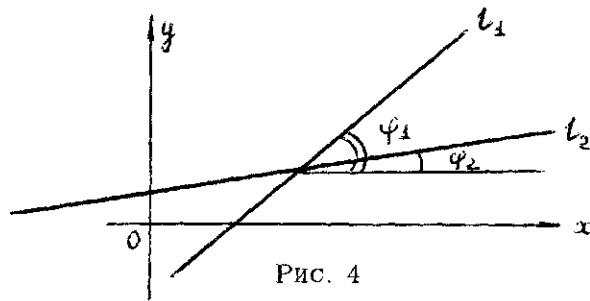


Рис. 4

Поэтому

$$\operatorname{tg}(l_1 \wedge l_2) = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом, получаем следующую формулу для определения угла  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

Если в формуле (7) поменять местами  $k_1$  и  $k_2$  (отчего изменится лишь знак на противоположный), то получим другой угол между прямыми, смежный углу  $\varphi$  ( $\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi$ ).

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны тогда и только тогда, когда  $\operatorname{tg}(l_1 \wedge l_2) = 0$ , т.е.

$$k_1 = k_2. \quad (8)$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда тангенс угла между ними не существует, т.е. знаменатель в формуле (7) обращается в нуль

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{или} \quad k_1 k_2 = -1,$$

откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (9)$$

Это и есть условие перпендикулярности двух прямых.

**Пример 1.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  известно уравнение основания  $AC$ :  $2x - 3y - 5 = 0$  и боковой стороны  $AB$ :  $x + y + 1 = 0$ . Найти уравнение другой боковой стороны, если известно, что она проходит через точку  $M(1, 1)$ .

*Решение.*

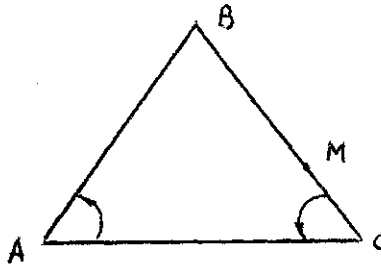


Рис. 5

Пусть  $k$  — угловой коэффициент искомой прямой  $BC$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — угловые коэффициенты прямых  $AC$  и  $AB$ , соответственно. Треугольник  $ABC$  равнобедренный, т.е. углы при основании равны, значит,

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k},$$

но  $k_1 = \frac{2}{3}$ ,  $k_2 = -1$ , откуда получаем

$$\frac{-1 - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} - k}{1 + \frac{2}{3}k},$$



следовательно,

$$k = -\frac{17}{7}$$

и уравнение стороны  $BC$  есть

$$y - 1 = -\frac{17}{7}(x - 1),$$

или  $17x + 7y - 24 = 0$ .

**Пример 2.** Зная уравнение стороны  $AC$  треугольника  $ABC$   $x + 3y - 4 = 0$  и уравнения биссектрис  $x - 2y + 11 = 0$  и  $x + y - 2 = 0$ , выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противоположной данной стороне.

*Решение.* Воспользуемся выражением тангенса угла между двумя прямыми и тем, что нам даны биссектрисы внутренних углов  $A$  и  $C$ . Обозначим через  $k_{AB}$  угловой коэффициент боковой стороны  $AB$ , через  $k_1$  — угловой коэффициент основания  $AC$ , через  $k_2$  и  $k_3$  угловые коэффициенты биссектрис угла  $A$  и угла  $C$  соответственно. Тогда

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_{AB} - k_2}{1 + k_{AB} k_2}.$$

Но  $k_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ , следовательно,

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{k_{AB} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} k_{AB}},$$

откуда  $k_{AB} = 3$ , и уравнение  $AB$  имеет вид  $y - y_0 = 3(x - x_0)$ , где  $x_0, y_0$  — координаты точки  $A$ . Для того, чтобы их найти, решаем следующую систему:

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x - 2y + 11 = 0. \end{cases}$$

В результате получаем  $x_0 = -5$ ,  $y_0 = 3$ . Таким образом, уравнение  $AB$ :

$$y - 3 = 3(x + 5),$$

или

$$3x - y + 18 = 0.$$

Аналогично, обозначая через  $k_{BC}$  угловой коэффициент прямой  $BC$ , можем написать соотношение

$$\frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3} = \frac{k_{BC} - k_3}{1 + k_{BC} k_3},$$

но  $k_3 = -1$ , следовательно,

$$\frac{-1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{k_{BC} + 1}{1 - k_{BC}},$$

и  $k_{BC} = -3$ .

Найдем координаты точки  $C$ :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$$

откуда  $C(1, 1)$ .

Уравнение боковой стороны  $BC$  запишем в виде

$$y - 1 = -3(x - 1) \quad \text{или} \quad 3x + y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат вершины  $B(x, y)$  осталось решить систему

$$\begin{cases} 3x - y + 18 = 0 \\ 3x + y - 4 = 0, \end{cases}$$

В результате получаем  $x = -\frac{7}{3}$ ,  $y = 11$ .

5.7. НОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ.  
ОТКЛОНЕНИЕ ТОЧКИ ОТ ПРЯМОЙ.  
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим произвольную прямую  $l$ . Через начало координат проведем прямую  $n$ , перпендикулярную прямой  $l$ , и обозначим через  $P$  точку пересечения  $l$  с  $n$ . На прямой  $n$  возьмем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направление которого совпадает с  $\overrightarrow{OP}$ . Если точки  $O$  и  $P$  совпадают (т.е. прямая  $l$  проходит через начало координат), то направление  $\mathbf{n}$  выберем произвольно.

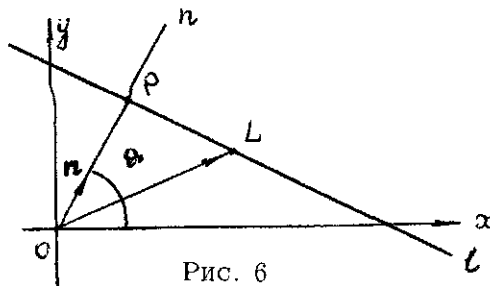


Рис. 6

Пусть  $p = |\overrightarrow{OP}|$ . Обозначим через  $\theta$  угол, который вектор  $\mathbf{n}$  образует с осью  $Ox$ . Выразим уравнение прямой  $l$  через параметр  $p$  и угол  $\theta$ . Определим координаты вектора  $\mathbf{n}$ . Так как эти координаты равны проекциям вектора  $\mathbf{n}$  на соответствующие координатные оси, длина  $\mathbf{n}$  равна единице, то

$$\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Действительно,

$$pr_{Ox}\mathbf{n} = |\mathbf{n}| \cos \theta = \cos \theta,$$

$$pr_{Oy}\mathbf{n} = |\mathbf{n}| \sin \theta = \sin \theta.$$

Точка  $L(x, y)$  тогда и только тогда принадлежит прямой  $l$ , когда проекция вектора  $\overrightarrow{OL}$  на прямую  $n$  равна  $p$ , т.е.

$$pr_n \overrightarrow{OL} = p. \quad (1)$$

По определению скалярного произведения

$$(\overrightarrow{OL}, \mathbf{n}) = |\mathbf{n}| pr_n \overrightarrow{OL} = pr_n \overrightarrow{OL} = pr_n \overrightarrow{OL}.$$

Так как  $\overrightarrow{OL} = (x, y)$ , то равенство (1) перепишется в виде

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p,$$

или

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0. \quad (2)$$

Это и есть *нормированное* уравнение прямой  $l$  или уравнение прямой  $l$  в *нормальной форме*.

**Определение 2.** Через  $d$  обозначим расстояние от точки  $M$  до прямой  $l$ .

*Отклонением* точки  $M$  от прямой  $l$  называется число  $+d$  в случае, когда точка  $M$  и начало координат лежат по разные стороны от прямой  $l$ , и число  $-d$ , если точка  $M$  и начало координат лежат по одну сторону от прямой  $l$ .

Если же начало координат лежит на прямой  $l$ , положим отклонение равным  $+d$ , если точка  $M$  лежит по ту сторону от прямой, куда направлен  $\mathbf{n}$ , и равным  $-d$  в противном случае.

Обозначать отклонение точки  $M$  от прямой  $l$  будем символом  $\delta(M, l)$ .

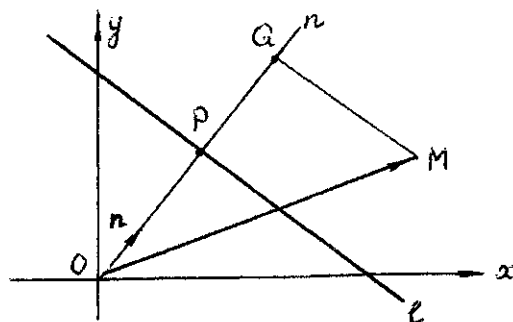


Рис. 7

**Теорема 2.** Левая часть нормированного уравнения прямой (2) равна отклонению точки  $M(x, y)$  от прямой  $l$ , определяемой уравнением (2).

*Доказательство.* Спроектируем точку  $M$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ . Пусть  $Q$  – проекция точки  $M$  на прямую  $n$ . Тогда отклонение  $\delta(M, l)$  точки  $M$  от прямой  $l$  равно величине направленного отрезка  $\overrightarrow{PQ}$  оси, определяемой вектором  $\mathbf{n}$ , то есть

$$\delta(M, l) = PQ.$$

Но

$$PQ = OQ - OP$$

(точки  $O, P, Q$  лежат на одной оси, значит, справедливо основное тождество  $OP + PQ = OQ$ ).  
Значит, в силу  $OP = p$

$$\delta(M, l) = PQ = OQ - OP = OQ - p.$$

Поскольку

$$OQ = pr_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{n}) = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

то

$$\delta(M, l) = x \cos \theta + y \sin \theta - p,$$

т.е. действительно, отклонение равно значению левой части уравнения (2). Теорема доказана.

В результате мы получили *правило* нахождения отклонения произвольной точки  $M_0(x_0, y_0)$  от произвольной прямой  $l$ , заданной нормированным уравнением (2): для нахождения  $\delta(M_0, l)$  следует в левую часть нормированного уравнения прямой  $l$  вместо  $x, y$  подставить координаты  $x_0, y_0$  точки  $M_0$ .

Это правило позволит нам также вычислить и расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $l$ . Из определения отклонения следует, что

$$\text{dist}(M_0, l) = d = |\delta(M_0, l)| = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p|.$$

Рассмотрим правило приведения общего уравнения прямой к нормированному виду. Пусть прямая  $\sigma$  задана уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Хотим написать уравнение прямой  $\sigma$  в виде (2):

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Так как оба уравнения задают одну и ту же прямую, то по следствию из теоремы 1 найдется такое вещественное число  $t$ , что

$$tA = \cos \theta, \quad tB = \sin \theta, \quad tC = -p. \quad (3)$$

Складывая квадраты правых и левых частей первых двух равенств (3), получаем

$$t^2 A^2 + t^2 B^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

или

$$t^2(A^2 + B^2) = 1,$$

откуда

$$t^2 = \frac{1}{A^2 + B^2},$$

значит,

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Уточним знак числа  $t$ , для чего используем третье соотношение из (3). По определению  $p \geq 0$ , поэтому из  $tC = -p$  следует, что  $\text{sign } t = -\text{sign } C$  (знак числа  $t$  противоположен знаку числа  $C$ ). Значит,

$$t = -\text{sign } C \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4)$$

Таким образом, для приведения общего уравнения прямой к нормированному виду, следует умножить его на *нормирующий множитель*  $t$ , определяемый по формуле (4).

**Пример 1.** Даны две точки  $A(-4, 1)$  и  $B(6, 5)$  и прямая  $2x - 3y + 2 = 0$ . Установить, пересекает ли данная прямая отрезок  $\overrightarrow{AB}$  или его продолжение за точку  $A$  или за точку  $B$ .

*Решение.* Запишем уравнение данной прямой в нормированном виде. Нормирующий множитель в данном случае равен

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{13}},$$

следовательно, нормированное уравнение прямой имеет вид

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{2}{\sqrt{13}} = 0.$$

Подставив в левую часть этого уравнения координаты точек  $A$  и  $B$ , получим отклонения  $\delta(A, l)$  и  $\delta(B, l)$  этих точек от нашей прямой:

$$\delta(A, l) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot (-4) + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 1 - \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{13}},$$

$$\delta(B, l) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot 6 + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 5 - \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Для того, чтобы данная прямая пересекала отрезок  $\overrightarrow{AB}$ , необходимо и достаточно, чтобы точки  $A$  и  $B$  лежали по разные стороны от прямой, т.е. чтобы  $\delta(A, l)$  и  $\delta(B, l)$  имели разные знаки. В нашем случае знаки  $\delta(A, l)$  и  $\delta(B, l)$  одинаковы, значит, прямая не пересекает  $\overrightarrow{AB}$ . Так как  $\delta(B, l) < \delta(A, l)$ , то точка  $B$  ближе к прямой, чем точка  $A$ , поэтому прямая, проведенная через  $A$  и  $B$ , пересекает данную за точкой  $B$ . Действительно, уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x+4}{10} = \frac{y-1}{4},$$

или  $2x - 5y + 13 = 0$ .

Найдем координаты точки пересечения двух прямых  $K(x, y)$ , для этого следует решить систему

$$\begin{cases} 2x - 5y + 13 = 0 \\ 2x - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

В результате точка  $K$  имеет координаты  $(\frac{29}{4}, \frac{11}{2})$ , т.е. действительно лежит за точкой  $B$  на прямой  $AB$ .

**Пример 2.** Дано уравнение  $x - 4y + 7 = 0$  стороны  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  и точка пересечения его диагоналей  $P(4, 7)$ . Написать уравнения остальных сторон прямоугольника, зная, что одна из них проходит через точку  $E(-3, 0)$ .

*Решение.* Сторона  $CD$  параллельна стороне  $AB$ , поэтому ее уравнение имеет вид

$$x - 4y + c = 0.$$

Отклонения точки  $P$  от сторон  $AB$  и  $CD$  противоположны по знаку и равны по абсолютной величине. Это позволит нам найти константу  $c$ . Отклонение точки  $P$  от  $AB$  получим, подставив в нормированное уравнение прямой  $AB$

$$\frac{-x + 4y - 7}{\sqrt{17}} = 0$$

координаты точки  $P$  :

$$\delta = \frac{-4 + 4 \cdot 7 - 7}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Отклонение точки  $P$  от прямой  $CD$  равно

$$\frac{-4 + 4 \cdot 7 - c}{\sqrt{17}}.$$

Приравнивая эти величины с разными знаками, получим

$$\frac{-4 + 28 - c}{\sqrt{17}} = -\sqrt{17},$$

откуда  $c = 41$ . Значит, уравнение прямой  $CD$  имеет вид

$$x - 4y + 41 = 0.$$

Точка  $E$ , очевидно, не лежит на стороне  $CD$  (в этом легко убедиться, ее координаты не удовлетворяют уравнению  $CD$ ), значит, она принадлежит либо стороне  $BC$ , либо стороне  $AD$ .

Напишем уравнение стороны прямоугольника, проходящей через точку  $E$ , перпендикулярно прямой  $AB$  и  $CD$ . Нормальный вектор  $(1, -4)$  прямой  $AB$  будет направляющим вектором этого перпендикуляра, отсюда искомое уравнение

$$\frac{x + 3}{1} = \frac{y}{-4},$$

или  $4x + y + 12 = 0$ .

Отклонение точки  $P$  от этой прямой равно взятому с противоположным знаком отклонению этой точки от параллельной стороны прямоугольника. Имеем

$$\frac{-4 \cdot 4 - 7 - 12}{\sqrt{17}} = -\frac{35}{\sqrt{17}},$$

и так как уравнение параллельной стороны имеет вид  $4x + y + c = 0$ , то

$$\frac{35}{\sqrt{17}} = \frac{-4 \cdot 4 - 7 - c}{\sqrt{17}},$$

откуда  $c = -58$ , и уравнение четвертой стороны прямоугольника есть  $4x + y - 58 = 0$ .

**Пример 3.** Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми  $2x - 9y + 5 = 0$  и  $6x + 7y - 7 = 0$ .

*Решение.* Искомые биссектрисы являются геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Таким образом, если мы возьмем на биссектрисе любую точку  $M(x, y)$ , то ее расстояния до двух данных прямых должны быть равны между собой, т.е. равны модули отклонений этой точки до данных прямых

$$\left| \frac{-2x + 9y - 5}{\sqrt{85}} \right| = \left| \frac{6x + 7y - 7}{\sqrt{85}} \right|.$$

Пусть точка  $M_1(x, y)$  лежит на той биссектрисе, которая делит пополам угол, содержащий начало координат, тогда знаки отклонений ее от двух данных прямых одинаковы, поэтому раскрываем модули следующим образом:

$$\frac{-2x + 9y - 5}{\sqrt{85}} = \frac{6x + 7y - 7}{\sqrt{85}},$$

откуда получаем уравнение биссектрисы угла:  $4x - y - 1 = 0$ .

Пусть точка  $M_2(x, y)$  лежит на биссектрисе второго угла, тогда отклонения от двух данных прямых имеют разные знаки, поэтому модули раскрываем следующим образом:

$$\frac{2x - 9y + 5}{\sqrt{85}} = \frac{6x + 7y - 7}{\sqrt{85}}.$$

После упрощений получим уравнение биссектрисы второго угла:  $x + 4y - 3 = 0$ .

Заметим, что угловые коэффициенты полученных прямых противоположны по знаку и обратны по величине, что является условием перпендикулярности прямых.

## 5.8. Пучок прямых на плоскости

**Определение.** Совокупность лежащих на данной плоскости  $\pi$  прямых, проходящих через некоторую точку  $S$  этой плоскости, называют *пучком прямых с центром в  $S$* .

Центр  $S$  пучка прямых полностью определяется заданием двух различных прямых этого пучка. Зная координаты  $S(x_0, y_0)$ , легко написать уравнение любой прямой этого пучка: для этого можно использовать уравнение прямой, проходящей через данную точку  $S(x_0, y_0)$  и имеющей заданный угловой коэффициент  $k$ . Однако было бы полезным уметь писать уравнение любой прямой пучка, не вычисляя координат точки  $S$ . Решению этой задачи и посвящена следующая теорема.

**Теорема 3.** Если

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

есть уравнения двух различных прямых, пересекающихся в некоторой точке  $S$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные, не равные одновременно нулю числа, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (1)$$

является уравнением прямой, проходящей через точку  $S$ . Любая наперед заданная прямая, проходящая через точку  $S$ , определяется уравнением (1) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Доказательство.* Сначала установим, что при любых  $\alpha$  и  $\beta$ , не равных одновременно нулю, равенство (1) представляет собой уравнение первого порядка (т.е. хотя бы один из коэффициентов при  $x$  или  $y$  не равен нулю). Соберем в (1) коэффициенты при  $x$  и при  $y$ , т.е. перепишем его в виде

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0.$$

Если бы одновременно выполнялись равенства

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$$

$$\alpha B_1 + \beta B_2 = 0,$$

то (в предположении, что  $\alpha \neq 0$ ) мы получили бы

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Последнее равенство эквивалентно условию параллельности прямых  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , что противоречит предположению о том, что они различны и пересекаются.

Значит, по крайней мере один из коэффициентов при  $x$  или  $y$  в уравнении (1) отличен от нуля, т.е. (1) есть уравнение первой степени, следовательно, определяет некоторую прямую на плоскости.

Эта прямая заведомо проходит через точку  $S(x_0, y_0)$  пересечения двух данных прямых. Действительно, так как  $S(x_0, y_0)$  принадлежит каждой из двух данных прямых, то

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда при любых  $\alpha$  и  $\beta$  получаем

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0,$$

т.е. координаты  $x_0, y_0$  точки  $S$  удовлетворяют уравнению (1).

Осталось проверить, что какова бы ни была наперед заданная прямая, проходящая через точку  $S(x_0, y_0)$ , она определяется уравнением (1) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ . Эта прямая однозначно определяется заданием еще одной отличной от  $S$  точки  $M(x_1, y_1)$ , ей принадлежащей. Поэтому достаточно доказать, что не равные одновременно нулю числа  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать так, что координаты  $x_1, y_1$  наперед заданной точки  $M$  будут удовлетворять уравнению (1) при этих значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .

Подставляя координаты точки  $M$  в равенство (1), получим

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \quad (2)$$

Полученное равенство представляет собой уравнение относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Действительно, обе круглые скобки, являющиеся коэффициентами при  $\alpha$  и  $\beta$ , обратиться в нуль не могут, так как это означало бы, что обе данные прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , проходят через точку  $M$ . (Это невозможно, так как эти прямые не совпадают и проходят через точку  $S$ , отличную от точки  $M$ .) Значит, по крайней мере одна из круглых скобок отлична от нуля. Пусть, например,

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0.$$

Тогда, произвольно задав значение  $\beta \neq 0$ , из (2) получим коэффициент  $\alpha$

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1} \beta.$$

Т.е. мы нашли такие значения чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых прямая, определяемая уравнением (1), проходит через точку  $M(x_1, y_1)$ .

Случай, когда отлична от нуля вторая из круглых скобок в (2), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

*Замечание.* Так как в уравнении пучка (1) хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от нуля, то можно записать это уравнение с одним коэффициентом, равным их отношению. Например, если  $\alpha \neq 0$ , то положив  $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ , получим уравнение пучка в виде

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (3)$$

Последнее уравнение задает все прямые пучка, проходящие через точку пересечения прямых, определяемых уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ , кроме одной — прямой, определяемой уравнением  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . (Ее нельзя получить ни при каком значении  $\lambda$ .)

## ЛЕКЦИЯ 6

### ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

*"Две [разные] точки определяют прямую и притом только одну."*  
(Евклид "Начала")

#### 6.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Плоскость в пространстве задается линейным уравнением первого порядка относительно координат  $x, y, z$  точки пространства, аналогично тому, как на плоскости уравнение прямой задается уравнением первого порядка относительно координат  $x, y$  точки плоскости.

**Теорема 1.** Любая плоскость в пространстве задается уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

где  $A, B, C, D$  – некоторые постоянные, причем одновременно  $A, B$  и  $C$  не могут обращаться в нуль. Обратно, любое уравнение вида (1) задает в пространстве некоторую плоскость.

*Доказательство.* Пусть нам дана в пространстве некоторая плоскость  $\alpha$ . Возьмем в плоскости  $\alpha$  некоторую точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и рассмотрим вектор  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ , ортогональный плоскости  $\alpha$ . Точка  $M(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит плоскости  $\alpha$ , когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$  и  $\mathbf{n}$  ортогональны. Действительно, если  $M$  лежит в плоскости  $\alpha$ , то вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  принадлежит этой плоскости, следовательно, ортогонален вектору  $\mathbf{n}$ . Обратно, если  $\overrightarrow{M_0M}$  ортогонален  $\mathbf{n}$ , то  $\overrightarrow{M_0M}$  параллелен плоскости  $\alpha$ , и так как  $M_0 \in \alpha$ , то  $M$  также принадлежит этой плоскости. Таким образом, плоскость  $\alpha$  задается условием

$$(\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{n}) = 0.$$

Так как  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , то последнее равенство принимает вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением плоскости  $\alpha$ . Его можно преобразовать следующим образом:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначим через  $D$  выражение, стоящее в скобках, тогда получаем окончательно

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Обратно, пусть дано уравнение (1). Покажем, что оно является уравнением некоторой плоскости. Пусть  $x_0, y_0, z_0$  – какое-нибудь решение этого уравнения, т.е.  $x_0, y_0, z_0$  удовлетворяют равенству:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

Вычтем уравнение (3) из (1), получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это есть уравнение (2), которое представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и перпендикулярной вектору  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ . Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 получаем геометрический смысл коэффициентов  $A, B, C$  в уравнении (1): коэффициенты  $A, B, C$  представляют собой координаты вектора, перпендикулярного плоскости, задаваемой уравнением (1). Этот вектор называется *нормалью* к плоскости.

Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости*.



**Следствие.** Если два общих уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

определяют одну и ту же плоскость, то найдется такое вещественное  $\alpha$ , что

$$A_1 = \alpha A, \quad B_1 = \alpha B, \quad C_1 = \alpha C, \quad D_1 = \alpha D, \quad (4)$$

т.е. коэффициенты этих уравнений пропорциональны.

*Доказательство.* Так как уравнения задают одну и ту же плоскость, то нормали  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  и  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  коллинеарны, значит, найдется такое вещественное число  $\alpha$ , что  $A_1 = \alpha A$ ,  $B_1 = \alpha B$ ,  $C_1 = \alpha C$  ( $\mathbf{n} \neq 0$ ). Возьмем какую-нибудь точку в плоскости, пусть  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , тогда после подстановки ее координат в оба уравнения получим

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0.$$

Умножим первое из этих двух равенств на  $\alpha$  и вычтем из второго, тогда получим

$$(A_1 - \alpha A)x_0 + (B_1 - \alpha B)y_0 + (C_1 - \alpha C)z_0 + (D_1 - \alpha D) = 0,$$

или

$$D_1 - \alpha D = 0,$$

откуда

$$D_1 = \alpha D.$$

Значит, соотношения (4) выполняются.

**Определение 1.** Общее уравнение плоскости (1) называется *полным*, если все его коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  отличны от нуля. Если хотя бы один из этих коэффициентов равен нулю, то уравнение (1) называется *неполным*.

Рассмотрим неполные уравнения плоскости:

1. если в уравнении (1)  $D = 0$ , то уравнение  $Ax + By + Cz = 0$  определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2. если в (1)  $A = 0$ , то уравнение  $By + Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Ox$ . Действительно, вектор нормали к этой плоскости  $\mathbf{n} = (0, B, C)$  перпендикулярен оси  $Ox$ ;

3. если в (1)  $B = 0$ , то уравнение  $Ax + Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Oy$ , так как ее нормаль  $\mathbf{n} = (A, 0, C)$  перпендикулярна оси  $Oy$ ;

4. если в (1)  $C = 0$ , то уравнение  $Ax + By + D = 0$  определяет плоскость, параллельную оси  $Oz$ , так как нормаль к плоскости  $\mathbf{n} = (A, B, 0)$  перпендикулярна оси  $Oz$ ;

5. если в (1)  $A = B = 0$ , то уравнение  $Cz + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oxy$ , так как эта плоскость параллельна обеим осям  $Ox$  и  $Oy$ . Если к тому же  $D = 0$ , то  $Cz = 0$  определяет плоскость  $Oxy$ ;

6. если в (1)  $A = C = 0$ , то уравнение  $By + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oxz$ , так как она параллельна осям  $Ox$  и  $Oz$ . При  $D = 0$ , уравнение  $By = 0$  определяет плоскость  $Oxz$ ;

7. если в (1)  $B = C = 0$ , то уравнение  $Ax + D = 0$  определяет плоскость, параллельную координатной плоскости  $Oyz$ , так как она параллельна осям  $Oy$  и  $Oz$ . При  $D = 0$ , уравнение  $Ax = 0$  определяет плоскость  $Oyz$ .

**Пример 1.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1, -1, 0)$  и параллельной плоскости  $2x - y + 3z - 5 = 0$ .

*Решение.* Искомая плоскость параллельна данной, поэтому вектор нормали  $\mathbf{n} = (2, -1, 3)$  к данной плоскости является нормалью и к искомой, значит, ее уравнение можно записать в виде

$$2x - y + 3z + D = 0. \quad (5)$$

Свободный член  $D$  найдем из того условия, что точка  $A(1, -1, 0)$  лежит в искомой плоскости, следовательно, ее координаты должны удовлетворять уравнению (5):

$$2 + 1 + D = 0,$$

откуда  $D = -3$ . В результате получаем уравнение искомой плоскости

$$2x - y + 3z - 3 = 0.$$

**Пример 2.** Составить уравнение плоскости, зная, что точка  $A(1, 5, -3)$  лежит в этой плоскости, и прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B(2, 4, 1)$  перпендикулярна этой плоскости.

*Решение.* Вектор  $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 4)$  лежит на прямой, перпендикулярной плоскости, следовательно, является нормалью к плоскости, поэтому уравнение плоскости можно записать в виде

$$x - y + 4z + D = 0.$$

Осталось подобрать  $D$  так, чтобы координаты точки  $A$  удовлетворяли этому уравнению:

$$1 - 5 - 12 + D = 0,$$

откуда  $D = 16$ . Таким образом, получаем уравнение

$$x - y + 4z + 16 = 0.$$

## 6.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ

Рассмотрим полное уравнение плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Так как все его коэффициенты ненулевые, то его можно преобразовать сначала к виду

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1,$$

а затем к виду

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Полагая

$$a = \frac{-D}{A}, \quad b = \frac{-D}{B}, \quad c = \frac{-D}{C},$$

получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1)$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает наша плоскость соответственно на осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Действительно, найдем точку пересечения  $K$  нашей плоскости (1) с осью  $Ox$ . Очевидно,  $K(x, 0, 0)$ . Подставляя ее координаты в уравнение (1), получаем  $\frac{x}{a} = 1$ , откуда  $x = a$ , следовательно,  $K(a, 0, 0)$ .

Если  $L$  – точка пересечения плоскости (1) с осью  $Oy$ , то  $L(0, y, 0)$ , тогда из (1) получаем  $\frac{y}{b} = 1$  или  $y = b$ . Значит,  $L(0, b, 0)$ . Наконец, если  $M$  – точка пересечения плоскости (1) с осью  $Oz$ , то она имеет координаты  $M(0, 0, z)$ . Из (1) получаем  $\frac{z}{c} = 1$ , откуда  $z = c$  и  $M(0, 0, c)$ .

**Пример.** Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях  $Ox$  и  $Oz$  отрезки, соответственно равные 4 и  $-6$  и проходящей через точку  $A(2, -7, 3)$ .

**Решение.** Так как известны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях  $Ox$  и  $Oz$ , то уравнение искомой плоскости в отрезках должно иметь вид

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{b} - \frac{z}{6} = 1.$$

Осталось найти значение параметра  $b$ . Для этого достаточно подставить в уравнение координаты точки  $A$ , которые должны удовлетворять уравнению искомой плоскости:

$$\frac{2}{4} - \frac{7}{b} - \frac{3}{6} = 1.$$

Отсюда получаем  $b = -7$ . Итак, наша плоскость имеет уравнение

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{7} - \frac{z}{6} = 1$$

или

$$21x - 12y - 14z - 84 = 0.$$

### 6.3. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ТРИ РАЗЛИЧНЫЕ ТОЧКИ, НЕ ЛЕЖАЩИЕ НА ОДНОЙ ПРЯМОЙ

Пусть  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  – три различные точки, не лежащие на одной прямой, тогда через эти точки можно провести единственную плоскость. Поставим задачу: написать уравнение этой плоскости.

Векторы  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  и  $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$  не коллинеарны, тогда  $[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}]$  есть ненулевой вектор, ортогональный искомой плоскости. Значит, нормаль к плоскости есть (в прямоугольной декартовой системе координат)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}] = \\ &= \left( \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

Точка  $M(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит нашей плоскости, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M}$  и  $\mathbf{n}$  ортогональны, т.е.  $(\overrightarrow{M_1M}, \mathbf{n}) = 0$ , или

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} (x - x_1) + \left( - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right) (y - y_1) + \\ &+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) можно получить сразу, если воспользоваться свойствами смешанного произведения векторов. Действительно, точка  $M(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит искомой плоскости, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$  компланарны, т.е.  $([\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}], \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$ . В прямоугольной декартовой системе координат последнее условие эквивалентно равенству (1).

**Пример.** Написать уравнение плоскости, в которой лежат точки  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, -1, 2)$ ,  $C(3, -5, 4)$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой (1). Так как

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -6, 4),$$

то получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая определитель в левой части равенства,

$$4(x-1) - 2z = 0.$$

Таким образом, искомая плоскость задается уравнением

$$4x - 2z - 4 = 0$$

или эквивалентным уравнением

$$2x - z - 2 = 0.$$

Отметим, что полученная плоскость параллельна оси  $Oy$ .

#### 6.4. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ.

##### ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

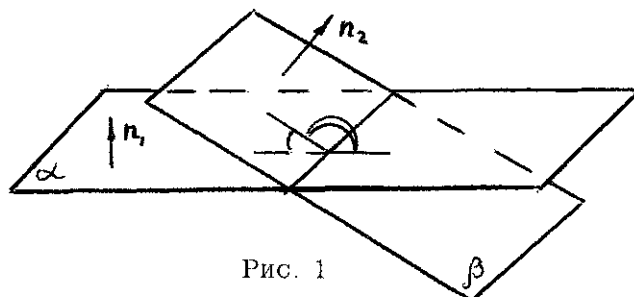


Рис. 1

Пусть две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  заданы общими уравнениями

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Вопрос об определении угла между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , очевидно, сводится к определению угла между нормальными векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  к этим плоскостям. Любые две пересекающиеся плоскости образуют два угла, в сумме дающих  $\pi$ . Один из этих углов равен углу между нормальными векторами к плоскостям, достаточно определить этот угол. Так как  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , то

$$\cos(\alpha \wedge \beta) = \cos(\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2) = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (1)$$

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны тогда и только тогда, когда их нормали  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (2)$$

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  ортогональны ( $\cos(\alpha \wedge \beta) = 0$ ), т.е.  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$ , или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (3)$$

Две плоскости в пространстве могут:

- а) пересекаться по прямой;
- б) быть параллельными;
- в) совпадать.

Условие совпадения плоскостей мы получили в следствии после теоремы 1. Условие параллельности плоскостей есть условие (2). Если плоскости не параллельны, то они, очевидно, пересекаются по прямой. Таким образом, если условие (2) не выполняется, то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются.

**Пример 1.** Установить взаимное расположение каждой из следующих пар плоскостей в пространстве:

$$\begin{aligned} \text{а) } & 2x + 3y - 5z + 6 = 0, & 4z + 6y - 10z - 1 = 0; \\ \text{б) } & 2x - y + 3z - 7 = 0, & 2x + y - z + 8 = 0. \end{aligned}$$

*Решение.* В случае а) нормали к плоскостям  $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -5)$  и  $\mathbf{n}_2 = (4, 6, -10)$ , очевидно, коллинеарны

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}.$$

Плоскости не совпадают, так как для свободных членов пропорция нарушается  $\frac{6}{-1} \neq \frac{1}{2}$ .

В случае б) плоскости не параллельны, так как не коллинеарны их нормали, следовательно, эти плоскости пересекаются. Найдем угол между ними. По формуле (3) получаем

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0,$$

значит, они перпендикулярны и угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ .

**Пример 2.** Через точку  $E(1, -1, 2)$  провести плоскость, перпендикулярную к плоскости  $3x + y - 2z + 7 = 0$  и образующую с плоскостью  $x - y + z - 1 = 0$  угол  $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

*Решение.* Будем искать нормаль  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  к искомой плоскости. Так как эта плоскость перпендикулярна первой из данных двух плоскостей, то должно выполняться условие

$$3A + B - 2C = 0. \quad (4)$$

Так как угол между искомой и второй из данных плоскостей равен  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ , то по формуле (1) получаем

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{A - B + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{3}}. \quad (5)$$

В результате у нас есть два уравнения (4), (5) для определения  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Можно попробовать выразить  $A$  и  $B$  через  $C$ , но второе уравнение нелинейно. Добавим к нашим уравнениям третье, рассуждая следующим образом: любой ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости, является нормалью к этой плоскости, поэтому длину его можно выбрать произвольно. Пусть

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{6}.$$

Тогда для отыскания  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеем систему

$$\begin{cases} 3A + B - 2C = 0 \\ A - B + C = 2 \\ A^2 + B^2 + C^2 = 6. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выразим  $C$  и  $B$  через  $A$

$$B = 5A - 4, \quad C = 4A - 2$$

и подставим эти выражения в последнее

$$A^2 + (5A - 4)^2 + (4A - 2)^2 = 6$$

или

$$42A^2 - 56A + 14 = 0,$$

откуда находим два возможных значения  $A$ : 1 и  $\frac{1}{3}$ .

При  $A = 1$  имеем  $B = 1$ ,  $C = 2$ , при  $A = \frac{1}{3}$  получаем  $B = -\frac{7}{3}$ ,  $C = -\frac{2}{3}$ .  
Значит, получаем две плоскости

$$\begin{aligned}x + y + 2z + D_1 &= 0, \\ \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}y - \frac{2}{3}z + D_2 &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя координаты точки  $E$  в каждое, окончательно находим

$$x + y + 2z - 4 = 0$$

и

$$\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} = 0.$$

### 6.5. ВЕКТОРНОЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  – неколлинеарные векторы, лежащие в плоскости  $\alpha$  (или параллельные этой плоскости),  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – точка, лежащая в этой плоскости. Так как  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  не коллинеарны, то они образуют базис в плоскости  $\alpha$ , значит, любой другой вектор, лежащий в этой же плоскости, можно представить как линейную комбинацию векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Точка  $M(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит плоскости  $\alpha$ , когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  компланарны, т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = au + bv,$$

где  $u, v$  – некоторые вещественные числа. Если точка  $M$  пробегает плоскость, то числа  $u, v$  принимают всевозможные значения.

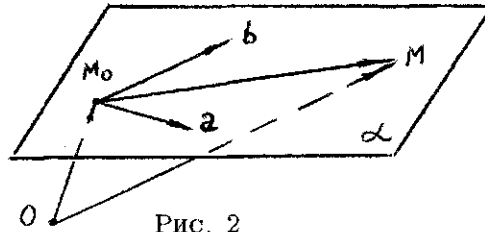


Рис. 2

Рассмотрим векторы:  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$  и  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ . Очевидно, по правилу сложения векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M},$$

откуда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + au + bv, \quad (1)$$

где  $u, v$  – параметры, принимающие всевозможные действительные значения.

Уравнение (1) называется *векторным уравнением плоскости  $\alpha$* . Запишем уравнение (1) в координатах. Так как

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (x, y, z), & \mathbf{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0), \\ \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3), & \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3),\end{aligned}$$

то (1) перепишется в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} v.$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, стоящих в левой и правой частях равенства, получаем *параметрические уравнения плоскости*:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v, \end{cases} \quad (2)$$

где  $u, v$  – параметры.

**Пример 1.** Составить параметрические и общее уравнения плоскости, проходящей через точку  $A(1, 1, -1)$  и параллельной векторам  $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$  и  $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$ .

*Решение.* По формулам (2) получаем параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 1 + u + 2v \\ y = 1 - v \\ z = -1 + u + 3v. \end{cases}$$

Для нахождения общего уравнения, вычислим координаты вектора - нормали к плоскости. Этот вектор перпендикулярен двум неколлинеарным векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , поэтому может быть найден как их векторное произведение

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.$$

Значит, уравнение плоскости имеет вид

$$x - y - z + D = 0.$$

Подставляя в него координаты точки  $A(1, 1, -1)$ , находим  $D = -1$ . Окончательно получаем

$$x - y - z - 1 = 0.$$

Это уравнение также можно получить из следующих соображений: точка  $M(x, y, z)$  лежит в искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  компланарны, т.е. их смешанное произведение равно нулю. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

есть искомое уравнение.

**Пример 2.** Установить взаимное расположение плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha: x = 1 + u + v, \quad y = -2 - u + v, \quad z = 3 + u - 2v;$$

$$\beta: x = 3 - u + 2v, \quad y = 4 + u, \quad z = 2 - u - v.$$

*Решение.* Один способ заключается в том, чтобы перейти к общим уравнениям плоскостей (как в примере 1) и воспользоваться формулами п.6.4.

Второй - в том, чтобы выяснить взаимное расположение плоскостей, не переходя к их общим уравнениям. Нам известно по два неколлинеарных вектора, лежащих в каждой из плоскостей

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 1), \quad \mathbf{b}_1 = (1, 1, -2), \quad (\text{для плоскости } \alpha)$$

$$\mathbf{a}_2 = (-1, 1, -1), \quad \mathbf{b}_2 = (2, 0, -1), \quad (\text{для плоскости } \beta)$$

и по точке в каждой из них

$$A(1, -2, 3) \in \alpha, \quad B(3, 4, 2) \in \beta.$$

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \overrightarrow{AB}$  все лежат в одной плоскости, т.е. ранг этой системы векторов равен 2.

Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны (не совпадают) тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$  компланарны, но вектор  $\overrightarrow{AB}$  не лежит с ними в одной плоскости, т.е. ранг системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$  равен 2, а ранг системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \overrightarrow{AB}$  равен 3.

Наконец,  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда  $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$  не компланарны, т.е. ранг этой системы векторов равен 3.

Посчитаем ранги двух матриц

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

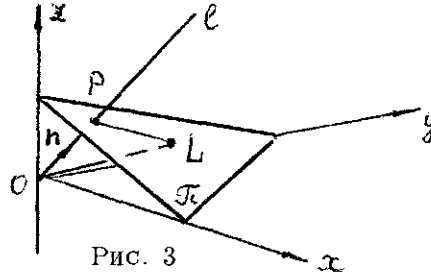
Так как

$$\text{rang } P = 2, \quad \text{rang } L = 3,$$

то плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны (не совпадают).

## 6.6. НОРМИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим произвольную плоскость  $\pi$ . Через начало координат проведем прямую  $l$ , перпендикулярную плоскости  $\pi$  и обозначим через  $P$  точку пересечения  $l$  с  $\pi$ . На прямой  $l$  возьмем единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направление которого совпадает с  $\overrightarrow{OP}$ . Если точки  $O$  и  $P$  совпадают (т.е. плоскость  $\pi$  проходит через начало координат), то направление  $\mathbf{n}$  выберем произвольно.



Пусть  $p = |\overrightarrow{OP}|$ . Обозначим через  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, которые вектор  $\mathbf{n}$  образует с осями  $Ox, Oy, Oz$ , соответственно. Выразим уравнение плоскости  $\pi$  через параметр  $p$  и углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Определим координаты вектора  $\mathbf{n}$ . Так как эти координаты равны проекциям вектора  $\mathbf{n}$  на соответствующие координатные оси, длина  $\mathbf{n}$  равна единице, то

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Действительно,

$$pr_{Ox}\mathbf{n} = |\mathbf{n}| \cos \alpha = \cos \alpha,$$

$$pr_{Oy}\mathbf{n} = |\mathbf{n}| \cos \beta = \cos \beta,$$

$$pr_{Oz}\mathbf{n} = |\mathbf{n}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$

Точка  $L(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит плоскости  $\pi$ , когда проекция вектора  $\overrightarrow{OL}$  на прямую  $l$  равна  $p$ , то есть

$$pr_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OL} = p. \quad (1)$$

По определению скалярного произведения

$$(\overrightarrow{OL}, \mathbf{n}) = |\mathbf{n}| pr_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OL} = pr_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OL} = pr_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OL}.$$

Так как  $\overrightarrow{OL} = (x, y, z)$ , то равенство (1) перепишется в виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

или

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (2)$$

Это и есть *нормированное* уравнение плоскости  $\pi$ .

Заметим, что так как  $|\mathbf{n}| = 1$ , то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Эти косинусы называются *направляющими косинусами* вектора  $\mathbf{n}$ .

**Определение 2.** Через  $d$  обозначим расстояние от точки до плоскости.

*Отклонением* точки  $M$  от плоскости  $\pi$  называется число  $+d$  в случае, когда точка  $M$  и начало координат лежат по разные стороны от плоскости  $\pi$ , и число  $-d$ , если точка  $M$  и начало координат лежат по одну сторону от плоскости  $\pi$ .

Если же начало координат лежит на плоскости  $\pi$ , положим отклонение равным  $+d$ , если точка  $M$  лежит по ту сторону от плоскости, куда направлен  $\mathbf{n}$ , и равным  $-d$  в противном случае.



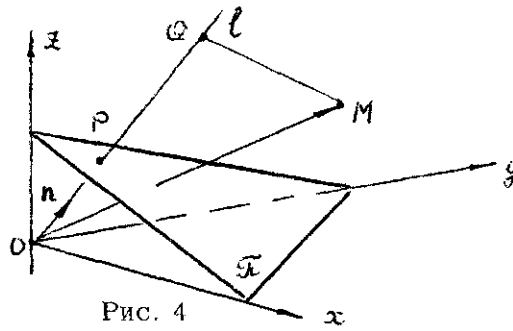


Рис. 4

Обозначать отклонение точки  $M$  от плоскости  $\pi$  будем символом  $\delta(M, \pi)$ .

**Теорема 2.** Левая часть нормированного уравнения плоскости (2) равна отклонению точки  $M(x, y, z)$  от плоскости  $\pi$ , определяемой уравнением (2).

*Доказательство.* Спроектируем точку  $M$  на ось, определяемую вектором  $\mathbf{n}$ . Пусть  $Q$  — проекция точки  $M$  на прямую  $l$ . Тогда отклонение  $\delta(M, \pi)$  точки  $M$  от плоскости  $\pi$  равно величине направленного отрезка  $\overrightarrow{PQ}$  оси, определяемой вектором  $\mathbf{n}$ , т.е.  $\delta(M, \pi) = PQ$ . Но  $PQ = OQ - OP$  (точки  $O, P, Q$  лежат на одной оси, значит, справедливо основное тождество  $OP + PQ = OQ$ ). В силу  $OP = p$

$$\delta(M, \pi) = PQ = OQ - OP = OQ - p.$$

Поскольку

$$OQ = pr_{\mathbf{n}} \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM}, \mathbf{n}) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

то

$$\delta(M, \pi) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p,$$

т.е. действительно, отклонение равно значению левой части уравнения (2). Теорема доказана.

В результате мы получили *правило* нахождения отклонения произвольной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  от произвольной плоскости  $\pi$ , заданной нормированным уравнением (2): для нахождения  $\delta(M_0, \pi)$  следует в левую часть нормированного уравнения плоскости  $\pi$  вместо  $x, y, z$  подставить координаты  $x_0, y_0, z_0$  точки  $M_0$ .

Это правило позволит нам также вычислить и расстояние от точки  $M_0$  до плоскости  $\pi$ . Из определения отклонения следует, что

$$\text{dist}(M_0, \pi) = d = |\delta(M_0, \pi)| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

Рассмотрим правило приведения общего уравнения плоскости к нормированному виду. Пусть плоскость  $\sigma$  задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Хотим написать уравнение плоскости  $\sigma$  в виде (2):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Так как оба уравнения задают одну и ту же плоскость, то по следствию из теоремы 1 найдется такое вещественное число  $t$ , что

$$tA = \cos \alpha, \quad tB = \cos \beta, \quad tC = \cos \gamma, \quad tD = -p. \quad (3)$$

Складывая квадраты правых и левых частей первых трех равенств (3), получаем

$$t^2 A^2 + t^2 B^2 + t^2 C^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

$$t^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$

откуда

$$t^2 = \frac{1}{A^2 + B^2 + C^2},$$

значит,

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Уточним знак числа  $t$ , для чего используем четвертое соотношение из (3). По определению  $p \geq 0$ , поэтому из  $tD = -p$  следует, что  $\text{sign } t = -\text{sign } D$  (знак числа  $t$  противоположен знаку числа  $D$ ). Значит,

$$t = -\text{sign } D \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4)$$

Таким образом, для приведения общего уравнения плоскости к нормированному виду, следует умножить его на нормирующий множитель  $t$ , определяемый по формуле (4).

**Пример 1.** Даны уравнения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$2x - 3y + 6z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad 4x + 7y - 4z - 7 = 0.$$

Найти уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов, образованных данными плоскостями.

*Решение.* Запишем уравнения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  в нормированном виде, используя полученное правило. Нормирующий множитель  $t_1$  для плоскости  $\alpha$ , очевидно, равен

$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = -\frac{1}{7}.$$

Нормирующий множитель  $t_2$  для плоскости  $\beta$  равен

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{9}.$$

Значит,

$$\alpha: -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{5}{7} = 0,$$

$$\beta: \frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z - \frac{7}{9} = 0.$$

Если точка  $M(x, y, z)$  принадлежит биссекторной плоскости, то ее отклонения  $\delta(M, \alpha)$  и  $\delta(M, \beta)$  равны соответствующим левым частям нормированных уравнений. Для одной из биссекторных плоскостей, отвечающей тому двугранному углу, в котором лежит начало координат, эти отклонения равны по модулю и по знаку, т.е.

$$\delta(M, \alpha) = \delta(M, \beta).$$

Для другой биссекторной плоскости отклонения равны по модулю и противоположны по знаку, т.е.

$$\delta(M, \alpha) = -\delta(M, \beta).$$

Таким образом, получаем искомые уравнения:

$$-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{5}{7} = \frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z - \frac{7}{9}$$

и

$$-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{5}{7} = -\frac{4}{9}x - \frac{7}{9}y + \frac{4}{9}z + \frac{7}{9}.$$

Упрощая их, окончательно получаем:

$$23x + 11y + 13z - 2 = 0$$

и

$$5x + 38y - 41z - 47 = 0.$$

**Пример 2.** Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между плоскостями

$$\alpha : 2x - 3y + 6z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad \beta : 4x + 7y - 4z - 7 = 0,$$

в котором лежит точка  $E(1, -2, 3)$ .

*Решение.* Найдем отклонения точки  $E$  от каждой из плоскостей (см. пример 1)

$$\delta(E, \alpha) = -\frac{2}{7} - \frac{6}{7} - \frac{18}{7} - \frac{5}{7} = -\frac{31}{7} < 0,$$

$$\delta(E, \beta) = -\frac{4}{9} - \frac{14}{9} - \frac{12}{9} - \frac{7}{9} = -\frac{29}{9} < 0.$$

Значит, отклонения точки  $M(x, y)$ , лежащей в биссекторной плоскости, от  $\alpha$  и  $\beta$  должны иметь одинаковые знаки, поэтому искомая плоскость задается уравнением

$$\delta(M, \alpha) = \delta(M, \beta)$$

или

$$23x + 11y + 13z - 2 = 0.$$

**Пример 3.** Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости  $3x + 2y - 6z + 7 = 0$  и отстоящей от нее на расстояние 3.

*Решение.* Нормируем уравнение данной плоскости

$$-\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - 1 = 0.$$

Искомая плоскость параллельна данной, поэтому ее нормированное уравнение имеет вид

$$-\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + d = 0.$$

В силу того, что в нормированном уравнении плоскости (2) параметр  $p$  равен расстоянию от начала координат до плоскости, расстояние между нашими двумя плоскостями равно

$$|d + 1| = 3,$$

откуда  $d = 2$  и  $d = -4$ .

Таким образом, искомыми являются две плоскости

$$-\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + 2 = 0$$

и

$$-\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - 4 = 0,$$

или

$$3x + 2y - 6z - 14 = 0$$

и

$$3x + 2y - 6z + 28 = 0.$$

## 6.7. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Определение.** Любой ненулевой вектор, параллельный прямой, называется *направляющим* вектором этой прямой.

Пусть дана точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , лежащая на прямой  $l$ , и известен некоторый направляющий вектор  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  этой прямой. Напишем уравнение прямой  $l$ .

Точка  $M(x, y, z)$  тогда и только тогда принадлежит прямой  $l$ , когда вектор  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  коллинеарен вектору  $\mathbf{q}$ , т.е. пропорциональны координаты этих векторов. Значит, прямую  $l$  можно задать уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3}. \quad (1)$$

Эти уравнения называются *каноническими* уравнениями прямой.

Вектор  $\mathbf{q} \neq 0$ , поскольку является направляющим вектором прямой, но одна или две его координаты могут обращаться в нуль. В отношениях (1) мы будем понимать всякую пропорцию  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  как равенство  $ad = bc$ . Поэтому обращение в нуль одного из знаменателей в (1) означает обращение в нуль и соответствующего числителя. Пусть, например,  $q_1 = 0, q_3 \neq 0$ , тогда пропорцию  $\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{z - z_0}{q_3}$  рассмотрим как равенство  $q_3(x - x_0) = q_1(z - z_0)$ , и так как правая часть этого равенства нулевая, то  $q_3(x - x_0) = 0$ . Из того, что  $q_3 \neq 0$  следует, что  $x - x_0 = 0$ .

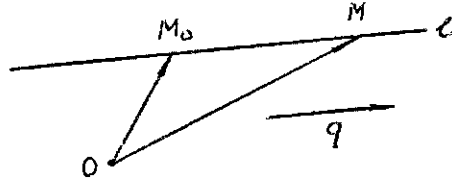


Рис. 5

Можно получить и другие уравнения прямой  $l$ . Так как вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{q}$ , и  $\mathbf{q}$  — ненулевой, то по теореме о коллинеарных векторах

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{q}$$

для некоторого вещественного числа  $t$ . Если точка  $M$  пробегает прямую  $l$ , то параметр  $t$  принимает всевозможные действительные значения. Вводя обозначения  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$  и пользуясь правилом сложения векторов, получим

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}$$

или

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{q}. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется *векторным* уравнением прямой  $l$ .

Запишем векторное уравнение, подставляя координаты участвующих в нем векторов, тогда получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Приравнявая соответствующие координаты векторов в правой и левой частях равенства, получим *параметрические* уравнения прямой  $l$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + tq_1, \\ y = y_0 + tq_2, \\ z = z_0 + tq_3. \end{cases} \quad (3)$$

Параметрические уравнения прямой можно также получить из канонических уравнений (1). Примем за параметр  $t$  каждое из соотношений (1). Так как один из знаменателей в (1) обязательно отличен от нуля, а соответствующий числитель может принимать какие угодно значения, то параметр  $t$  пробегает все действительные числа (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Тогда из

$$\frac{x - x_0}{q_1} = t, \quad \frac{y - y_0}{q_2} = t, \quad \frac{z - z_0}{q_3} = t$$

получаем уравнения (3).

Найдем уравнение прямой, проходящей через две различные точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

Так как точки  $M_1$  и  $M_2$  различны, то вектор

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ненулевой. Этот вектор можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой, тогда канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

### 6.8. ПРЯМАЯ КАК ЛИНИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Любые две не параллельные плоскости пересекаются по прямой, поэтому прямую еще можно задавать как линию пересечения двух плоскостей.

Пусть

$$\alpha : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\beta : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad (1)$$

две не параллельные плоскости, значит, векторы

$$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

не коллинеарны. Покажем, как от задания прямой  $l$  системой (1) перейти к каноническим уравнениям этой прямой.

Направляющий вектор  $\mathbf{q}$  прямой  $l$  должен быть ортогонален обоим векторам нормалей  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , так как  $l$  лежит в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому положим  $\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ . Очевидно,  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ , так как  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  не коллинеарны, и  $\mathbf{q}$  ортогонален  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  (по определению векторного произведения).

Значит,

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3,$$

и координаты вектора  $\mathbf{q}$  есть

$$\mathbf{q} = (B_1 C_2 - B_2 C_1, A_2 C_1 - A_1 C_2, A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Найдем координаты какой-либо точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащей прямой  $l$ . Для этого надо найти какое-нибудь решение системы (1). Поскольку  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ , то хотя бы одна из его координат отлична от нуля. Пусть  $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ , тогда в качестве  $z_0$  возьмем произвольное вещественное число и подставим его в систему (1):

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = -D_1 - C_1 z_0 \\ A_2 x + B_2 y = -D_2 - C_2 z_0. \end{cases}$$

Это система из двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , причем главный определитель ее  $A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$ . Значит, ее решение можно найти, например, по правилу Крамера

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1 z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2 z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 - C_1 z_0 \\ A_2 & -D_2 - C_2 z_0 \end{vmatrix}}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Теперь нетрудно записать канонические уравнения прямой  $l$ , так как нам известен ее направляющий вектор и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , лежащая на  $l$ :

$$\frac{x - x_0}{B_1 C_2 - B_2 C_1} = \frac{y - y_0}{A_2 C_1 - A_1 C_2} = \frac{z - z_0}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

**Пример 1.** Составить канонические уравнения ортогональной проекции прямой

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{2}$$

на плоскость  $x + y - z + 3 = 0$ .

*Решение.* Проведем через прямую плоскость, перпендикулярную данной плоскости, тогда линия пересечения двух плоскостей и даст искомую проекцию. Для построения плоскости имеем: направляющий вектор прямой  $\mathbf{p} = (5, -2, 2)$ , нормаль к данной плоскости  $\mathbf{n} = (1, 1, -1)$  и точку  $A(1, -1, 2)$  на прямой. Так как оба вектора  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{n}$  параллельны проектирующей плоскости, а точка  $A$  в ней лежит, то ее уравнение есть

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$7(y+1) + 7(z-2) = 0,$$

или

$$y + z - 1 = 0.$$

Линию пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

следует задать каноническими уравнениями, поэтому найдем направляющий вектор  $\mathbf{q}$  прямой (как векторное произведение нормалей к данным плоскостям)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

откуда  $\mathbf{q} = (2, -1, 1)$ .

Решая систему (2), получим

$$\begin{aligned} x &= -2 - 2y \\ z &= 1 - y, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

откуда при  $y = 0$  получаем  $x = -2$ ,  $z = 1$ . Значит, точка  $M(-2, 0, 1)$  лежит на искомой прямой. В результате уравнение проекции есть

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

#### 6.9. Угол между прямыми в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{q_2} = \frac{z-z_1}{q_3}$$

и

$$l_2 : \frac{x-x_2}{p_1} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{p_3}.$$

Задача определения угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  сводится к задаче определения угла между направляющими векторами  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  и  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  этих прямых. Угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  равен одному из двух углов между  $l_1$  и  $l_2$ , которые в сумме составляют  $\pi$ . Значит,

$$\cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{|\mathbf{q}| |\mathbf{p}|} = \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}. \quad (1)$$

Условие параллельности прямых  $l_1$  и  $l_2$  эквивалентно условию коллинеарности их направляющих векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , т.е.

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{q_2}{p_2} = \frac{q_3}{p_3}. \quad (2)$$

Условие перпендикулярности прямых, очевидно, эквивалентно ортогональности их направляющих векторов, т.е.  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$  или

$$q_1 p_1 + q_2 p_2 + q_3 p_3 = 0. \quad (3)$$

Две прямые принадлежат одной плоскости, если они либо параллельны, либо пересекаются. Точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  лежит на прямой  $l_1$ , точка  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  лежит на прямой  $l_2$ . Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости, то векторы  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  компланарны. Обратно, если векторы  $\overrightarrow{M_1 M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  компланарны, то это означает, что  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости. Таким образом,  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда  $([\overrightarrow{M_1 M_2}, \mathbf{q}], \mathbf{p}) = 0$ .

Это условие в прямоугольной декартовой системе координат принимает вид

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

**Пример 1.** Даны три прямые

$$\begin{aligned} l_1: & x = 2 - t, \quad y = -1 + t, \quad z = 3t; \\ l_2: & x = -1 + 2t, \quad y = t, \quad z = 3 - 2t; \\ l_3: & x = 1 + 5t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = -3 - 4t. \end{aligned}$$

Найти уравнение прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой.

*Решение.* Искомую прямую обозначим через  $l$ . Так как  $l$  пересекает  $l_1$ , то обе они лежат в одной плоскости  $\alpha$ . Так как  $l$  пересекает  $l_2$ , то обе они лежат в одной плоскости  $\beta$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не параллельны, если направляющие векторы прямых  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l$  не компланарны. В этом случае линия пересечения  $\alpha$  и  $\beta$  должна, очевидно, совпасть с  $l$ .

По условию  $l$  параллельна  $l_3$ , поэтому в качестве направляющего вектора  $\mathbf{r}$  прямой  $l$  можно взять

$$\mathbf{r} = (5, 2, -4).$$

Проверим, что направляющие векторы прямых  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l$  не компланарны. Очевидно, достаточно проверить, что смешанное произведение этих векторов отлично от нуля:

$$([\mathbf{p}, \mathbf{q}], \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -5.$$

Уравнение плоскости  $\alpha$  есть

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$10x - 11y + 7z - 31 = 0.$$

Уравнение плоскости  $\beta$  есть

$$\begin{vmatrix} x + 1 & y & z - 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$2y + z - 3 = 0.$$

Линия пересечения  $\alpha$  и  $\beta$

$$\begin{cases} 10x - 11y + 7z - 31 = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

и есть прямая  $l$ . Из (5) получаем

$$z = 3 - 2y, \quad x = \frac{5y + 2}{2}, \quad y \in \mathbb{R},$$

откуда при  $y = 2$  имеем  $x = 6$ ,  $z = -1$ .

Значит, точка  $M(6, 2, -1)$  принадлежит  $l$ . Так как  $\mathbf{r}$  — направляющий вектор прямой  $l$ , то ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x - 6}{5} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 1}{-4}.$$

**Пример 2.** Написать уравнения биссектрисы острого угла между прямой

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = 5t$$

и ее проекцией из точки  $A(1, -1, 1)$  на плоскость  $x + y - z - 7 = 0$ .

*Решение.* Напишем уравнение проектирующей плоскости, которая содержит данную прямую и проходит через точку  $A$ . Так как точка  $B(1, 2, 0)$  (точка на данной прямой) также лежит в проектирующей плоскости, то в ней лежит и вектор  $\overrightarrow{AB} = (0, 3, -1)$ , а также направляющий вектор данной прямой  $\mathbf{p} = (4, -3, 5)$ , поэтому

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ 4 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$3x - y - 3z - 1 = 0$$

есть ее уравнение.

Пересекая две плоскости, получаем проекцию прямой на плоскость:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор прямой есть

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_3.$$

Возьмем коллинеарный ему вектор  $\mathbf{q} = (1, 0, 1)$  в качестве направляющего вектора проекции. Найдем угол между направляющими векторами двух прямых

$$\cos(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \frac{4 + 5}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2} \sqrt{50}} = \frac{9}{10}.$$

Так как  $\cos(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) > 0$ , то угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  острый. Найдем вектор, лежащий на биссектрисе угла между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , он будет направляющим вектором искомой прямой. Это, например, вектор равный

$$\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \left( \frac{4}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{9}{5\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{10}{5\sqrt{2}} \right),$$



или коллинеарный ему вектор  $\mathbf{r} = (9, -3, 10)$ .

Осталось найти точку, через которую проходит биссектриса. Очевидно, это точка пересечения данных прямой и плоскости

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 3t, \\ z = 5t \\ x + y - z - 7 = 0, \end{cases}$$

откуда  $t = -1$  и  $x = -3, y = 5, z = -5$ .

Таким образом, канонические уравнения биссектрисы имеют вид

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+5}{10}.$$

#### 6.10. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Две прямые

$$l_1: \frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{q_2} = \frac{z-z_1}{q_3}$$

и

$$l_2: \frac{x-x_2}{p_1} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{p_3}$$

в пространстве могут:

- а) скрещиваться;
- б) пересекаться по точке;
- в) быть параллельными;
- г) совпадать.

Если прямые скрещиваются, то векторы  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  и  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  не компланарны. И наоборот, если  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  не компланарны, то прямые  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются. Таким образом,  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются тогда и только тогда, когда  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  не компланарны, т.е.

$$([\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{q}], \mathbf{p}) \neq 0.$$

В прямоугольной декартовой системе координат это условие можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются по точке, если они лежат в одной плоскости и направляющие векторы их не коллинеарны, т.е. выполняется условие (4) п.6.9 и векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  не коллинеарны (линейно независимы).

Прямые параллельны, когда коллинеарны их направляющие векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ . Если  $l_1$  и  $l_2$  не совпадают, то вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , соединяющий некоторую точку  $M_1$  прямой  $l_1$  с некоторой точкой  $M_2$  прямой  $l_2$ , не коллинеарен направляющим векторам  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Если  $l_1$  и  $l_2$  совпадают, то  $\overrightarrow{M_1M_2}$  коллинеарен  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

**Пример.** Установить взаимное расположение двух прямых

$$x = 1 + t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = 5 + 3t \quad \text{и} \quad x = 1 - t, \quad y = 1 + t, \quad z = 6 - 2t.$$

**Решение.** Так как направляющие векторы  $\mathbf{p} = (1, -2, 3)$  и  $\mathbf{q} = (-1, 1, -2)$  прямых не коллинеарны, то прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Точка  $A(1, 2, 5)$  лежит на первой из них, точка  $B(1, 1, 6)$  — на второй. Поскольку

$$([\overrightarrow{AB}, \mathbf{p}], \mathbf{q}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. векторы  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  – компланарны, то прямые пересекаются. Найдём их общую точку. Если  $M(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит первой прямой, то это значит, что её координаты получаются при подстановке в уравнение первой прямой некоторого конкретного значения параметра  $t = t_1$ , т.е.

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 + t_1 \\y_0 &= 2 - 2t_1 \\z_0 &= 5 + 3t_1.\end{aligned}$$

Аналогично, координаты точки  $M$  можно получить из уравнения второй прямой при некотором  $t = t_2$  :

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 - t_2 \\y_0 &= 1 + t_2 \\z_0 &= 6 - 2t_2.\end{aligned}$$

Приравнявая соответствующие выражения для координат, получаем систему

$$\begin{cases} 1 + t_1 = 1 - t_2 \\ 2 - 2t_1 = 1 + t_2 \\ 5 + 3t_1 = 6 - 2t_2, \end{cases}$$

откуда  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -1$ . Значит,  $M(2, 0, 8)$ .

Можно написать уравнение плоскости, содержащей данные прямые. Имеем два вектора  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , параллельные плоскости и точку  $M$ , лежащую в ней, значит,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-8 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x - y - z + 6 = 0$$

есть уравнение этой плоскости.

#### 6.11. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть плоскость  $\alpha$  задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая  $l$  – каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{q_1} = \frac{y-y_0}{q_2} = \frac{z-z_0}{q_3}.$$

Угол между прямой  $l$  и плоскостью  $\alpha$  есть угол  $\varphi$  между этой прямой и её ортогональной проекцией на плоскость  $\alpha$ . Это определение даёт не один, а два угла (острый и тупой), в сумме дающие  $\pi$ .

Через  $\psi$  обозначим угол между направляющим вектором прямой  $l$  и нормалью к плоскости  $\alpha$ , т.е.  $\psi = (\mathbf{q}, \mathbf{n})$ , где  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $\mathbf{n} = (A, B, C)$ .

В зависимости от выбора направления векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{q}$  можем получить либо  $\psi + \varphi = \frac{\pi}{2}$  (см. рис. 6), либо  $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$  (см. рис. 7). В первом случае

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) = \cos \psi ;$$

во втором –

$$\varphi = \psi - \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \sin \left( \psi - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \psi .$$

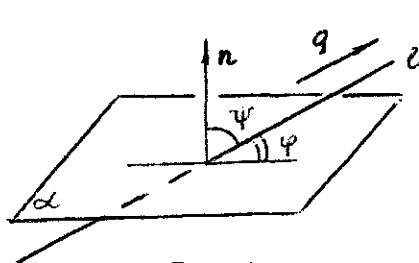


Рис. 6

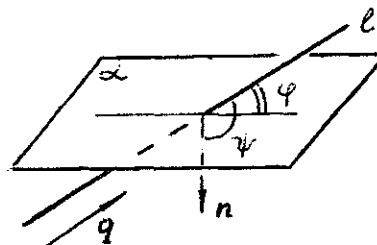


Рис. 7

Но угол  $\varphi$  заключен между 0 и  $\pi$ , поэтому синус его неотрицателен, следовательно,

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = |\cos(\mathbf{q}, \mathbf{n})| = \frac{|(\mathbf{q}, \mathbf{n})|}{|\mathbf{q}| |\mathbf{n}|} = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \quad (1)$$

Условие перпендикулярности прямой  $l$  и плоскости  $\alpha$  эквивалентно условию коллинеарности векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{n}$ , т.е. имеет вид

$$\frac{A}{q_1} = \frac{B}{q_2} = \frac{C}{q_3}. \quad (2)$$

Условие параллельности прямой  $l$  и плоскости  $\alpha$  эквивалентно условию ортогональности векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{q}$ , т.е.  $(\mathbf{n}, \mathbf{q}) = 0$  или

$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 = 0. \quad (3)$$

Если прямая  $l$  параллельна плоскости  $\alpha$  и найдется такая точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , принадлежащая этой прямой, которая одновременно принадлежит и плоскости  $\alpha$ , то очевидно, что прямая  $l$  лежит в плоскости  $\alpha$ . Условие параллельности  $l$  и  $\alpha$  есть условие (3). Если  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  одновременно принадлежит  $l$  и  $\alpha$ , то ее координаты должны удовлетворять как уравнениям прямой  $l$ , так и уравнению плоскости  $\alpha$ .

Перепишем уравнение прямой  $l$  в параметрическом виде. Очевидно,

$$x = x_0 + tq_1, \quad y = y_0 + tq_2, \quad z = z_0 + tq_3.$$

Так как  $M_1 \in l$ , то найдется такое значение параметра  $t = t_1$ , что

$$x_1 = x_0 + t_1 q_1, \quad y_1 = y_0 + t_1 q_2, \quad z_1 = z_0 + t_1 q_3.$$

Кроме того,  $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ . Объединяя все эти условия, получаем систему с неизвестными  $x_1, y_1, z_1, t_1$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + t_1 q_1 \\ y_1 = y_0 + t_1 q_2 \\ z_1 = z_0 + t_1 q_3 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Подставим в последнее уравнение этой системы вместо  $x_1, y_1, z_1$  их выражения через  $t_1$  из первых трех уравнений:

$$A(x_0 + t_1 q_1) + B(y_0 + t_1 q_2) + C(z_0 + t_1 q_3) + D = 0,$$

или

$$t_1(Aq_1 + Bq_2 + Cq_3) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Так как выполнено условие (3), то коэффициент при  $t_1$  обращается в нуль, и мы получаем

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (5)$$

Таким образом, прямая  $l$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , если одновременно выполняются два условия (3) и (5).

Если условие (3) выполняется, а условие (5) не выполняется, то это означает, что прямая  $l$  и плоскость  $\alpha$  не пересекаются (система, рассмотренная выше, не имеет решения), т.е. прямая  $l$  параллельна плоскости  $\alpha$ .

Если прямая не параллельна плоскости, то они пересекаются по точке. Координаты этой точки можно найти, решив нашу систему (4). Действительно, так как прямая  $l$  не параллельна плоскости  $\alpha$ , то  $Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 \neq 0$ , поэтому можно определить параметр  $t_1$  :

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aq_1 + Bq_2 + Cq_3}.$$

Подставляя найденное значение параметра в правые части трех уравнений системы (4), получаем координаты  $x_1, y_1, z_1$  точки пересечения прямой и плоскости.

**Пример 1.** Найти ортогональную проекцию точки  $A(1, 2, -5)$  на плоскость  $x - 2y + 3z - 10 = 0$ .

*Решение.* Опустим из точки  $A$  перпендикуляр на данную плоскость, его основание и есть искомая проекция. Прямая, перпендикулярная к данной плоскости и проходящая через точку  $A$ , задается уравнением

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+5}{3},$$

так как нормаль к данной плоскости может служить направляющим вектором перпендикуляра.

Осталось найти точку пересечения перпендикуляра с плоскостью, для чего перейдем к параметрическому заданию прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -5 + 3t \\ x - 2y + 3z - 10 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем  $t = 2$ , и координаты искомой точки  $x = 3, y = -2, z = 1$ .

**Пример 2.** Найти точку  $A'$ , симметричную точке  $A(1, 1, -6)$  относительно прямой

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}.$$

*Решение.* Через точку  $A$  проведем плоскость, перпендикулярную данной прямой. Если  $P$  есть точка пересечения прямой и плоскости, то она является серединой отрезка  $AA'$ , поэтому зная координаты точек  $A$  и  $P$ , можно найти координаты точки  $A'$ .

В качестве нормали к плоскости возьмем направляющий вектор данной прямой, тогда

$$x + y + z + D = 0$$

есть уравнение плоскости, перпендикулярной прямой. Плоскость проходит через точку  $A$ , поэтому

$$1 + 1 - 6 + D = 0,$$

откуда  $D = 4$ .

Найдем точку  $P$  (для чего переходим к параметрическим уравнениям прямой):

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \\ x + y + z + 4 = 0, \end{cases}$$

откуда  $t = -2, x = 0, y = -1, z = -3$ .

Так как  $P(0, -1, -3)$  — середина  $AA'$ , то обозначая координаты точки  $A'$  через  $x, y, z$ , можем записать

$$\frac{x+1}{2} = 0, \quad \frac{y+1}{2} = -1, \quad \frac{z-6}{2} = -3.$$

Из этих соотношений получаем координаты точки  $A'$  :

$$x = -1, \quad y = -3, \quad z = 0.$$

**Пример 3.** Через прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1}$$

провести такую плоскость, чтобы тупой угол между ее линиями пересечения с плоскостями  $Oxy$  и  $Oyz$  был равен  $\frac{2\pi}{3}$ .

*Решение.* Пусть искомая плоскость имеет уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Найдем направляющий вектор ее линии пересечения с плоскостью  $Oxy$  :

$$\mathbf{p} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A & B & C \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = B\mathbf{e}_1 - A\mathbf{e}_2$$

(здесь  $\mathbf{n}_1 = (A, B, C)$  – нормаль искомой плоскости,  $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$  – нормаль плоскости  $Oxy$ ).

Аналогично, направляющий вектор линии пересечения искомой плоскости с  $Oyz$  есть

$$\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = C\mathbf{e}_2 - B\mathbf{e}_3.$$

Из того, что данная прямая лежит в искомой плоскости, получаем, что должны выполняться следующие два условия:

$$\begin{cases} A - C = 0 \\ B - C + D = 0, \end{cases} \quad (6)$$

откуда  $A = C$ ,  $D = C - B$ .

Найдем угол между векторами  $\mathbf{p} = (B, -A, 0)$  и  $\mathbf{q} = (0, C, -B)$

$$\cos(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{|\mathbf{p}| |\mathbf{q}|} = \frac{-AC}{\sqrt{B^2 + A^2} \sqrt{C^2 + B^2}} = \frac{-A^2}{2\sqrt{B^2 + A^2}} < 0$$

в силу соотношений (6). Так как  $\cos(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < 0$ , то это тупой угол. По условию этот угол равен  $\frac{2\pi}{3}$ , значит,

$$-\frac{A^2}{2\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{2},$$

откуда  $B^2 = A^4 - A^2$ .

Длину нормали  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  можно выбрать произвольно ( $\neq 0$ ), пусть

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{6}.$$

Учитывая  $C = A$  и  $B^2 = A^4 - A^2$ , получаем

$$A^4 + A^2 = 6,$$

откуда  $A = \pm\sqrt{2}$ . Значит,  $B = \pm\sqrt{2}$ ,  $C = \pm\sqrt{2}$ .

В случае, когда  $A, B, C$  – одного знака  $D = 0$ , если  $A = C$  и  $B$  – разных знаков, то  $D = 2C = \pm 2\sqrt{2}$ .

В результате получаем две плоскости

$$x + y + z = 0$$

и

$$x - y + z + 2 = 0.$$

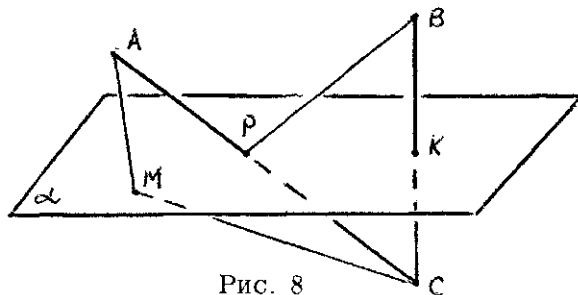


Рис. 8

**Пример 4.** На плоскости  $\alpha: 2x - 3y + 3z - 17 = 0$  найти такую точку  $P$ , сумма расстояний которой до точек  $A(3, -4, 7)$  и  $B(-5, -14, 17)$  была бы наименьшей.

*Решение.* Заметим, что точки  $A$  и  $B$  находятся по одну сторону от плоскости  $\alpha$ . Действительно, отклонения этих точек от плоскости

$$\delta(A, \alpha) = \frac{2 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 7 - 17}{\sqrt{22}} > 0$$

$$\delta(B, \alpha) = \frac{2 \cdot (-5) - 3 \cdot (-14) + 3 \cdot 17 - 17}{\sqrt{22}} > 0$$

одного знака.

Пусть  $C$  — точка, симметричная точке  $B$  относительно плоскости  $\alpha$ . Тогда для любой точки  $M$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ , длины отрезков  $BM$  и  $CM$  совпадают. Поэтому сумма расстояний от любой точки  $M$  плоскости  $\alpha$  до точек  $A$  и  $B$  равна сумме расстояний от  $M$  до точек  $A$  и  $C$ . Пусть  $l$  — прямая, проходящая через точки  $A$  и  $C$ . Она пересекает плоскость  $\alpha$  в некоторой точке  $P$ . Сумма расстояний от точки  $P$  до точек  $A$  и  $C$ , очевидно, равна длине отрезка  $AC$ . Сумма расстояний от любой другой точки  $M$  плоскости  $\alpha$  до точек  $A$  и  $C$  будет больше длины отрезка  $AC$ . Действительно, в треугольнике  $AMC$

$$|AC| < |AM| + |MC|.$$

Поэтому  $P$  есть искомая точка, сумма расстояний которой до точек  $A$  и  $B$  является наименьшей.

Определим координаты точки  $C$ , для чего опустим из точки  $B$  перпендикуляр на плоскость  $\alpha$ :

$$x = -5 + 2t, \quad y = -14 - 3t, \quad z = 17 + 3t,$$

и найдем точку  $K$  его пересечения с этой плоскостью:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z - 17 = 0 \\ x = -5 + 2t \\ y = -14 - 3t \\ z = 17 + 3t. \end{cases}$$

Решая систему, получим:  $t = -3$ ,  $x = -11$ ,  $y = -5$ ,  $z = 8$ , значит  $K(-11, -5, 8)$ . Так как  $K$  является серединой отрезка  $BC$ , то, обозначая через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаты точки  $C$ , имеем

$$-11 = \frac{-5 + x}{2}, \quad -5 = \frac{-14 + y}{2}, \quad 8 = \frac{17 + z}{2}.$$

Отсюда  $C(-17, 4, -1)$ .

Прямая  $AC$  задается уравнениями

$$x = 3 - 20t, \quad y = -4 + 8t, \quad z = 7 - 8t.$$

Пересекая эту прямую с плоскостью  $\alpha$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z - 17 = 0 \\ x = 3 - 20t \\ y = -4 + 8t \\ z = 7 - 8t \end{cases}$$

получаем координаты точки  $P(-2, -2, 5)$ .

**Пример 5.** На плоскости  $\alpha: 2x + 3y - 4z - 15 = 0$  найти такую точку  $P$ , разность расстояний которой до точек  $A(5, 2, -7)$  и  $B(7, -25, 10)$  была бы наибольшей.

*Решение.* Заметим, что точки  $A$  и  $B$  находятся по разные стороны от плоскости  $\alpha$ , поскольку их отклонения от плоскости

$$\delta(A, \alpha) = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) - 15}{\sqrt{29}} > 0$$

$$\delta(B, \alpha) = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot (-25) - 4 \cdot 10 - 15}{\sqrt{29}} < 0$$

имеют разные знаки.

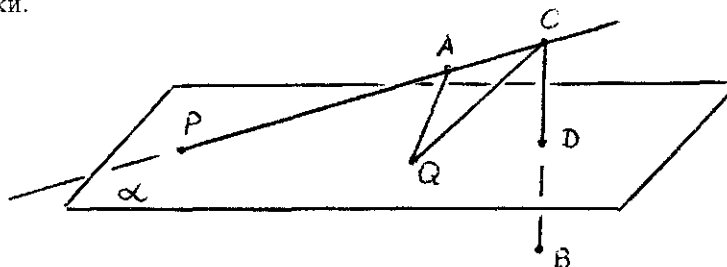


Рис. 9

Пусть  $C$  – точка, симметричная точке  $B$  относительно плоскости  $\alpha$ , тогда  $|QC| = |QB|$  для любой точки  $Q$ , лежащей в плоскости  $\alpha$ . Точки  $A$  и  $C$  находятся по одну сторону от плоскости  $\alpha$ . Проведем через них прямую, и пусть  $P$  – точка пересечения этой прямой с плоскостью  $\alpha$ . Разность расстояний от точки  $P$  до точек  $A$  и  $C$  равна длине отрезка  $AC$ . Для любой другой точки  $Q$  плоскости  $\alpha$  из треугольника  $AQC$  следует

$$||AQ| - |CQ|| < |AC|,$$

поэтому точка  $P$  является искомой.

Для нахождения координат точки  $C$ , опустим из точки  $B$  перпендикуляр на плоскость  $\alpha$ :

$$x = 7 + 2t, \quad y = -25 + 3t, \quad z = 10 - 4t,$$

и найдем точку  $D$  его пересечения с плоскостью

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 15 = 0 \\ x = 7 + 2t \\ y = -25 + 3t \\ z = 10 - 4t. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим  $t = 4$ ,  $x = 15$ ,  $y = -13$ ,  $z = -6$ , значит,  $D(15, -13, -6)$ . Учитывая, что  $D$  – середина отрезка  $CB$

$$15 = \frac{7 + x}{2}, \quad -13 = \frac{-25 + y}{2}, \quad -6 = \frac{10 + z}{2},$$

получим координаты точки  $C(23, -1, -22)$ . Прямая  $AC$  задается уравнениями

$$x = 5 + 18t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -7 - 15t.$$

Пересекая ее с плоскостью  $\alpha$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 15 = 0 \\ x = 5 + 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -7 - 15t, \end{cases}$$

получаем координаты точки  $P$ . Так как  $t = -\frac{1}{3}$ ,  $x = -1$ ,  $y = 3$ ,  $z = -2$ , то  $P(-1, 3, -2)$ .

## 6.12. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть дана прямая

$$l: \frac{x-x_0}{q_1} = \frac{y-y_0}{q_2} = \frac{z-z_0}{q_3}$$

и точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , не лежащая на этой прямой. Вычислим расстояние от точки  $M_1$  до прямой  $l$ , которое будем обозначать  $\text{dist}(M_1, l)$ .

Очевидно, это расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки  $M_1$  на прямую  $l$ . Нам известны координаты точки  $M_0$ , принадлежащей  $l$ , —  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Рассмотрим вектор  $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ , и пусть вектор  $\mathbf{q}$  (направляющий вектор прямой  $l$ ) приложен к точке  $M_0$ , тогда искомое расстояние равно высоте параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{M_0M_1}$  и  $\mathbf{q}$ , если за основание взят вектор  $\mathbf{q}$ . Пусть  $\mathbf{n} = [\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{q}]$ . По определению векторного произведения длина вектора  $\mathbf{n}$  равна площади  $S$  рассматриваемого параллелограмма, следовательно,

$$\text{dist}(M_1, l) = \frac{S}{|\mathbf{q}|} = \frac{|[\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{q}]|}{|\mathbf{q}|}.$$

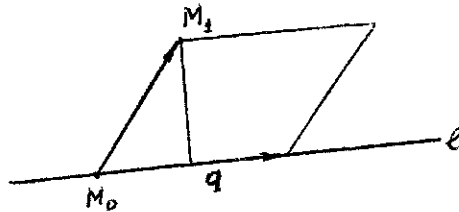


Рис. 10

Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= [\overrightarrow{M_0M_1}, \mathbf{q}] = \\ &= \left( \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \text{dist}(M_1, l) &= \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

**Пример.** Найти расстояние от точки  $M(2, 4, -3)$  до прямой  $x = 1 + 2t$ ,  $y = -3 + 5t$ ,  $z = 8 - 6t$ .

**Решение.** Точка  $A(1, -3, 8)$  лежит на данной прямой, а  $\mathbf{p} = (2, 5, -6)$  — направляющий вектор прямой. Найдем площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\overrightarrow{AM} = (1, 7, -11)$  и  $\mathbf{p}$ . Для этого следует вычислить их векторное произведение

$$\mathbf{n} = [\overrightarrow{AM}, \mathbf{p}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 7 & -11 \\ 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 13\mathbf{e}_1 - 16\mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$$

и найти длину полученного вектора  $\mathbf{n}$

$$S = |\mathbf{n}| = \sqrt{13^2 + 16^2 + 9^2} = \sqrt{506}.$$

Длина вектора  $\mathbf{p}$  есть

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-6)^2} = \sqrt{65},$$

значит, искомое расстояние равно  $\frac{\sqrt{506}}{\sqrt{65}}$ .



### 6.13. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если две прямые  $l_1$  и  $l_2$  не имеют общих точек (т.е. скрещиваются или параллельны, но не совпадают), то можно искать расстояние между ними. Если  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, то достаточно на одной из прямых взять произвольную точку и найти расстояние от этой точки до другой прямой. Эта задача решена выше (см. формулу (1) п.6.12). Поэтому рассмотрим скрещивающиеся прямые.

*Расстоянием* между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  будем называть длину отрезка общего перпендикуляра к прямым, концы которого лежат на данных прямых.

Пусть  $l_1$  и  $l_2$  заданы каноническими уравнениями:

$$l_1 : \frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{q_2} = \frac{z-z_1}{q_3},$$

$$l_2 : \frac{x-x_2}{p_1} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{p_3}.$$

Очевидно, точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  принадлежит прямой  $l_1$ , а точка  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  — прямой  $l_2$ . Рассмотрим векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ , так как  $l_1$  и  $l_2$  скрещиваются, то эти векторы не компланарны. Построим на этих векторах параллелепипед, приложив их к точке  $M_1$ , тогда объем  $V$  этого параллелепипеда равен модулю смешанного произведения векторов  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ . Верхнее и нижнее основание полученного параллелепипеда лежат в параллельных плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ , каждая из которых натянута на векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , приложенные, соответственно, к точке  $M_1$  (плоскость  $\alpha$ ) и к точке  $M_2$  (плоскость  $\beta$ ). Расстояние между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  и есть длина общего перпендикуляра к  $l_1$  и  $l_2$ , но это расстояние равно высоте  $h$  построенного параллелепипеда. Значит,

$$\text{dist}(l_1, l_2) = h = \frac{V}{S},$$

где  $S$  — площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ , следовательно,  $S = |[\mathbf{q}, \mathbf{p}]|$ .

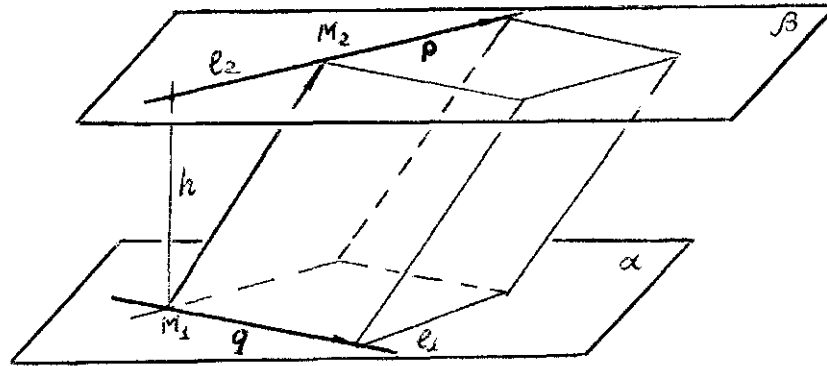


Рис. 11

Так как  $V = |(\overrightarrow{M_1M_2}, [\mathbf{q}, \mathbf{p}])|$ , то окончательно получаем

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, [\mathbf{q}, \mathbf{p}])|}{|[\mathbf{q}, \mathbf{p}]|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ p_2 & p_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ p_1 & p_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

**Пример 1.** Найти расстояние между двумя прямыми

$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$$

и

$$l_2 : \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x - y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Найдем канонические уравнения второй прямой. Направляющий вектор  $l_2$  есть

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,$$

а точка  $B(-3, -1, -1)$  лежит на этой прямой, значит,

$$l_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны. Они не совпадают, так как вектор  $\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 2)$  ( $A(1, -2, -3) \in l_1$ ) не коллинеарен  $\mathbf{q}$ . В этом случае расстояние между прямыми равно расстоянию от произвольной точки одной из прямых до второй прямой. Например,

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \text{dist}(A, l_2).$$

Так как

$$[\overrightarrow{AB}, \mathbf{q}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$$

и

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

получаем

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \frac{\sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{3}}.$$

#### 6.14. Пучок плоскостей

**Определение.** Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется *пучком плоскостей*, прямая называется *осью пучка*.

Пусть прямая задана как линия пересечения двух плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Умножим первое из этих уравнений на  $\alpha$ , а второе – на  $\beta$ , причем  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно не равны нулю, сложив результаты, получим уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

или

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0. \quad (2)$$

Покажем, что уравнение (2) также задает плоскость в пространстве. Сначала проверим, что уравнение (2) есть уравнение первой степени, т.е. что хотя бы один из коэффициентов при  $x, y, z$  отличен от нуля. Действительно, в противном случае получили бы

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 = 0, & \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0, & \quad \text{или} \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \\ \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, & \quad \text{или} \quad \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \end{aligned}$$

и так как  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно не равны нулю (т.е. хотя бы одно из чисел  $-\frac{\beta}{\alpha}$  или  $-\frac{\alpha}{\beta}$  определено), то получаем, что нормали  $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  к плоскостям коллинеарны, что противоречит условию, что плоскости пересекаются. Значит, уравнение (2) действительно есть уравнение некоторой плоскости.

Плоскость (2) заведомо проходит через любую точку прямой, получающейся в пересечении плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Действительно, если  $M(x_0, y_0, z_0)$  — произвольная точка на этой прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнениям плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , т.е.

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0,$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0,$$

откуда при любых  $\alpha$  и  $\beta$  получаем

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0,$$

т.е. координаты точки  $M(x_0, y_0, z_0)$  удовлетворяют уравнению (2).

Покажем теперь, что какова бы ни была наперед заданная плоскость, проходящая через прямую (1), она определяется уравнением (2) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ . Такая плоскость однозначно определяется заданием одной точки  $S(x_1, y_1, z_1)$ , не лежащей на прямой (1) (но принадлежащей искомой плоскости). Поэтому достаточно доказать, что не равные одновременно нулю числа  $\alpha$  и  $\beta$  можно выбрать так, чтобы координаты наперед заданной точки  $S(x_1, y_1, z_1)$  удовлетворяли уравнению (2).

Подставляя координаты точки  $S$  в уравнение (2), получаем

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0. \quad (3)$$

Полученное равенство представляет собой уравнение относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Действительно, обе круглые скобки, являющиеся коэффициентами при  $\alpha$  и  $\beta$ , обратиться в нуль не могут, так как это означало бы, что обе данные плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  проходят через точку  $S$ . (Это невозможно, так как эти плоскости не совпадают и проходят через одну и ту же прямую, не содержащую точки  $S$ .) Значит, по крайней мере одна из круглых скобок отлична от нуля. Пусть, например,

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 \neq 0.$$

Тогда, произвольно задав значение  $\beta \neq 0$ , из (3) получим коэффициент  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1} \beta.$$

Итак, мы нашли такие значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых плоскость, определяемая уравнением (2), проходит через точку  $S(x_1, y_1, z_1)$ .

Случай, когда отлична от нуля вторая из круглых скобок в (3), рассматривается аналогично. В результате получена следующая теорема.

**Теорема.** Если

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

есть уравнения двух плоскостей, пересекающихся по некоторой прямой  $l$ , и  $\alpha, \beta$  — произвольные, не равные одновременно нулю числа, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (4)$$

является уравнением плоскости, проходящей через прямую  $l$ .

Любая наперед заданная плоскость, проходящая через прямую  $l$ , определяется уравнением (4) при некоторых  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Замечание.* Так как в уравнении пучка плоскостей хотя бы одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  отлично от нуля, то можно записать это уравнение с одним параметром, равным их отношению. Например, если  $\alpha \neq 0$ , то положив  $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ , получим уравнение пучка в виде

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Последнее уравнение задает все плоскости пучка, проходящие через линию  $l$  пересечения плоскостей, определяемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

кроме одной – плоскости, определяемой уравнением

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

(Ее нельзя получить ни при каком значении  $\lambda$ .)

**Пример 1.** Через линию пересечения плоскостей  $2x - 3y - 2z + 9 = 0$  и  $4x + 4z + 1 = 0$  провести плоскость, образующую угол  $\arccos \frac{5}{21}$  с плоскостью  $2x + y - 2z + 7 = 0$ .

*Решение.* Искомая плоскость принадлежит пучку

$$2x - 3y - 2z + 9 + \lambda(4x + 4z + 1) = 0,$$

значит, нормаль к ней есть вектор

$$\mathbf{n} = (2 + 4\lambda, -3, -2 + 4\lambda).$$

Число  $\lambda$  найдем из условия, что угол между искомой плоскостью и третьей из данных в задаче плоскостей равен  $\arccos \frac{5}{21}$

$$\frac{2(2 + 4\lambda) - 3 - 2(-2 + 4\lambda)}{3\sqrt{(2 + 4\lambda)^2 + (-3)^2 + (-2 + 4\lambda)^2}} = \frac{5}{21},$$

или

$$\frac{5}{3\sqrt{32\lambda^2 + 17}} = \frac{5}{21},$$

откуда

$$32\lambda^2 + 17 = 49$$

или

$$\lambda^2 = 1.$$

Для каждого из двух значений  $\lambda$  получаем свою искомую плоскость. При  $\lambda = 1$

$$6x - 3y + 2z + 10 = 0,$$

при  $\lambda = -1$

$$2x + 3y + 6z - 8 = 0.$$

**Пример 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(1, 3, 4)$  и через прямую

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$$

*Решение.* Прямая в условии задачи задана как линия пересечения двух плоскостей. Очевидно, искомая плоскость принадлежит пучку, определяемому этими плоскостями, поэтому будем искать ее уравнение в виде

$$x - y + 2z - 3 + \lambda(2x + 3y - 5z + 4) = 0.$$

Параметр  $\lambda$  определяем из условия принадлежности точки  $A$  искомой плоскости:

$$(1 - 3 + 8 - 3) + \lambda(2 + 9 - 20 + 4) = 0,$$

откуда  $\lambda = \frac{3}{5}$ .

Значит, получаем плоскость

$$x - y + 2z - 3 + \frac{3}{5}(2x + 3y - 5z + 4) = 0,$$

или

$$11x + 4y - 5z - 3 = 0.$$

**Пример 3.** Показать, что три плоскости  $x + y + z - 3 = 0$ ,  $3x + 5y + z - 13 = 0$ ,  $x + 2z - 6 = 0$  образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы параллельно ее третьей грани.

*Решение.* Нормали к данным плоскостям есть векторы

$$\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{n}_2 = (3, 5, 1), \quad \mathbf{n}_3 = (1, 0, 2).$$

Никакая пара из них не коллинеарна, следовательно, каждые две из данных плоскостей пересекаются по прямой. Найдем направляющие векторы этих трех прямых:

$$\mathbf{p} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{r} = [\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3.$$

Значит, эти три прямые параллельны.

Если бы все три плоскости пересекались по одной прямой, то они принадлежали бы одному пучку плоскостей, значит, например, уравнение третьей плоскости можно было бы получить из

$$\alpha(x + y + z - 3) + \beta(3x + 5y + z - 13) = 0 \quad (5)$$

при некоторых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно не обращающихся в нуль.

Так как уравнение (5) задает третью из данных плоскостей, то коэффициенты его должны быть пропорциональны соответствующим коэффициентам в уравнении  $x + 2z - 6 = 0$ , откуда

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = k \\ \alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 2k \\ -3\alpha - 13\beta = -6k. \end{cases} \quad (6)$$

Из первых трех уравнений  $\alpha = -5\beta$ ,  $k = -2\beta$ .

Подставляя эти соотношения в последнее уравнение системы, получаем

$$15\beta - 13\beta = 12\beta,$$

или  $\beta = 0$ , откуда  $\alpha = k = 0$ . Итак, эти плоскости не принадлежат одному пучку. Значит, эти плоскости высекают призму.

Осталось найти плоскость, принадлежащую пучку (5) и параллельную третьей из данных плоскостей. Выписав условия коллинеарности нормали к плоскости (5)

$$\mathbf{n} = (\alpha + 3\beta, \alpha + 5\beta, \alpha + \beta)$$

и вектора  $\mathbf{n}_3$ , получим первые три соотношения системы (6), поэтому  $\alpha = -5\beta$ ,  $k = -2\beta$ .

Положим  $\beta = 1$ , тогда  $\alpha = -5$  и уравнение искомой плоскости

$$(-5 + 3)x + (-5 + 5)y + (-5 + 1)z + (15 - 13) = 0$$

или

$$x + 2z - 1 = 0.$$

## ЛЕКЦИЯ 7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

"Предположим, что мы не так уж далеки от истины..."  
(Ксенофан)

### 7.1. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ НАЧАЛА КООРДИНАТ

Рассмотрим аффинный репер в пространстве, т.е. упорядоченную тройку некопланарных векторов  $e_1, e_2, e_3$ , приложенных к точке  $O$  – началу координат. Пусть наряду с репером  $Oe_1e_2e_3$  (который условно будем называть "старым") дан "новый" репер с началом  $O'$  и базисом  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Возникает следующая задача: по координатам произвольной точки  $M$  в одной из двух систем координат (определенных реперами  $Oe_1e_2e_3$  и  $O'e'_1e'_2e'_3$ ) найти координаты той же точки в другой системе.

Здесь мы рассмотрим случай, когда оба репера имеют одно и то же начало – точку  $O$ . Тогда новый репер  $Oe'_1e'_2e'_3$  определен, если векторы  $e'_1, e'_2, e'_3$  заданы своими координатами относительно старого базиса.

Пусть

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3 \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3 \\ e'_3 &= c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Формулы (1) можно коротко записать в векторно - матричном виде

$$(e'_1 \ e'_2 \ e'_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3) C, \quad (1')$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

**Определение 1.** Матрица  $C$ , в столбцах которой стоят координаты векторов нового базиса относительно старого базиса, называется *матрицей перехода* от старого базиса  $e_1, e_2, e_3$  к новому  $e'_1, e'_2, e'_3$ .

Итак, формула (2) определяет матрицу перехода от репера  $Oe_1e_2e_3$  к реперу  $Oe'_1e'_2e'_3$ . Посмотрим, как связаны между собой координаты  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  произвольной точки  $M$  в старой и новой системах координат.

Вектор  $u = \overrightarrow{OM}$  записывается как линейная комбинация векторов  $e_1, e_2, e_3$  с коэффициентами  $x, y, z$

$$u = xe_1 + ye_2 + ze_3. \quad (3)$$

Этот же вектор записывается как линейная комбинация векторов  $e'_1, e'_2, e'_3$  с коэффициентами  $x', y', z'$

$$u = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3. \quad (4)$$

Подставляя в (4) выражения векторов  $e'_1, e'_2, e'_3$  из (1), получаем

$$\begin{aligned} u &= x'(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3) + y'(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3) + z'(c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3) = \\ &= (c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z')e_1 + (c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z')e_2 + (c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z')e_3. \end{aligned}$$

Так как вектор  $\mathbf{u}$  однозначно раскладывается по базису, то сравнивая полученное представление с равенством (3), получаем

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases} \quad (5)$$

Формулы (5) дают выражения старых координат точки  $M$  через новые ее координаты, поэтому матрицу  $C$  называют также *матрицей преобразования координат*.

Формулы (5) также можно записать в векторно - матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (5')$$

Мы рассмотрели случай преобразования координат в пространстве. Если рассматривается плоскость, то рассуждения не изменяются, лишь уменьшается число базисных векторов и, соответственно, размеры матрицы перехода.

Действительно, базис в плоскости образуют два неколлинеарных вектора. Поэтому матрица перехода от базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  к базису  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ , где

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = c_{11}\mathbf{e}_1 + c_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = c_{12}\mathbf{e}_1 + c_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (6)$$

есть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

а формулы (5) переходят в

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' \end{cases} \quad (7)$$

## 7.2. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ НАЧАЛА КООРДИНАТ

Общий случай преобразования координат заключается в переходе от репера  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  к реперу  $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$ , где точки  $O$  и  $O'$  различны. Переход от репера  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  к реперу  $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  можно осуществить в два этапа:

1. перенести начало координат из точки  $O$  в точку  $O'$ , не изменяя базиса репера, т.е. перейти к промежуточному реперу  $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  (это преобразование называется *параллельным переносом* или *сдвигом начала координат*);

2. перейти к новому реперу без изменения начала координат, т.е. от промежуточного репера  $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  перейти к реперу  $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  (переход к новому базису).

Второй этап мы уже рассмотрели выше, поэтому рассмотрим сдвиг начала координат. Пусть  $O'(x_0, y_0, z_0)$ . Обозначим координаты произвольной точки  $M$  в старой системе координат через  $x, y, z$ , в промежуточной системе (определенной репером  $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ ) координаты той же точки обозначим  $x'', y'', z''$ . Значит,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \\ \overrightarrow{O'M} &= x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Но

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

причем

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3,$$

откуда получаем

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3 + x''\mathbf{e}_1 + y''\mathbf{e}_2 + z''\mathbf{e}_3$$



или

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = (x_0 + x'')e_1 + (y_0 + y'')e_2 + (z_0 + z'')e_3.$$

Так как любой вектор однозначно раскладывается по базису, то, приравнявая коэффициенты при базисных векторах, стоящие в правой и левой частях равенства, получаем формулы параллельного переноса:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'' \\ y = y_0 + y'' \\ z = z_0 + z'' \end{cases} \quad (1)$$

Теперь, обозначая через  $x', y', z'$  координаты точки  $M$  в новом базисе, определенном репером  $O'e'_1e'_2e'_3$ , и используя формулы (5) п.7.1, получаем

$$\begin{cases} x'' = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y'' = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z'' = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases}$$

Остается подставить полученные выражения  $x'', y''$  и  $z''$  в (1). Окончательно получаем

$$\begin{cases} x = x_0 + c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y = y_0 + c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z = z_0 + c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases} \quad (2)$$

Это и есть общие формулы преобразования координат при переходе от одной аффинной системы координат к другой в пространстве.

В случае плоскости формулы параллельного переноса принимают вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'' \\ y = y_0 + y'' \end{cases} \quad (3)$$

а общие формулы преобразования координат – вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + c_{11}x' + c_{12}y' \\ y = y_0 + c_{21}x' + c_{22}y' \end{cases} \quad (4)$$

**Пример.** Даны две аффинные системы координат, определяемые реперами  $Oe_1e_2e_3$  и  $O'e'_1e'_2e'_3$ . Выразить координаты точек относительно первой системы координат через их координаты во второй системе, если координаты нового начала  $O'$  относительно первой системы координат есть  $(2, 3, 1)$ , а векторы, задающие реперы, имеют координаты:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 1, 1), & e'_1 &= (2, 1, 1), \\ e_2 &= (0, 1, 1), & e'_2 &= (2, 2, 3), \\ e_3 &= (0, 0, 1), & e'_3 &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

*Решение.* Найдем матрицу перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} e'_1 &= 2e_1 - e_2, \\ e'_2 &= 2e_1 + e_3, \\ e'_3 &= e_2 - e_3. \end{aligned}$$

Значит, векторы нового базиса относительно старого имеют координаты:

$$e'_1 = (2, -1, 0), \quad e'_2 = (2, 0, 1), \quad e'_3 = (0, 1, -1).$$

Тогда по определению матрица перехода к новому базису есть

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (2) преобразования координат, получаем

$$\begin{cases} x = 2x' + 2y' + 2 \\ y = -x' + z' + 3 \\ z = y' - z' + 1. \end{cases}$$

### 7.3. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим переход от одного прямоугольного репера к другому с тем же началом. Базис прямоугольного репера состоит из двух взаимно перпендикулярных векторов единичной длины (ортов). Такие базисы мы называем *ортонормированными*.

**Лемма.** Пусть  $Oe_1e_2$  и  $Oe'_1e'_2$  – два прямоугольных репера на плоскости с общим началом  $O$ . Тогда поворотом репера  $Oe_1e_2$  в несущей его плоскости вокруг точки  $O$  на некоторый угол  $\alpha$  можно перевести репер  $Oe_1e_2$  либо в репер  $Oe'_1e'_2$ , либо в репер  $Oe'_1(-e'_2)$ .

Другими словами, репер  $Oe'_1e'_2$  получается из репера  $Oe_1e_2$  либо поворотом, либо поворотом и последующим отражением относительно прямой, на которой лежит вектор  $e'_1$ .

**Доказательство.** Репер  $Oe_1e_2$  определяет некоторое положительное направление вращения плоскости, именно то, в котором угол от орта  $e_1$  до орта  $e_2$  равен  $\frac{\pi}{2}$ . Обозначим через  $\alpha$  угол от орта  $e_1$  до  $e'_1$ , отсчитываемый в положительном направлении. Повернув репер  $Oe_1e_2$  в плоскости на угол  $\alpha$  в положительном направлении, мы совместим  $e_1$  с  $e'_1$ . Тогда орт  $e_2$ , как перпендикулярный к  $e_1$ , либо совместится с  $e'_2$ , либо с противоположным ему ортом  $-e'_2$ .

Лемма доказана.

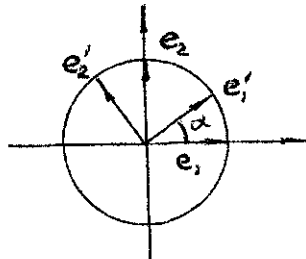


Рис. 1.

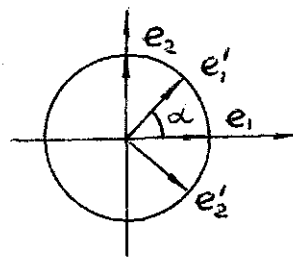


Рис. 2.

Из леммы следует, что относительно базиса  $e_1, e_2$  вектор  $e'_1$  имеет следующие координаты:

$$e'_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Для вектора  $e'_2$  имеются две возможности. В случае, когда  $Oe'_1e'_2$  получается из  $Oe_1e_2$  поворотом

$$e'_2 = (\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha), \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)) = (-\sin \alpha, \cos \alpha).$$

В случае, когда  $Oe'_1e'_2$  получается из  $Oe_1e_2$  поворотом с последующим отражением

$$-e'_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha),$$

тогда

$$e'_2 = (\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

Матрица перехода от базиса  $e_1, e_2$  к базису  $e'_1, e'_2$  в первом случае имеет вид:

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

и

$$\det C_1 = 1,$$

во втором случае –

$$C_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

и

$$\det C_2 = -1.$$

В первом случае базисы  $e_1, e_2$  и  $e'_1, e'_2$  называются *одинаково ориентированными*, во втором – *противоположно ориентированными*. Так как в первом случае определитель матрицы перехода от старого базиса  $e_1, e_2$  к новому  $e'_1, e'_2$  положителен, а во втором – отрицателен, то наше определение можно сформулировать следующим образом:

**Определение 2.** Два ортогональных базиса одинаково ориентированы, если матрица перехода от одного из них к другому имеет положительный детерминант, и противоположно ориентированы, если этот детерминант отрицателен.

Формулы преобразования координат в случае поворота имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

в случае поворота с последующим отражением –

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha - y' \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

**Пример.** Написать формулы преобразования прямоугольных координат, если начало новой системы находится в точке  $O'(3, -5)$ , а угол от положительного направления оси  $Ox$  до положительного направления оси  $O'x'$  равен  $\frac{\pi}{6}$ , и обе системы одинаково ориентированы.

*Решение.* Так как системы одинаково ориентированы, то новая система получается поворотом осей старой системы на угол  $\frac{\pi}{6}$  и переносом начала координат в точку  $O'$ , поэтому из формул (4) п.7.2 и (1) следует, что старые координаты  $x, y$  точки плоскости и ее новые координаты  $x', y'$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \frac{\pi}{6} - y' \sin \frac{\pi}{6} + 3 \\ y &= x' \sin \frac{\pi}{6} + y' \cos \frac{\pi}{6} - 5 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' + 3 \\ y &= \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 5. \end{aligned}$$

#### 7.4. ДОПОЛНЕНИЕ.

##### НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

**Определение 1.** Пусть  $C$  – произвольная матрица размера  $m \times n$ . Если поменять в матрице  $C$  ролями строки и столбцы, то полученная в результате матрица размером  $n \times m$  называется *транспонированной* (по отношению к  $C$ ) и обозначается  $C'$ . Сама операция замены строк на столбцы называется *транспонированием* матрицы  $C$ .

Так, если

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если элементы  $C$  обозначить  $c_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ), а элементы  $C'$  – через  $c'_{ij}$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ ), то, очевидно,  $c'_{ij} = c_{ji}$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ ).

**Определение 2.** Пусть  $A$  – квадратная матрица  $n \times n$ . Матрица  $B$  (размера  $n \times n$ ) называется обратной к матрице  $A$ , если  $AB = BA = E$ , где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– единичная матрица размера  $n \times n$ . Обратную к матрице  $A$  обозначают обычно  $A^{-1}$ , т.е.  $B = A^{-1}$ .

**Определение 3.** Пусть  $A$  – матрица размера  $m \times n$ .  $B$  – матрица размера  $n \times p$ .  $A = (a_{ij})$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ );  $B = (b_{ij})$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, p}$ ). Матрица  $C$  размера  $m \times p$ ,  $C = (c_{ij})$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}$ ) называется произведением матрицы  $A$  на матрицу  $B$  (обозначается  $C = AB$ ), если

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}).$$

Т.е. элемент матрицы  $C$ , стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -ом столбце, равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A$  соответственно на элементы  $j$ -ого столбца матрицы  $B$ .

Из определения следует, что умножить матрицу  $A$  на матрицу  $B$  можно только в том случае, когда число столбцов матрицы  $A$  совпадает с числом строк матрицы  $B$ .

Пусть  $C$  – квадратная матрица порядка  $n$  (т.е. матрица размера  $n \times n$ ). Вычислим элементы матриц  $CC'$  и  $C'C$ .

Пусть  $C = (c_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ),  $C' = (c'_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). Обозначим через  $T$  произведение  $CC'$  ( $T = CC'$ ), пусть  $T = (t_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). Согласно определению 3 и в силу  $c'_{ij} = c_{ji}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ )

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ik} c'_{kj} = \sum_{k=1}^n c_{ik} c_{jk} = c_{i1} c_{j1} + \dots + c_{in} c_{jn} \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (1)$$

причем при  $i = j$

$$t_{ii} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^2 = c_{i1}^2 + \dots + c_{in}^2 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2)$$

Обозначим через  $P$  произведение  $C'C$ , пусть  $P = (p_{ij})$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ). Тогда

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^n c'_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^n c_{ki} c_{kj} = c_{1i} c_{1j} + \dots + c_{ni} c_{nj} \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (3)$$

причем при  $i = j$

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^n c_{ki}^2 = c_{1i}^2 + \dots + c_{ni}^2 \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Покажем, что операция транспонирования обладает следующим свойством:

$$(AB)' = B' A'. \quad (5)$$

Пусть  $A = (a_{ij})$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ),  $B = (b_{ij})$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, p}$ ). Тогда  $AB$  есть матрица  $m \times p$ , элемент которой, стоящий в  $i$ -й строке и  $j$ -ом столбце, есть

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}).$$

Тогда элемент матрицы  $(AB)'$ , стоящий в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце, есть

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad (i = \overline{1, p}; j = \overline{1, m}).$$

Итак,

$$(AB)' = \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \right) \quad (i = \overline{1, p}; j = \overline{1, m}).$$

Пусть  $B' = (b'_{ij})$  ( $i = \overline{1, p}; j = \overline{1, n}$ ),  $A' = (a'_{ij})$  ( $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$ ). Используя то, что  $b'_{ij} = b_{ji}$  и  $a'_{ij} = a_{ji}$ , и перемножая  $B'$  на  $A'$ , получаем вид элемента матрицы  $B'A'$ , стоящего в  $i$ -ой строке и  $j$ -ом столбце

$$\sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \quad (i = \overline{1, p}; j = \overline{1, m}).$$

Очевидно, он совпадает с соответствующим элементом произведения  $(AB)'$ .

Нам потребуется одна теорема, которую мы приведем без доказательства.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы порядка  $n$ , тогда

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Эту теорему можно распространить по индукции на любое конечное число сомножителей.

**Теорема 2.** Если  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – квадратные матрицы одинакового порядка, то

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_k) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdots \det A_k.$$

**Упражнения.**

1. Выписать элементы произведения  $C'C$  для квадратной матрицы  $C$  порядка 3.
2. Выписать все элементы матрицы  $C'C$  для квадратной матрицы  $C$  порядка 3.

#### 7.5. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Определение.** Квадратная матрица  $C$  любого порядка  $n$  называется *ортогональной*, если транспонированная к ней матрица  $C'$  является обратной матрицей для  $C$ , т.е.

$$C' = C^{-1}. \quad (1)$$

Из определения обратной матрицы следует, что (1) эквивалентно равенствам

$$CC' = E \quad (2)$$

$$C'C = E, \quad (3)$$

где  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Равенство (2) означает, что элементы, стоящие на главной диагонали матрицы  $CC'$ , равны 1, все остальные элементы этой матрицы нулевые, т.е. (см. формулы (1) и (2) п.7.4)

$$\begin{aligned} c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + \cdots + c_{in}c_{jn} &= 0 \quad (i \neq j) \\ c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \cdots + c_{in}^2 &= 1 \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) называются *соотношениями ортогональности матрицы  $C$  по строкам*. Действительно, если каждую строку матрицы  $C$  рассматривать как вектор с  $n$  координатами, то на первое из соотношений (4) можно смотреть, как на скалярное произведение  $i$ -ой и  $j$ -ой строк матрицы. Это скалярное произведение равно нулю, т.е. строки матрицы попарно ортогональны. Второе из соотношений (4) как бы задает квадрат длины  $i$ -ой строки матрицы (квадрат длины вектор – строки). Эта длина должна быть единичной. Для наших рассуждений нам потребуются матрицы порядка 3, для этих матриц данная интерпретация естественна и следует из полученных нами правил вычисления скалярного произведения и длины вектора.

Равенство (3) означает, что все элементы, стоящие на главной диагонали матрицы  $C'C$ , также равны 1, остальные элементы этой матрицы все нулевые, т.е. (см. формулы (3) и (4) п.7.4)

$$\begin{aligned} c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{ni}c_{nj} &= 0 \quad (i \neq j) \\ c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdots + c_{ni}^2 &= 1 \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (5)$$

Условия (5) называются *соотношениями ортогональности матрицы  $C$  по столбцам*. Таким образом, получена

**Теорема 1.** Ортогональность матрицы  $C$  в смысле равенства (1) эквивалентна как ортогональности по строкам, так и ортогональности по столбцам.

**Теорема 2.** Определитель всякой ортогональной матрицы равен  $\pm 1$ .

*Доказательство.* Из равенства  $CC^{-1} = E$  следует, что  $\det(CC^{-1}) = \det E = 1$ . Если  $C$  ортогональна, то  $C^{-1} = C'$ , поэтому  $\det(CC') = 1$ . По свойству определителей  $\det C' = \det C$ , поэтому применяя теорему из п. 7.4, получаем

$$1 = \det(CC') = \det C \cdot \det C' = (\det C)^2,$$

откуда  $\det C = \pm 1$ . Теорема доказана.

Геометрический смысл понятия ортогональной матрицы второго или третьего порядка дается следующей теоремой.

**Теорема 3.** Ортогональные матрицы и только они являются матрицами перехода от одного ортогонального базиса к другому (от одной прямоугольной системы координат к другой).

*Доказательство.* Пусть в пространстве дан произвольный ортогональный базис  $e_1, e_2, e_3$  и пусть  $C$  — ортогональная матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

$C$  служит матрицей перехода к новому базису  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Докажем, что новый базис также является ортогональным, для чего достаточно показать, что векторы нового базиса попарно ортогональны, и длина каждого из них равна 1. Поскольку  $C$  — матрица перехода к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$  от базиса  $e_1, e_2, e_3$ , то

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3$$

$$e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3$$

$$e'_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3$$

или

$$e'_i = \sum_{k=1}^3 c_{ki}e_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Тогда

$$(e'_i, e'_j) = \left( \sum_{k=1}^3 c_{ki}e_k, \sum_{l=1}^3 c_{lj}e_l \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ki}c_{lj}(e_k, e_l).$$

Но  $e_1, e_2, e_3$  попарно ортогональны и  $|e_i| = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Значит,

$$(e'_i, e'_j) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ki}c_{lj}(e_k, e_l) = \sum_{k=1}^3 c_{ki}c_{kj}(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^3 c_{ki}c_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

в силу ортогональности матрицы  $C$  по столбцам. Итак, векторы нового базиса имеют единичную длину и попарно ортогональны, следовательно,  $e'_1, e'_2, e'_3$  является ортонормированным базисом.

Обратно, пусть  $e_1, e_2, e_3$  и  $e'_1, e'_2, e'_3$  — два ортонормированных базиса, а  $C$  — матрица перехода от первого базиса ко второму. Докажем, что  $C$  является ортогональной матрицей. По определению матрицы перехода в столбцах матрицы  $C$  стоят координаты векторов  $e'_1, e'_2, e'_3$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ . Но  $e'_1, e'_2, e'_3$  попарно ортогональны, значит, столбцы матрицы  $C$  попарно ортогональны. Далее,  $|e'_1| = |e'_2| = |e'_3| = 1$ , поэтому длина каждого столбца матрицы  $C$  равна 1. Значит, матрица  $C$  ортогональна по столбцам, т.е. в силу теоремы 1 — ортогональна.

Найдем элементы матрицы  $C$ , т.е. выразим их через векторы старого и нового базисов. Для этого скалярно умножим  $e'_i$  на  $e_j$ :

$$(e'_i, e_j) = \left( \sum_{k=1}^3 c_{ki}e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^3 c_{ki}(e_k, e_j) = c_{ji}(e_j, e_j) = c_{ji} \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3).$$

Значит,  $c_{ji} = (e'_i, e_j)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) и матрица  $C$  есть

$$C = \begin{pmatrix} (e'_1, e_1) & (e'_2, e_1) & (e'_3, e_1) \\ (e'_1, e_2) & (e'_2, e_2) & (e'_3, e_2) \\ (e'_1, e_3) & (e'_2, e_3) & (e'_3, e_3) \end{pmatrix}.$$

Но

$$(e'_i, e_j) = |e'_i| |e_j| \cos(e'_i \wedge e_j) = \cos(e'_i \wedge e_j) \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

следовательно, столбцы матрицы  $C$  состоят из направляющих косинусов векторов нового базиса  $e'_1, e'_2, e'_3$  относительно старого базиса (осей старой системы координат):

$$C = \begin{pmatrix} \cos(e'_1 \wedge e_1) & \cos(e'_2 \wedge e_1) & \cos(e'_3 \wedge e_1) \\ \cos(e'_1 \wedge e_2) & \cos(e'_2 \wedge e_2) & \cos(e'_3 \wedge e_2) \\ \cos(e'_1 \wedge e_3) & \cos(e'_2 \wedge e_3) & \cos(e'_3 \wedge e_3) \end{pmatrix}.$$

Строки же матрицы  $C$  состоят из направляющих косинусов векторов старого базиса  $e_1, e_2, e_3$  относительно нового базиса (осей новой системы координат). Значит,  $C'$  есть матрица перехода от нового базиса к старому.

Итак, если в пространстве дан произвольный ортогональный базис  $e_1, e_2, e_3$ , то для всякой ортогональной матрицы  $C$  существует такой однозначно определенный ортогональный базис  $e'_1, e'_2, e'_3$ , что элементы  $c_{ij}$  матрицы  $C$  есть косинусы углов между векторами  $e_i$  и  $e'_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Аналогичное утверждение справедливо и для плоскости. Достаточно координаты вектора  $e$  единичной длины  $x$  и  $y$  записать в виде скалярных произведений

$$x = (e, e_1) = \cos \alpha, \quad y = (e, e_2) = \cos \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между вектором  $e$  и координатными ортами  $e_1$  и  $e_2$ .

Для плоскости также верна следующая теорема.

**Теорема 4.** Для всякой ортогональной матрицы  $C$  второго порядка можно найти такой угол  $\alpha$ , что

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (7)$$

если  $\det C = 1$

и

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (8)$$

если  $\det C = -1$ .

**Доказательство.** Действительно,  $C$  есть матрица перехода от ортогонального репера  $Oe_1e_2$  к ортогональному реперу  $Oe'_1e'_2$ . Репер  $Oe'_1e'_2$  получается из репера  $Oe_1e_2$  либо поворотом на некоторый угол  $\alpha$  ( $\alpha$  — угол наклона  $e'_1$  к  $e_1$ ), либо поворотом с последующим отражением относительно прямой, на которой лежит вектор  $e'_1$ . В первом случае матрица  $C$  имеет вид (7), во втором — вид (8).

**Пример.** Даны две прямоугольные системы координат  $Oxyz$  и  $O'x'y'z'$ . Начало второй системы находится в точке  $O'(1, 2, 2)$ , ось  $O'y'$  проходит через точку  $O$ , а ось  $O'x'$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $A$ . За положительные направления осей  $O'x'$  и  $O'y'$  приняты, соответственно, направления векторов  $\overrightarrow{O'A}$  и  $\overrightarrow{O'O}$ , положительное направление оси  $O'z'$  выбрано так, чтобы обе системы были одинаково ориентированы. Выписать формулы преобразования координат.

**Решение.** Вектор  $\overrightarrow{O'O}$ , очевидно, имеет координаты

$$\overrightarrow{O'O} = (-1, -2, -2).$$

Так как он задает направление оси  $O'y'$ , то соответствующий нормированный вектор

$$e'_2 = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

является вектором нового ортонормированного базиса.

Найдем точку  $A$ . Так как она лежит на оси  $Ox$ , то ее координаты есть  $(x, 0, 0)$ . Поскольку вектор  $\overrightarrow{O'A} = (x-1, -2, -2)$  задает направление оси  $O'x'$ , то он должен быть ортогонален вектору  $e'_2$  (вектору  $\overrightarrow{O'O}$ ), значит

$$(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'O}) = 0$$

или

$$-(x-1) + 4 + 4 = 0,$$

откуда  $x = 9$ . Значит,  $\overrightarrow{O'A} = (8, -2, -2)$  и соответствующий нормированный вектор

$$e'_1 = \left( \frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$$

есть вектор нового базиса.

Осталось найти вектор, задающий направление оси  $O'z'$ . Этот вектор  $e'_3$  ортогонален векторам  $e'_1$  и  $e'_2$  и направлен так, что тройка векторов  $e'_1, e'_2, e'_3$  имеет такую же ориентацию, как тройка  $e_1, e_2, e_3$ . Пусть  $e'_3 = (x, y, z)$ . Тогда условия ортогональности  $e'_3$  с  $e'_1$  и  $e'_3$  с  $e'_2$  принимают вид:

$$\begin{cases} (e'_3, e'_1) = 0 \\ (e'_3, e'_2) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}y - \frac{1}{3\sqrt{2}}z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0, \end{cases}$$

откуда  $x = 0, y = -z$ .

Так как  $|e'_3| = 1$ , то  $y^2 + z^2 = 1$ , значит,  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Получаем два противоположно направленных вектора:

$$\left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{и} \quad \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Если в качестве  $e'_3$  выбрать второй вектор, то матрица перехода к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$  есть

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

и ее определитель равен  $-1$ , поэтому старый и новый реперы противоположно ориентированы. Значит, противоположно направленный вектор

$$\left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

задает требуемую ориентацию, его и следует взять в качестве  $e'_3$ . Теперь нетрудно выписать связь между координатами  $x, y, z$  произвольной точки в старой системе координат и ее координатами  $x', y', z'$  в новой системе

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3\sqrt{2}}x' - \frac{1}{3}y' + 1 \\ y &= -\frac{1}{3\sqrt{2}}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 2 \\ z &= -\frac{1}{3\sqrt{2}}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 2. \end{aligned}$$



Вектор  $e'_3$  можно было найти гораздо быстрее, если воспользоваться определением векторного произведения. Действительно, очевидно, что  $[e'_1, e'_2]$  дает требуемый вектор. Имеем

$$e'_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-3} & \frac{2}{-3} & \frac{2}{-3} \end{vmatrix} = 0e_1 + \frac{9}{9\sqrt{2}}e_2 - \frac{9}{9\sqrt{2}}e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3$$

или  $e'_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
4. Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П. Аналитическая геометрия. М.: Просвещение, 1970.
5. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1969.
6. Постников М.М. Лекции по геометрии. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979.
7. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969.
8. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.
9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1970.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1975.

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Предисловие  | 3  |
| Введение   | 4  |
| Материал для самостоятельного изучения   |    |
| 0.1. Декартовы координаты на прямой  | 7  |
| 0.2. Декартова плоскость   | 8  |
| 0.3. Декартовы координаты в пространстве   | 12 |
| 0.4. Деление отрезка в данном отношении  | 12 |
| 0.5. Векторы. Основные определения. Линейные операции над векторами. Теорема о коллинеарных векторах                                 | 16 |
| ЛЕКЦИЯ 1. Линейная зависимость и независимость системы векторов  |    |
| 1.1. Понятие линейной зависимости векторов   | 21 |
| 1.2. Аффинные координаты в пространстве  | 24 |
| ЛЕКЦИЯ 2. Скалярное произведение векторов  |    |
| 2.1. Проекция вектора на ось   | 27 |
| 2.2. Скалярное произведение векторов   | 29 |
| 2.3. Площадь треугольника на плоскости   | 34 |
| ЛЕКЦИЯ 3. Векторное произведение векторов  |    |
| 3.1. Определение векторного произведения   | 36 |
| 3.2. Алгебраические свойства векторного произведения   | 38 |
| 3.3. Геометрические свойства векторного произведения. Вычисление координат векторного произведения двух векторов                     | 41 |
| ЛЕКЦИЯ 4. Смешанное и двойное векторное произведение векторов  |    |
| 4.1. Смешанное произведение векторов   | 44 |
| 4.2. Двойное векторное произведение векторов   | 46 |
| ЛЕКЦИЯ 5. Прямая на плоскости  |    |
| 5.1. Общее уравнение прямой  | 49 |
| 5.2. Уравнение прямой в отрезках   | 50 |
| 5.3. Каноническое уравнение прямой на плоскости  | 51 |
| 5.4. Векторное и параметрические уравнения прямой  | 52 |
| 5.5. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом  | 53 |
| 5.6. Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых   | 55 |
| 5.7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости                          | 58 |
| 5.8. Пучок прямых на плоскости   | 62 |
| ЛЕКЦИЯ 6. Плоскость и прямая в пространстве  |    |
| 6.1. Общее уравнение плоскости   | 64 |
| 6.2. Уравнение плоскости в отрезках  | 66 |
| 6.3. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой   | 67 |
| 6.4. Угол между двумя плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве  | 68 |
| 6.5. Векторное и параметрические уравнения плоскости   | 70 |
| 6.6. Нормированное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости   | 72 |
| 6.7. Различные виды уравнений прямой в пространстве  | 76 |
| 6.8. Прямая как линия пересечения двух плоскостей  | 77 |
| 6.9. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Условие принадлежности двух прямых одной |    |

|  |     |
|--|-----|
| плоскости  | 78  |
| 6.10. Взаимное расположение двух прямых в пространстве                                   | 81  |
| 6.11. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости           | 82  |
| 6.12. Расстояние от точки до прямой в пространстве                                       | 88  |
| 6.13. Расстояние между двумя прямыми в пространстве                                      | 89  |
| 6.14. Пучок плоскостей   | 90  |
| ЛЕКЦИЯ 7. Преобразование координат   |     |
| 7.1. Переход от одной аффинной системы координат к другой без изменения начала координат | 95  |
| 7.2. Переход от одной аффинной системы координат к другой с изменением начала координат  | 96  |
| 7.3. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой на плоскости              | 98  |
| 7.4. Дополнение. Некоторые определения матричной алгебры                                 | 99  |
| 7.5. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой в пространстве            | 101 |
| ЛИТЕРАТУРА   | 105 |

Светлана Ивановна Яблокова

**ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ  
"АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"  
Часть 1**

Редактор, корректор А.А. Аладьева  
Компьютерный набор, верстка С.И. Яблоковой

Подписано в печать 05.04.2002. Формат 60×84 1/8  
Бумага тип. Усл. печ. л. 12,55. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 100 экз.  
Заказ №27

Оригинал - макет подготовлен в редакционно-издательском отделе  
Ярославского государственного университета

Отпечатано на ризографе

Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова  
150000 Ярославль, ул. Советская, 14